LE MATEMATICHE
Vol. LXI (2006) - Fasc. II, pp. 275-286

SUR LES IDÉAUX D'UNE ALGÉBRE DE BEURLING GÉNÉRALISÉE

ABDELLAH EL KINANI

In this paper, we characterize the closed ideals of the locally m-convex algebra $L^p_\Omega(R^n)$, where $\Omega = \left\{(1 + \|x\|^2)^s : s > \frac{n(p-1)}{2}\right\}$ and $p \in]1, +\infty[$, as the linear closed subspaces that are invariant under translation. We also give a weighted algebra analogues of the classical theorems of N. Wiener and P. Lévy on absolutely convergent Fourier series. A couple of other properties of the convex hull of an ideal in $L^p_\Omega(R^n)$ are also proved.

Mots-clés: Algèbre localement m-convexe commutative, produit de convolution, poids sur R^n, transformation de Fourier, idéal d'une algèbre, théorème de Wiener, théorème de Lévy, théorème tauberien de Wiener.

1. Préliminaires et introduction.

Soit (E, τ) un espace localement convexe et $(|.|_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de semi-normes définissant sa topologie τ. Si E est muni d'une structure d'algèbre telle que $|xy|_\lambda \leq |x|_\lambda |y|_\lambda$, pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \Lambda$, on dit que (E, τ) est une algèbre multiplicativement convexe (*a.l.m.c.* en abrégé). Ces algèbres ont été étudiées par R. Arens ([1], E. A. Michaël

Entrato in redazione il 10 ottobre 2005.
2000 *Mathematical Subject Classifications*: Primary 45H20; 46E30.

([13]) et d'autres auteurs. Pour $\lambda \in \Lambda$, on désigne par $E_\lambda = E/Ker|.|_\lambda$, où $Ker|.|_\lambda = \{x \in E : |x|_\lambda = 0\}$, l'algèbre quotient de E par $Ker|.|_\lambda$ et $\pi_\lambda : E \longrightarrow E/Ker|.|_\lambda$ la surjection canonique. Pour $x \in E$, la classe $\pi_\lambda(x)$ de x sera notée x_λ. On munit E_λ de la norme $\|.\|_\lambda$ définie par $\|x_\lambda\|_\lambda = |x|_\lambda$. Soit $\widehat{E_\lambda}$ l'algèbre complétée, pour $\|.\|_\lambda$, de E_λ. La norme de $\widehat{E_\lambda}$ sera encore notée $\|.\|_\lambda$. Si E est séparée et complète, alors E est algèbriquement et topologiquement isomorphe à la limite projective d'algèbres de Banach $\widehat{E_\lambda}$.

Soit G un groupe localement compact commutatif muni d'une mesure de Haar notée $d\mu$. Dans [2] et [3], A. Beurling a initié l'étude de la théorie des sous-algèbres de $L^1(G, d\mu)$ qui sont de la forme $L^1(G, d\nu)$, où $d\nu$ est une mesure plus grande que $d\mu$. De telles algèbres sont dites de Beurling. Soit ω un poids sur G c'est à dire une application continue $\omega : G \longrightarrow]0, +\infty[$ avec $\omega(t) \geq 1$ pour tout $t \in G$ et $\omega(ts) \leq \omega(t) + \omega(s)$ pour tout $s, t \in G$. L'algèbre $(L^1(G, \omega d\mu), \|.\|_\omega)$, où

$$L^1(G, \omega d\mu) = \left\{ f \in L^1(G, d\mu) : \int_G |f(t)|\omega(t) d\mu < +\infty \right\}$$

et

$$\|f\|_\omega = \int_{R^n} |f(t)|\omega(t) d\mu, \text{ pour tout } f \in L^1(G, \omega d\mu)$$

constitue un exemple classique d'algèbre de Beurling. Pour $p \in]1, +\infty[$, les espaces $L^p(R^n, dx)$, notés simplement $L^p(R^n)$, où dx est la mesure de Lebesgue, ne sont pas des algèbres pour les produits ordinaire et de convolution. Pour $1 < p < +\infty$ et $s > \frac{n(p-1)}{2}$, on considère la famille de poids, qui intervient dans l'étude des espaces de Schwartz et de Sobolev, suivante

$$\Omega = \left\{ \omega_s : s > \frac{n(p-1)}{2} \right\}, \text{ où } \omega_s(x) = (1 + \|x\|^2)^s.$$

On définit les espaces fonctionnels suivants:

$$L^p_s(R^n) = \{ f : R^n \longrightarrow C : f \text{ mesurable et } |f|^p \omega_s \in L^1(R^n) \}$$

et

$$L^p_\Omega(R^n) = \{ f : R^n \longrightarrow C : f \text{ mesurable et } |f|^p \omega \in L^1(R^n), \text{ pour tout } \omega \in \Omega \}.$$

L'espace $L^p_s(R^n)$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_s$ donnée par

$$\|f\|_s = \Big(\int_{R^n} |f(x)|^p \omega_s(x) dx \Big)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour tout } f \in L_s^p(R^n)$$

et son dual s'identifie à l'espace $L_{s'}^q(R^n)$, où $s' = -\dfrac{q}{p} s$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Comme la fonction $x \longmapsto \omega_s^{\frac{1}{1-p}}(x)$ appartient à $L^1(R^n)$ vu que $s > \dfrac{n(p-1)}{2}$, on voit que $L_\Omega^p(R^n) \subset L^1(R^n)$. De plus, par la proposition 2.1 de [7], l'espace $(L_\Omega^p(R^n), (\|.\|_s)_s)$ est une $a.l.m.c.$ complète. Les algèbres convolutives $(L_\Omega^p(R^n), (\|.\|_s)_s)$ seront dites de Beurling généralisées. Dans toute la suite, nous ne ferons pas de différence entre deux fonctions égales presque partout. Pour $f \in L^1(R^n)$, $\mathcal{F} f$ désignera la transformation de Fourier de f, i.e.,

$$\mathcal{F} f(x) = \int_{R^n} f(y) e^{-2\pi i x y} dy, \text{ pour tout } x \in R^n.$$

On désignera par $\mathcal{D}(R^n)$ (resp. $\mathcal{S}(R^n)$) l'espace des fonctions complexes indéfiniment dérivables sur R^n à support compact (resp. indéfiniment dérivables sur R^n à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées de tout ordre).

Dans ce papier, nous étudions les idéaux de l'algèbre $(L_\Omega^p(R^n), (\|.\|_s)_s)$. Nous établissons d'abord (Proposition 2.1) un théorème du type Gelfand Naïmark dans $(L_\Omega^p(R^n), (\|.\|_s)_s)$ à savoir que $L_\Omega^p(R^n)$ est algébriquement isomorphe à une sous-algèbre séparante de l'algèbre $\mathcal{C}_0(R^n)$ des fonctions complexes continues qui s'annullent à l'infini sur R^n. Ensuite, Nous montrons (proposition 3.1) qu'un sous espace vectoriel fermé I de $L_\Omega^p(R^n)$ est un idéal si, et seulement, si I est stable par les translations. Puis, nous obtenons (Proposition 3.4 et Proposition 3.5), dans l'algèbre $L_\Omega^p(R^n)$, les analogues des théorèmes de N. Wiener et de P. Lévy. Par ailleurs, nous prouvons (proposition 3.7) que, pour idéal I de $L_\Omega^p(R^n)$, son enveloppe $coSp(I)$ est égal à E si, et seulement, si $K(E) \subset I \subset I(E)$, où E est un ensemble fermé de R^n et $I(E)$ (resp. $K(E)$) l'idéal des $f \in L_\Omega^p(R^n)$ telles que $\mathcal{F} f$ s'annule sur E (resp. $\mathcal{F} f$ est à support compact disjoint de E). Enfin, nous obtenons (proposition 3.8) un théorème taubérien du type Wiener qui dit que, pour qu'un idéal I de $L_\Omega^p(R^n)$ soit dense, il faut et il suffit que $coSp(I)$ soit vide.

2. Théorème du type Gelfand Naïmark dans $(L^p_\Omega(R^n), (\|.\|_s)_s)$.

Soit $\mathcal{M}(L^p_\Omega(R^n))$ (resp. $\mathcal{M}(L^p_s(R^n))$) l'ensemble des caractères continus non nuls de $L^p_\Omega(R^n)$ (resp. de $L^p_s(R^n)$). Comme

$$\lim_{\longrightarrow s} L^p_s(R^n) = L^p_\Omega(R^n),$$

le lemme 6.3 de [12, p. 172] montre que

$$\mathcal{M}(L^p_\Omega(R^n)) = \lim_{\longleftarrow s} \mathcal{M}(L^p_s(R^n)).$$

Par conséquent

$$\mathcal{M}(L^p_\Omega(R^n)) = \bigcup_s \mathcal{M}(L^p_s(R^n)).$$

Désignons par $\mathcal{M}_s$ l'ensemble des caractères non nuls de $L^p_s(R^n)$ et soit $\lambda \in R^n$. Pour toute $f \in L^p_s(R^n)$, posons

$$\sigma_\lambda(f) = \mathcal{F}f(\lambda) = \int_{R^n} f(x)e^{-2\pi i\lambda x}dx.$$

Il est clair que $\sigma_\lambda \in \mathcal{M}_s$ et que l'application $\lambda \longmapsto \sigma_\lambda$ est une application injective de R^n sur $\mathcal{M}_s$. Cette application est en fait un homéomorphisme de R^n sur $\mathcal{M}_s$ (cf. [6], proposition 2.2). Ainsi, par cette bijection, la transformation de Gelfand s'identifie avec la transformation de Fourier $\mathcal{F}$. Par ailleurs, par ([13], Corollary 5.5, p. 19), on a

$$\begin{aligned} Rad(L^p_\Omega(R^n)) &= \{f \in L^p_\Omega(R^n) : \chi(f) = 0, \ \forall \chi \in \mathcal{M}(L^p_\Omega(R^n))\} \\ &= \{f \in L^p_\Omega(R^n) : \mathcal{F}f(x) = 0, \ \forall x \in R^n\} \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

Ainsi l'algèbre $L^p_\Omega(R^n)$ est semi-simple. De plus, elle est commutative et non unitaire. On a alors le théorè me du type Gelfand Naïmark suivant.

Proposition 2.1. *Soient $p \in]1, +\infty[$ et $s > \frac{n(p-1)}{2}$. Alors l'algèbre $L^p_\Omega(R^n)$ est algébriquement isomorphe à une sous-algèbre séparante de l'algèbre $\mathcal{C}_0(R^n)$ des fonctions complexes continues qui s'annullent à l'infini sur R^n.*

Preuve. Par le théorème du type Gelfand Naïmark ([13], proposition 8.1, p. 31), la transformation de Gelfand

$$\mathcal{G} : L^p_\Omega(R^n) \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathcal{M}(L^p_\Omega(R^n)))$$

définie par $\mathcal{G}(f) : \chi \longmapsto \chi(f)$ est un morphisme d'algèbre. De plus $\ker \mathcal{G} = \{0\}$ vu que l'algèbre $L^p_\Omega(R^n)$ est semi-simple. Ainsi l'application $\mathcal{G}$ est algébriquement isomorphe à l'algèbre séparante $\mathcal{G}(L^p_\Omega(R^n))$ contenue dans $\mathcal{C}_0(R^n)$ car $\mathcal{M}(L^p_\Omega(R^n))$ est homéomorphe à R^n.

Remarque 2.2. Pour l'algèbre $L^p_\Omega(R^n)$, la transformation de Gelfand est exactement la transformation de Fourier $\mathcal{F}$. Il en résulte que la proposition 2.1 contient en particulier le théorème de Riemann Lebesque selon lequel la transformation de Fourier d'une fonction $f \in L^1(R^n)$ est une fonction continue, sur R^n, tendant vers zéro à l'infini.

3. Idéaux de l'algèbre à poids $L^p_\Omega(R^n)$.

Comme dans le cas classique, l'espace $\mathcal{S}(R^n)$ s'injecte continûment dans $L^p_\Omega(R^n)$ et $\mathcal{S}(R^n)$ est dense dans $L^p_\Omega(R^n)$. De plus, l'espace $\overline{\mathcal{F}}[\mathcal{D}(R^n)]$ est dense dans $\mathcal{S}(R^n)$ vu que $\mathcal{D}(R^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(R^n)$. Il s'ensuit que $\overline{\mathcal{F}}[\mathcal{D}(R^n)]$ est dense dans $L^p_\Omega(R^n)$ car $\mathcal{S}(R^n)$ est dense dans $L^p_\Omega(R^n)$ et la topologie de $\mathcal{S}(R^n)$ est plus fine que celle induite par $L^p_\Omega(R^n)$. Par ailleurs, l'algèbre non unitaire $(L^p_\Omega(R^n), (\|.\|_s)_s)$ est à unité approchée bornée. En effet soit $\theta \in \mathcal{D}(R^n)$ telle que

$$supp\ \theta \subset \overline{B}(0,1) \text{ et } \int_{R^n} \theta(x)dx = 1;$$

et soit $(e_j)_j \subset \mathcal{D}(R^n)$ définies par

$$e_j(x) = (j+1)^n \theta[(j+1)x].$$

Alors $(e_j)_j$ est une unité approchée bornée de $\mathcal{C}_c(R^n)$. Et comme l'espace $\mathcal{C}_c(R^n)$ des fonctions continues à support compact, dans R^n, est dense dans $L^p_\Omega(R^n)$, $(e_j)_j$ est aussi une unité approchée bornée de $L^p_\Omega(R^n)$.

Un sous espace vectoriel fermé I de $L^1(R^n)$ est un idéal si, et seulement, s'il est stable par les translations. Ce résultat reste encore valable dans l'espace à poids $L^p_\Omega(R^n)$ comme le montre ce qui suit.

Proposition 3.1. *Pour un sous espace vectoriel fermé I de $L^p_\Omega(R^n)$, les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

1) I est un idéal de $L^p_\Omega(R^n)$.

2) ${}_af \in I$, pour tous $f \in I$ et $a \in R^n$, où ${}_af(x) = f(x-a)$, pour tout $x \in R^n$.

Preuve. 1)$\Longrightarrow$ 2). Soient $f \in I$ et $a \in R^n$. On a ${}_af = \lim_{j\to\infty} e_j *_a f$, dans $L^p_\Omega(R^n)$. Par ailleurs, on a $e_j *_a f =_a e_j * f \in I$ d'aprés **1)**. Donc ${}_af \in I$ car I est fermé.

2) $\Longrightarrow$ 1). Soit $f \in I$ et $g \in L^p_\Omega(R^n)$; et soit L une forme linéaire continue L sur $L^p_\Omega(R^n)$ qui s'annule sur I. On va montrer que $L(f*g) = 0$; ceci exige que $f*g \in I$, par le théorème de Hahn-Banach. D'aprés ([9], p. 290), le dual topologique de $L^p_\Omega(R^n)$ est la limite inductive des espaces $L^q_{s'}(R^n)$. Il existe alors $\varphi \in L^q_{s'}(R^n)$ tel que

$$L(\psi) = \int_{R^n} \psi(x)\varphi(x)dx, \text{ pour tout } h \in L^p_s(R^n).$$

Posons $\check{f}(x) = f(-x)$, pour tout $x \in R^n$. Comme $\check{f}*\varphi(x) = L({}_xf) = 0$, pour tout $x \in R^n$ car ${}_xf \in I$ et L s'annule sur I, on a $\check{f} * \varphi = 0$. Il s'ensuit que

$$L(g*f) = \int_{R^n}\int_{R^n} g(x-y)f(y)\varphi(x)dxdy = \int_{R^n} g(t)\check{f}*\varphi(t)dt = 0.$$

Proposition 3.2. *Soit I un idéal fermé non trivial de $L^p_\Omega(R^n)$ et soit I_s, l'adhérence de I dans $(L^p_s(R^n), \|.\|_s)$. Alors $I = \bigcap_s I_s$.*

Preuve. Posons $J = \bigcap_s I_s$. Il est clair que $I \subset J$. Pour l'autre inclusion, montrons que $I^\perp \subset J^\perp$, où

$$I^\perp = \{g \in [L^p_\Omega(R^n)]^* \colon \langle g, f\rangle = 0, \text{ pour tout } f \in I\}$$

et

$$[L^p_\Omega(R^n)]^* = \bigcup_s L^q_{s'}(R^n)$$

désigne le dual de $L^p_\Omega(R^n)$. Soit $g \in I^\perp$. Il existe alors $s > \dfrac{n(p-1)}{2}$ tel que $g \in L^q_{s'}(R^n)$. Ceci entraîne que $g \in I_s^\perp$ car I est dense dans $I_s^\perp$ pour la norme $\|.\|_s$ et g est continue. Or $I_s^\perp \subset J^\perp$ car $J \subset I_s$, donc $g \in J^\perp$.

Posons

$$\Gamma = \{f \in L^p_\Omega(R^n) : supp\mathcal{F}f \text{ est compact}\}.$$

Il est clair que Γ est un idéal de $L^p_\Omega(R^n)$. De plus, il est dense dans $L^p_\Omega(R^n)$ car $\overline{\mathcal{F}}[\mathcal{D}(R^n)] \subset \Gamma$. Plus généralement, on a ce qui suit.

Proposition 3.3. *Pour tout idéal I de $L^p_\Omega(R^n)$, l'idéal $I \cap \Gamma$ est dense dans I.*

Preuve. Soit $f \in I\backslash\{0\}$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi \in L^p_\Omega(R^n)$ telle que $\|f - f * \varphi\|_s \leq \frac{\varepsilon}{2}$, pour tout $s > \frac{n(p-1)}{2}$. D'aprés ce qui précéde, il existe $\psi \in \Gamma$ telle que $\|\varphi - \psi\|_s \leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|_s}$. Alors $f * \psi \in I \cap \Gamma$ et $\|f - f * \psi\|_s \leq \varepsilon$ car

$$\|f - f * \psi\|_s \leq \|f - f * \varphi\|_s + \|f * (\varphi - \psi)\|_s \leq \varepsilon.$$

Si $f \in L^p_\Omega(R^n)$, notons $Z(f) = \{\lambda \in R^n : \mathcal{F} f(\lambda) = 0\}$. Soit I un idéal de $L^p_\Omega(R^n)$. On appelle enveloppe de I ou cospectre de I et on note $coSp(I)$ l'ensemble (fermé de R^n) des zéros communs aux transformées de Fourier de toutes les fonctions appartenant à I. i.e., $coSp(I) = \bigcap_{f\in I} Z(f)$. Si $\overline{I}$ est la fermeture de I dans $L^p_\Omega(R^n)$, il est alors clair que $coSp(I) = coSp(\overline{I})$.

Soit $\sum_{n\in Z} a_n e^{int}$ une série de Fourier complexe absolument convergente. Si la fonction $f(t) = \sum_{n\in Z} a_n e^{int}$ ne s'annule pas sur R, alors le théorème classique de N. Wiener ([15]) dit que la fonction inverse $\frac{1}{f(t)}$ se développe, elle aussi, en série Fourier complexe absolument convergente. Une autre preuve de ce résultat est découvete par I. M. Gelfand ([8]). Elle est souvent citée comme l'un des premiers succés de la théorie des algèbres de Banach. En fait, elle fait appel à l'algèbre de Banach multiplicative et unitaire $\mathcal{A}$ définie par:

$$\mathcal{A} = \left\{ f(t) = \sum_{n\in Z} a_n e^{int},\ t \in R : \sum_{n\in Z} |a_n| < +\infty \right\}.$$

Cette dérnière n'est autre que l'algèbre multiplicative et unitaire $\mathcal{F}(l^1(Z))$. Pour $L^p_\Omega(R^n)$, l'algèbre multiplicative $\mathcal{F}(L^p_\Omega(R^n))$ n'est pas unitaire. Cependant, on a ce qui suit.

Proposition 3.4. (Analogue d'un théorème de N. Wiener). *Soient K un* *compact de* R^n *et* $f \in L^p_\Omega(R^n)$ *telle que*

$$\mathcal{F}f(\lambda) \neq 0, \text{ pour tout } \lambda \in K.$$

Alors il existe $g \in L^p_\Omega(R^n)$ *telle que,*

$$\mathcal{F}g(\lambda)\mathcal{F}f(\lambda) = 1, \text{ pour tout } \lambda \in K.$$

Preuve. Montrons tout d'abord que si I un idéal de $L^p_\Omega(R^n)$ tel que $coSp(I) \cap K = \emptyset$. Alors il existe $\gamma \in I$ telle que $\mathcal{F}\gamma(\lambda) = 1$ pour tout $\lambda \in K$. En effet soit $C(K)$ l'algèbre des fonctions continues sur K et $\Psi\colon L^p_\Omega(R^n) \longrightarrow C(K)$ telle que $\Psi(f)$ est la restriction à K de la fonction $\mathcal{F}f$. On munit $B = \Psi[L^p_\Omega(R^n)]$ de produit ordinaire et la norme $\|.\|_B$ donnée par

$$\|\Psi(f)\|_B = \sup_{\lambda\in K} |\mathcal{F}f(\lambda)|.$$

Ainsi $(B, \|.\|_B)$ est algèbre de Banach commutative. Soit $\theta \in L^p_\Omega(R^n)$ telle que $\mathcal{F}\theta = 1$ sur K. Alors $e = \Psi(\theta)$ est l'élément neutre de B. Par ailleurs, pour tout $f \in L^p_\Omega(R^n)$, on a

$$\rho(f) = \sup_{\chi\in\mathcal{M}} |\chi(f)| = \sup_{\lambda\in R^n} |\mathcal{F}f(\lambda)| \leq \|f\|_s.$$

Donc

$$\|\Psi(f)\|_B \leq \|f\|_s, \text{ pour tout } f \in L^p_\Omega(R^n).$$

Ainsi le morphisme Ψ de l'algèbre $L^p_\Omega(R^n)$ sur B est continu. Montrons que $B = \Psi(I)$. Si $\Psi(I)$ est un idéal propre de B, alors il est contenu dans un idéal maximal M de B. Soit Φ un caractère de B tel que $\ker\Phi = M$. Il s'ensuit que $\Phi \circ \Psi$ est caractère non nul continu de $L^p_\Omega(R^n)$. Il existe alors $\lambda_0 \in R^n$ tel que

$$\Phi \circ \Psi(f) = \mathcal{F}f(\lambda_0), \text{ pour tout } f \in L^p_\Omega(R^n).$$

Soit $f \in I$. Comme Φ est nul sur $\Psi(I)$, on a $\mathcal{F}f(\lambda_0) = 0$. Donc $\lambda_0 \in coSp(I)$. Mais aussi $\lambda_0 \in K$, sinon prenons pour f une fonction telle que $\mathcal{F}f(\lambda_0) = 0$ et $\mathcal{F}f(\lambda) = 1$ sur K, on aurait $1 = \Phi(e) = \Phi \circ \Psi(f) = \mathcal{F}f(\lambda_0) = 0$. Ainsi, on aurait $\lambda_0 \in coSp(I) \cap K$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Montrons maintenant la proposition 3.4. Soit I l'idéal de $L^p_\Omega(R^n)$ donné par

$$I = \{h * f : h \in L^p_\Omega(R^n)\}.$$

On a $coSp(I) = Z(f)$. Donc $coSp(I) \cap K = \emptyset$. D'aprés ce qui précedente, il existe $u = g * f \in I$ telle que $\mathcal{F}u(\lambda) = 1$ pour tout $\lambda \in K$.

Soient maintenant K un compact de R^n, $f \in L^p_\Omega(R^n)$ et φ la restriction à K de la fonction $\mathcal{F}f$. Alors $\varphi \in B = \Psi[L^p_\Omega(R^n)]$ et

$$Sp_B\varphi = \{\mathcal{F}f(\lambda) \colon \lambda \in K\}.$$

Soit de plus F une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert U de C contenant $Sp_B\varphi$ et Γ_0 un contour fermé contenu dans U et contenant $Sp_B\varphi$ dans son intérieur. Alors l'élément $F(\varphi)$ donné par le calcul holomorphe classique ([4], Definition 3, p. 52):

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} F(z)(z-\varphi)^{-1}dz$$

est un élément de l'algèbre B tel que $F(\varphi) = F \circ \varphi$. Ainsi obtient-on l'analogue du théorème de P. Lévy ([10] et [11]) comme suit.

Proposition 3.5. (Analogue d'un théorème de P. Lévy). *Soient K un compact de R^n, $f \in L^p_\Omega(R^n)$ et F une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert U de C contenant $\{\mathcal{F}f(\lambda) \colon \lambda \in K\}$. Alors il existe $h \in L^p_\Omega(R^n)$ telle que*

$$F(\mathcal{F}f(\lambda)) = \mathcal{F}h(\lambda), \text{ pour tout } \lambda \in K.$$

Pour un ensemble fermé E de R^n, on pose

$I(E) = \{f \in L^p_\Omega(R^n) \colon \mathcal{F}f = 0 \text{ sur } E\}$,
$J(E) = \{f \in L^p_\Omega(R^n) \colon \mathcal{F}f = 0 \text{ sur un voisinage (variable avec } f) \text{de} E\}$,
$K(E) = \{f \in L^p_\Omega(R^n) \colon supp\mathcal{F}f \text{ est compact et disjoint de } E\}$.

Il est clair que $I(E)$ est un idéal fermé de $L^p_\Omega(R^n)$ et que les ensembles $J(E)$ et $K(E)$ sont des idéaux de $L^p_\Omega(R^n)$. De plus, on a le résultat suivant.

Proposition 3.6. *Soient E un ensemble fermé de R^n et I un idéal de $L^p_\Omega(R^n)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) $coSp(I) = E$.

2) $K(E) \subset I \subset I(E)$.

Preuve. 1)$\Longrightarrow$2). Soit I un idéal de $L^p_\Omega(R^n)$ tel que $coSp(I) = E$. Alors $I \subset I(E)$. Il reste à montrer que $K(E) \subset I$. Soit $f \in K(E)$. Alors $K = supp\mathcal{F}f$ est un compact disjoint de E. Donc $coSp(I) \cap K = \emptyset$. D'aprés la première partie de la preuve de la proposition 3.4, il existe

$\varphi \in I$ telle que $\mathcal{F}\varphi(\lambda) = 1$ pour tout $\lambda \in K$. Il s'ensuit que, pour tout $\lambda \in R^n$, on a

$$\mathcal{F}f(\lambda) = \mathcal{F}f(\lambda)\mathcal{F}\varphi(\lambda),$$

vu que les deux membres sont nuls en dehors de K. D'où $f = f * \varphi \in I$.

2)$\Longrightarrow$1). Soit I un idéal de $L^p_\Omega(R^n)$ tel que $K(E) \subset I \subset I(E)$. Comme $I \subset I(E)$, on a

$$E \subset coSp(I(E)) \subset coSp(I).$$

Par ailleurs, on a

$$coSp(K(E)) \subset E.$$

En effet si $a \notin E$, il existe $\psi \in \mathcal{D}(R^n)$, à support disjoint de E et telle que $\psi(a) = 1$. Donc

$$coSp(I) \subset coSp(K(E)) \subset E;$$

et donc $coSp(I) = E$.

Les idéaux $J(E)$ et $K(E)$ sont liés par l'égalité suivante

$$J(E) \cap \Gamma = K(E).$$

Donc, par la proposition 3.3, $K(E)$ est dense dans $J(E)$. Ainsi $J(E)$ et $K(E)$ ont la même adhérence dans $L^p_\Omega(R^n)$. Posons

$$I_0(I) = \overline{J(E)} = \overline{K(E)}$$

et en tenant compte de la proposition 3.6, on a ce qui suit:

Proposition 3.7. *Soient E un ensemble fermé de R^n et I un idéal fermé de $L^p_\Omega(R^n)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) $coSp(I) = E$.

2) $I_0(I) \subset I \subset I(E)$.

Le théorème taubérien de Wiener dit que si I est un idéal fermé de $L^1(R)$ tel que $coSp(I) = \emptyset$, alors $I = L^1(R)$. En effet $coSp(I) = \emptyset$ est équivalent au fait que I est non contenu dans le noyau d'aucun caractère de $L^1(R)$. Ce qui signifie que l'algèbre quotient $L^1(R)/I$ est radicale. Soit maintenant I un idéal dense dans $L^p_\Omega(R^n)$. Alors, par la proposition 3.6, $coSp(I) = \emptyset$. La réciproque est également vraie comme le montre le résultat suivant.

Proposition 3.8. (Analogue de théorème taubérien de N. Wiener). *Pour un idéal I de $L^p_\Omega(R^n)$, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) I est dense dans $L^p_\Omega(R^n)$.

2) $coSp(I) = \emptyset$.

Preuve. Il reste à montrer l'implication **2) $\Longrightarrow$ 1)**. Soit I un idéal de $L^p_\Omega(R^n)$ tel que $coSp(I) = \emptyset$. Alors

$$K(coSp(I)) = \Gamma,$$

où

$$\Gamma = \{f \in L^p_\Omega(R^n) : supp\mathcal{F}f \text{ est compact}\}.$$

Par ailleurs, par la proposition 3.6, $K(coSp(I)) \subset I$ c'est à dire $\Gamma \subset I$. Or, par la proposition 3.3, $\overline{\Gamma} = L^p_\Omega(R^n)$. D'où $\overline{I} = L^p_\Omega(R^n)$.

En prenant pour I le sous espace vectoriel de $L^p_\Omega(R^n)$ engendré par les translations de f. Alors $\overline{I}$ est aussi stable par les translations. C'est donc un idéal par la proposition 3.1. De plus $coSp(I) = coSp(\overline{I})$. Ainsi obtient-on le résultat suivant.

Corollary 3.9. *Soient $f \in L^p_\Omega(R^n)$ et*

$$T_f = \{{}_af : a \in R^n\}.$$

Les assertions suivantes sont équivalentes.

1) T_f est un ensemble total dans $L^p_\Omega(R^n)$.

2) $\mathcal{F}f(\lambda) \neq 0$, pour tout $\lambda \in R^n$.

Remerciements. L'auteur remercie l'arbitre pour ses pertinantes remarques et suggestions qui ont permis de bien améliorer la première version de ce travail.

REFERENCES

[1] R. Arens, *Dense inverse limit rings*, Michigan Math. J., 5 (1958), 169-182.

[2] A. Beurling, *Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes et leur application à une transformation fonctionnelle*, Congrès de mathématiques à Helsingfors, 1938.

[3] A. Beurling, *Construction and analysis of some convolution algebras*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 14 (1964), fasc. 2, 1-32.

[4] Bonsall F. F., Duncan J., *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, New-york, 1973.

[5] A. El Kinani, *Algèbres de Sobolev et structure m-convexe,*Le Matematiche, Vol. LVII (2002) Fasc. II, 175-183.

[6] A. El Kinani, *Régularité d'une algèbre m-convexe à poids*, Bull. Belg. Math. Soc. 13 (2006), n. 1, 159-166.

[7] A. El Kinani - A. Benazzouz, *Structure m-convexe dans l'espace à poids* $L^p_\Omega(R^n)$, Bull. Belg. Math. Soc. 10 (2003), 49-57.

[8] I. M. Gelfand, *Normierte Ringe,* Mat. Sb. 9 (1941), 2-24.

[9] G. Kothe, *Topological vector spaces I*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg-New-york, 1969.

[10] P. Lévy, *Sur la convergence des séries de Fourier* CR Paris 196 (1933), 463-464.

[11] P. Lévy, *Sur la convergence des séries de Fourier*, Compositio Math. 1 (1934), 1-14.

[12] A. Mallios, *Topological algebras*, Selected topics, North -Holand, Amsterdam, 1986.

[13] E. A. Michael, *Locally multiplicatively convex topological algebras*, Memoirs Amer. Math. Soc. 11 (1952).

[14] S. Mazur, *Sur les anneaux linéaires* C. R. Acad. Sci. Paris 207 (1938), 1025-1027.

[15] N. Wiener, *Tauberian theorems*, Annals of Mathematics 33 (1932), 1-100.

Ecole Normale Supérieure
B. P. 5118, Takaddoum
10105 Rabat (Morocco)
e-mail: abdellah_elkinani@yahoo.fr