LE MATEMATICHE
Vol. LX (2005) – Fasc. I, pp. 189–240

PROCESSI DI CONTROLLO CON PARAMETRI DISTRIBUITI IN INSIEMI NON LIMITATI. CONTROLLABILITÀ CON LUOGO INIZIALE VARIABILE

GIUSEPPE PULVIRENTI - GIUSEPPE SANTAGATI - ALFONSO VILLANI

We study the controllability with variable initial locus of the following distributed parameter linear control system

(E) $$z_{xy} + A(x, y)z_x + B(x, y)z_y + C(x, y)z = F(x, y)U(x, y) .$$

Here (x, y) ranges over the following unbounded subset of $\mathbb{R}^2$:

$$L_{I,J} = \bigcup_{(u,v)\in I\times J} l(u, v) ,$$

where I, J are two non-degenerate intervals of $\mathbb{R}$ and

$$l(u, v) = ([u, +\infty[\times\{v\}) \cup (\{u\} \times [v, +\infty[) , \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 .$$

The state vector function z belongs to the Sobolev type space

$$W^*_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n) = \left\{ z \in L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n) \ : \ z_x, z_y, z_{xy} \in L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n) \right\}$$

and the control vector function U is in $L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$. Moreover, for every $(u, v) \in I \times J$, the trace of z on $l(u, v)$ is taken as the system state

Entrato in redazione l'8 Aprile 2004.

corresponding to the values $x = u$, $y = v$ of the parameters. All these traces belong to a functional space of Sobolev type, which does not depend on (u, v).

In this setting, given a point $(a, b) \in I \times J$, we study the controllability of system (E) from a given initial state, to be attained on the variable initial locus $l(a_0, b_0)$, $(a_0, b_0) \in I \times J$, $a_0 \leq a$, $b_0 \leq b$, to an arbitrary final state, to be attained on the fixed final locus $l(a, b)$.

We consider both exact and approximate controllability. We get a characterization of the approximate controllability when the set of the available controls is the unit ball of $L^q(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$, $q \geq p$. Also, assuming a suitable invertibility property for the matrix F, we show a necessary and sufficient condition for the exact controllability when a larger set of available controls is considered. Finally, we study the permanence of both controllability properties with respect to changes of the fixed final locus $l(a, b)$.

1. Introduzione.

Posto, per ogni $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$l(u, v) = ([u, +\infty[\times\{v\}) \cup (\{u\} \times [v, +\infty[)$$

e assegnati due qualsiasi intervalli non degeneri I, J di $\mathbb{R}$, denotiamo con $L_{I,J}$ l'insieme non limitato di $\mathbb{R}^2$

$$L_{I,J} = \bigcup_{(u,v)\in I\times J} l(u, v)$$

e consideriamo il processo di controllo con parametri distribuiti

$$\text{(E)} \qquad z_{xy} + A(x, y)z_x + B(x, y)z_y + C(x, y)z =$$

$$= F(x, y)U(x, y) \quad \text{q.o. } (x, y) \in L_{I,J},$$

dove i coefficienti A, B, C e F verificano le ipotesi:

$$A, B, C, A_x, B_y \in C^0(L_{I,J}, \mathbb{R}^{n,n}) \quad ; \quad F \in L^\infty_{\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^{n,m}) ;$$

il *controllo* U è in $L^p_{\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ e la *risposta* z nello spazio del tipo di Sobolev

$$W^*_{p,\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n) = \Big\{z \in L^p_{\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n) \ : \ z_x, z_y, z_{xy} \in L^p_{\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)\Big\}.$$

Relativamente al processo di controllo (E) assumiamo come *stato* del sistema corrispondente ai valori dei parametri $x = u$, $y = v$, $(u, v) \in I \times J$, la traccia di z su $l(u, v)$. Tale traccia è un elemento dello spazio funzionale

$$\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}} = \left\{(\varphi, \psi) \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times W^{1,p}_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) : \varphi(0) = \psi(0)\right\},$$

anche questo del tipo di Sobolev, indipendente da (u, v).

In precedenti lavori (A. Villani [11], G. Pulvirenti - G. Santagati [4]), supponendo che il controllo U potesse variare in tutto lo spazio $L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$, fissati il *luogo iniziale* $l(a_0, b_0)$ e il *luogo finale* $l(a, b)$, con $(a_0, b_0), (a, b) \in I \times J$ tali che $a_0 < a, b_0 < b$, nei quali il sistema assume, rispettivamente, lo *stato iniziale* e lo *stato finale*, abbiamo stabilito delle condizioni affinché per ogni stato iniziale il corrispondente insieme degli stati finali (*insieme raggiungibile*) sia coincidente con lo spazio $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ (problema della *controllabilità completa esatta*) ovvero sia un insieme ivi denso (problema della *controllabilità completa approssimata*).

In questo lavoro, prendendo lo spunto da un analogo problema di controllabilità per processi a parametri concentrati studiato in R. Conti [1], nn. VI. 4 e VI. 5, supponiamo che il controllo U non possa variare in tutto lo spazio $L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ ma appartenga ad un suo sottoinsieme proprio $\mathcal{U}$, mentre il luogo iniziale $l(a_0, b_0)$ non è più assegnato a priori ma può variare con $(a_0, b_0) \in I \times J$, $a_0 \leq a$, $b_0 \leq b$.

Preliminarmente, precisati gli spazi funzionali utilizzati (n. 2) e studiato un sistema lineare iperbolico (n. 3), diamo una formula di rappresentazione delle soluzioni di (E) (n. 4), a partire dalla quale otteniamo (n. 5) una caratterizzazione dell'insieme raggiungibile (quando il luogo iniziale e quello finale sono entrambi fissati).

Supponendo che il luogo iniziale $l(a_0, b_0)$ possa variare e assumendo come stato iniziale, sul luogo iniziale variabile $l(a_0, b_0)$, un dato elemento (φ_0, ψ_0) di $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$, consideriamo l'insieme, di $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$, unione dei corrispondenti insiemi raggiungibili sul luogo finale assegnato $l(a, b)$ e prendiamo in esame (n. 6) i problemi consistenti nello stabilire quando il predetto insieme coincida con $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ (problema della *controllabilità esatta con luogo iniziale variabile*) oppure sia un sottoinsieme denso di $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ (problema della *controllabilità approssimata con luogo iniziale variabile*).

Relativamente a quest'ultimo problema, nel caso in cui (φ_0, ψ_0) è l'elemento nullo di $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ e $\mathcal{U}$ è la palla unitaria di $L^q(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$, $q \in [p, +\infty]$, riusciamo a stabilire (n. 7), mediante l'uso dell'*aggiunta* di una opportuna applicazione, una condizione necessaria e sufficiente di risolubilità, pervenendo così ad una condizione di controllabilità approssimata, utile quando non si ha a disposizione tutto lo spazio dei controlli ma è possibile considerare gli stati iniziali su un luogo iniziale variabile. La condizione trovata, che nel caso particolare $q = +\infty$ è stata comunicata in G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [7], è analoga alla condizione necessaria e sufficiente di controllabilità completa approssimata, con luogo iniziale $l(a_0, b_0)$ e luogo finale $l(a, b)$ fissati, stabilita in G. Pulvirenti - G. Santagati [4], e si esprime mediante l'integrale di un funzionale costruito a partire dai dati.

Nel n. 8 studiamo il problema della controllabilità esatta con luogo iniziale variabile, rilevando, inizialmente, che tale problema non è mai risolubile se lo stato iniziale (φ_0, ψ_0) e l'insieme dei controlli disponibili $\mathcal{U}$ sono scelti come in precedenza. Considerato, invece, come insieme $\mathcal{U}$ l'insieme delle funzioni $U \in L^p_{\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ la cui restrizione all'insieme $L_{I,J} \cap (]-\infty, a[\times]-\infty, b[)$ appartiene alla palla unitaria del relativo spazio L^q, $q \in [p, +\infty]$, dimostriamo, adottando sulla matrice funzione F opportune ipotesi di invertibilità, una condizione necessaria e sufficiente di risolubilità del problema della controllabilità esatta con luogo iniziale variabile, analoga alla condizione di controllabilità completa esatta, con luogo iniziale $l(a_0, b_0)$ e luogo finale $l(a, b)$ fissati, ottenuta in A. Villani [11]; anche in questo caso la condizione si esprime mediante l'integrale di un funzionale costruito a partire dai dati.

Nel n. 9 ci occupiamo della questione della permanenza, rispetto a "spostamenti" del luogo finale assegnato $l(a, b)$, della controllabilità, sia esatta che approssimata, con luogo iniziale variabile e dimostriamo, sotto ipotesi abbastanza ampie, che entrambi i tipi di controllabilità sono proprietà che permangono al "crescere" dei parametri a e b.

Il n. 10, infine, è un breve paragrafo essenzialmente tecnico, nel quale si prova che un'ipotesi precedentemente adottata per semplificare l'esposizione può essere omessa.

Nel corso del lavoro vari esempi illustrano i risultati ottenuti e ne mostrano applicazioni.

2. Spazi funzionali.

Riportiamo, in questo numero, le definizioni e le principali proprietà degli spazi funzionali che utilizzeremo in seguito; per maggiori dettagli rinviamo al n. 2 di A. Villani [10] ed ai nn. 2 e 3 di G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [5].

Siano, d'ora in poi: p, p' elementi coniugati di $[1, +\infty]$; X un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^d$ avente misura positiva.

Definizione 2.1. $L^p_{\text{loc}}(X, \mathbb{R}^s)$ è lo spazio l.t. ([1]) completo delle [classi di] funzioni misurabili $l : X \to \mathbb{R}^s$ le cui restrizioni ad ogni compatto $K \subseteq X$ appartengono a $L^p(K, \mathbb{R}^s)$, con la famiglia di seminorme

$$\pi_K(l) \;=\; \|l\|_{L^p(K,\mathbb{R}^s)} \quad \forall l \in L^p_{\text{loc}}(X, \mathbb{R}^s),$$

al variare del compatto $K \subseteq X$.

È bene ricordare che (cfr. A. Villani [12]) lo spazio $L^p_{\text{loc}}(X, \mathbb{R}^s)$ risulta metrizzabile, e quindi di Fréchet, se e solo se esiste una successione $\{C_r\}$ di sottoinsiemi compatti di X tale che, per ogni compatto $K \subseteq X$, si abbia $m(K \setminus C_r) = 0$ per qualche $r \in \mathbb{N}$, oppure, più semplicemente, nel caso in cui $\overset{\circ}{X}$ è denso in X, se e solo se $\overline{X} \setminus X$ è un insieme chiuso; quest'ultima circostanza è sempre verificata nei casi considerati nel presente lavoro.

Definizione 2.2. $L^{p'}_c(X, \mathbb{R}^s)$ è lo spazio l.t. delle [classi di] funzioni misurabili $\sigma : X \to \mathbb{R}^s$ che appartengono a $L^{p'}(X, \mathbb{R}^s)$ e sono a supporto compatto in X, con la famiglia di seminorme

$$\pi_Y(\sigma) \;=\; \sup_{l \in Y} \left| \int_X \sigma^*(x) l(x)\, dx \right| \quad \forall \sigma \in L^{p'}_c(X, \mathbb{R}^s),$$

al variare di Y nella famiglia degli insiemi limitati ([2]) di $L^p_{\text{loc}}(X, \mathbb{R}^s)$.

Considerata l'applicazione $\sigma \to l'(\sigma)$, da $L^{p'}_c(X, \mathbb{R}^s)$ in $(L^p_{\text{loc}}(X, \mathbb{R}^s))'$, spazio duale forte di $L^p_{\text{loc}}(X, \mathbb{R}^s)$, definita ponendo

$$< l, l'(\sigma) > = \int_X \sigma^*(x) l(x)\, dx \quad \forall l \in L^p_{\text{loc}}(X, \mathbb{R}^s), \tag{2.1}$$

si ha il

Teorema 2.1. *L'applicazione $\sigma \to l'(\sigma)$, che ad ogni $\sigma \in L^{p'}_c(X, \mathbb{R}^s)$ associa l'elemento $l'(\sigma)$ di $(L^p_{\text{loc}}(X, \mathbb{R}^s))'$ dato dalla* (2.1)*, è un isomorfismo algebrico e topologico tra $L^{p'}_c(X, \mathbb{R}^s)$ e $l'(L^{p'}_c(X, \mathbb{R}^s))$, sottospazio lineare di $(L^p_{\text{loc}}(X, \mathbb{R}^s))'$. Se $p \in [1, +\infty[$ si ha*

$$l'(L^{p'}_c(X, \mathbb{R}^s)) \;=\; (L^p_{\text{loc}}(X, \mathbb{R}^s))'.$$

([1]) cioè lineare topologico, separato e localmente convesso.

([2]) nel senso degli spazi lineari topologici.

Definizione 2.3. Se Ω è un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^2$, $W_p^*(\Omega, \mathbb{R}^n)$ è lo spazio di Banach delle [classi di] funzioni misurabili $w : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tali che $w, w_x, w_y, w_{xy} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (le derivate essendo intese nel senso delle distribuzioni su Ω), con la norma

$$\|w\|_{W_p^*(\Omega,\mathbb{R}^n)} =$$
$$= \left(\|w\|^p_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)} + \|w_x\|^p_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)} + \|w_y\|^p_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)} + \|w_{xy}\|^p_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}},$$
$$p \in [1, +\infty[\,,$$

$$\|w\|_{W_\infty^*(\Omega,\mathbb{R}^n)} =$$
$$= \sup \{\|w\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)}, \|w_x\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)}, \|w_y\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)}, \|w_{xy}\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)}\}.$$

Gli spazi $W_p^*(\Omega, \mathbb{R}^n)$, studiati in R. Di Vincenzo - A. Villani [2] e M. B. Suryanarayana [9], intervengono nella successiva definizione riguardante lo spazio delle soluzioni di (E).

Definizione 2.4. Se I, J sono due intervalli non degeneri di $\mathbb{R}$, $W^*_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ è lo spazio di Fréchet delle [classi di] funzioni misurabili $w : L_{I,J} \to \mathbb{R}^n$ le cui restrizioni ad ogni aperto limitato Ω di $\mathbb{R}^2$ tale che $\overline{\Omega} \subseteq L_{I,J}$ appartengono a $W_p^*(\Omega, \mathbb{R}^n)$, con la famiglia di seminorme

$$\pi_\Omega(w) = \|w\|_{W_p^*(\Omega,\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\, w \in W^*_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)\,,$$

al variare di Ω nella famiglia degli insiemi aperti e limitati di $\mathbb{R}^2$ tali che $\overline{\Omega} \subseteq L_{I,J}$.

È ovvio che gli elementi di $W^*_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ sono tutte e sole le funzioni w tali che $w, w_x, w_y, w_{xy} \in L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ (la derivazione essendo intesa nel senso delle distribuzioni su $\overset{\circ}{L}_{I,J}$). Inoltre, denotato con I^∞ [risp. J^∞] l'unione dell'intervallo I [risp. J] e dell'insieme (eventualmente vuoto) dei suoi maggioranti ed indicato con $\mathcal{S}_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ lo spazio di Fréchet prodotto

$$L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n) \times L^p_{\mathrm{loc}}(I^\infty, \mathbb{R}^n) \times L^p_{\mathrm{loc}}(J^\infty, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n,$$

con ragionamenti analoghi a quelli seguiti in A. Villani [10] (Teorema 2.1 e Proposizione 2.2) si dimostra il seguente

Teorema 2.2. *Fissato un qualunque* $(\overline{a}, \overline{b}) \in I \times J$, *si ha:*

1) *gli elementi di* $W^*_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ *sono tutte e sole le funzioni* w *della forma*

$$w(x, y) = \int_{\overline{a}}^{x} \int_{\overline{b}}^{y} h(u, v)\, du dv + \int_{\overline{a}}^{x} h_1(u) du + \int_{\overline{b}}^{y} h_2(v) dv + \lambda \qquad \forall (x, y) \in L_{I,J}, \tag{2.2}$$

con $(h, h_1, h_2, \lambda) \in \mathcal{S}_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$*;*

2) *la trasformazione lineare* $(h, h_1, h_2, \lambda) \to w$*, data dalla* (2.2)*, è un isomorfismo algebrico e topologico tra* $\mathcal{S}_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ *e* $W^*_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$.

Corollario 2.1. *Si ha:*

$$W^*_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n) \subset C^0(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$$

algebricamente e topologicamente ([3]) .

La continuità delle funzioni $w \in W^*_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ comporta l'esistenza delle loro tracce su ogni insieme $l(u, v)$ con $(u, v) \in I \times J$.

È notevole il fatto che tali tracce possono essere riguardate come elementi di uno stesso spazio funzionale $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ (lo spazio $\tilde{\Xi}^{(n)}_p$ già considerato in precedenti lavori; cfr., ad es., G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [6]) indipendente da (u, v).

Allo scopo di richiamare la definizione ed alcune proprietà di $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$, utili nel seguito, riportiamo, per completezza, la

Definizione 2.5. $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{G}, \mathbb{R}^n)$, G intervallo non degenere di $\mathbb{R}$, è lo spazio di Fréchet delle [classi di] funzioni misurabili $\varphi : \mathrm{G} \to \mathbb{R}^n$ le cui restrizioni ad ogni aperto limitato A tale che $\overline{\mathrm{A}} \subseteq \mathrm{G}$ appartengono allo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\mathrm{A}, \mathbb{R}^n)$, con la famiglia di seminorme

$$\pi_{\mathrm{A}}(\varphi) = \|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathrm{A},\mathbb{R}^n)} \qquad \forall \varphi \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{G}, \mathbb{R}^n),$$

al variare di A nella famiglia degli insiemi aperti e limitati tali che $\overline{\mathrm{A}} \subseteq \mathrm{G}$.

([3]) se $C^0(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ è munito della topologia di $L^\infty_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$.

Analogamente a quanto visto per $W^{*}_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$, gli elementi di $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{G}, \mathbb{R}^n)$ sono tutte e sole le funzioni φ che appartengono a $L^{p}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{G}, \mathbb{R}^n)$ assieme alle derivate prime (nel senso delle distribuzioni su $\overset{\circ}{\mathrm{G}}$) e sussiste il seguente

Teorema 2.3. *Fissato un qualunque* $\bar{t} \in \mathrm{G}$*, si ha:*

1) *gli elementi di* $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{G}, \mathbb{R}^n)$ *sono tutte e sole le funzioni* φ *della forma*

$$\varphi(t) \;=\; \int_{\bar{t}}^{t} k(s)\, ds + \delta \qquad \forall t \in \mathrm{G}, \tag{2.3}$$

con $(k, \delta) \in L^{p}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{G}, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$;

2) *la trasformazione lineare* $(k, \delta) \to \varphi$*, data dalla* (2.3)*, è un isomorfismo algebrico e topologico tra lo spazio di Fréchet prodotto* $L^{p}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{G}, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ *e* $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{G}, \mathbb{R}^n)$.

Dai Teoremi 2.2 e 2.3 discende, ovviamente, il

Corollario 2.2. *Per ogni* $w \in W^{*}_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ *risulta:*

$$w(\,\cdot\,, y) \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(I^{\infty}, \mathbb{R}^n) \quad \forall y \in J \quad , \quad w(x,\,\cdot\,) \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(J^{\infty}, \mathbb{R}^n) \quad \forall x \in I\,.$$

Inoltre, per ogni $y \in J$ [risp. $x \in I$]*, la trasformazione*

$$w \to w(\,\cdot\,, y) \quad [\text{risp. } w \to w(x,\,\cdot\,)\,]$$

è lineare e continua da $W^{*}_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ *su* $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(I^{\infty}, \mathbb{R}^n)$ [risp. $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(J^{\infty}, \mathbb{R}^n)$].

Ovviamente, il Teorema 2.3 assicura che gli elementi di $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{G}, \mathbb{R}^n)$ sono funzioni continue in G. Pertanto ha senso la seguente

Definizione 2.6. $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ è lo spazio di Fréchet

$$\Big\{(\varphi, \psi) \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times W^{1,p}_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) : \varphi(0) \;=\; \psi(0)\Big\}\,,$$

sottospazio lineare chiuso dello spazio di Fréchet prodotto

$$W^{1,p}_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times W^{1,p}_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$$

munito della famiglia di seminorme

$$\pi_{\mathrm{A,B}}(\varphi, \psi) \;=\; \pi_{\mathrm{A}}(\varphi) + \pi_{\mathrm{B}}(\psi)$$
$$\forall (\varphi, \psi) \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times W^{1,p}_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$$

al variare degli aperti limitati A, B $\subset\,]0, +\infty[$.

Dal Teorema 2.3 segue, inoltre, il

Teorema 2.4. *Gli elementi di* $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ *sono tutte e sole le coppie di funzioni* (φ, ψ) *della forma*

$$\varphi(t) = \int_0^t k(s)\,ds + \delta\,, \quad \psi(t) = \int_0^t l(s)\,ds + \delta \quad \forall t \in [0, +\infty[, \tag{2.4}$$

con

$$(k, l, \delta) \in L^p_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L^p_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n;$$

la trasformazione lineare $(k, l, \delta) \to (\varphi, \psi)$*, data dalla* (2.4)*, è un isomorfismo algebrico e topologico tra lo spazio di Fréchet prodotto*

$$L^p_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L^p_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$$

e $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$.

Conseguentemente, poichè l'isomorfismo inverso di $(k, l, \delta) \to (\varphi, \psi)$ è la trasformazione che ad ogni $(\varphi, \psi) \in \Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ fa corrispondere

$$(\varphi', \psi', \varphi(0)) \in L^p_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L^p_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n,$$

si ha, per il Teorema 2.1,

Teorema 2.5. *Se* $p \in [1, +\infty[$*, l'applicazione che ad ogni elemento* (μ, ν, ξ) *dello spazio l.t. prodotto*

$$L^{p'}_c([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L^{p'}_c([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$$

fa corrispondere l'elemento Q *dello spazio* $(\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}})'$*, duale forte di* $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$*, dato da*

$$< (\varphi, \psi), Q > = \int_0^{+\infty} \mu^*(t)\varphi'(t)\,dt + \tag{2.5}$$

$$+ \int_0^{+\infty} \nu^*(t)\psi'(t)\,dt + \xi^*\varphi(0) \quad \forall(\varphi, \psi) \in \Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}\,,$$

è un isomorfismo algebrico e topologico tra $L^{p'}_c([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L^{p'}_c([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ *e* $(\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}})'$.

Di conseguenza (cfr. G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [6]) si ha il

Teorema 2.6. *Se $p \in]1, +\infty[$, lo spazio $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ è riflessivo.*

Al fine di poter considerare le tracce delle funzioni $w \in W^*_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ su $l(u, v)$, $(u, v) \in I \times J$, come elementi dello spazio funzionale $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ osserviamo che, se $(u, v) \in I \times J$, la restrizione di ogni $w \in W^*_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ a $l(u, v)$ individua (Teoremi 2.2 e 2.4) un elemento

$$\gamma_{(u,v)} w = (\varphi_{(u,v),w}, \psi_{(u,v),w})$$

di $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ mediante la posizione

(2.6) $\varphi_{(u,v),w}(t) = w(u + t, v), \quad \psi_{(u,v),w}(t) = w(u, v + t) \quad \forall t \in [0, +\infty[\,.$

Pertanto ha senso la

Definizione 2.7. Per ogni $w \in W^*_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ ed ogni $(u, v) \in I \times J$ dicesi *traccia* di w su $l(u, v)$ l'elemento $\gamma_{(u,v)} w$ di $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ individuato dalla (2.6).

Si ha inoltre il

Teorema 2.7. *Per ogni $(u, v) \in I \times J$, la trasformazione $w \to \gamma_{(u,v)} w$ è lineare e continua da $W^*_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ su $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$.*

3. Esistenza, unicità, dipendenza continua e rappresentazione della soluzione di un problema relativo a un sistema lineare iperbolico.

Fissati gli intervalli non degeneri I, J di $\mathbb{R}$, supponiamo, d'ora in avanti, che

(3.1) $$A, B, C, A_x, B_y \in C^0(L_{I,J}, \mathbb{R}^{n,n})\,.$$

Indichiamo con P l'operatore differenziale, lineare e continuo da $W^*_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ in $L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$, definito ponendo

(3.2) $$Pw = w_{xy} + Aw_x + Bw_y + Cw \quad \forall w \in W^*_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)\,.$$

Assegnato un punto $(\overline{a}, \overline{b}) \in I \times J$ consideriamo il problema

(3.3) $$\begin{cases} w \in W^*_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n), \\ Pw = f, \\ w(\,\cdot\,, \overline{b}) = \sigma, \; w(\overline{a}, \cdot) = \tau, \end{cases}$$

dove i dati f, σ e τ sono tali che: $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$, $\sigma \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(I^\infty, \mathbb{R}^n)$, $\tau \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(J^\infty, \mathbb{R}^n)$, $\sigma(\overline{a}) = \tau(\overline{b})$.

Con procedimento analogo a quello seguito in A. Villani [10], a proposito del problema (3.1) ivi considerato, si dimostra il

Teorema 3.1. *Sia* $(\overline{a}, \overline{b}) \in I \times J$. *Fissato comunque un elemento* $((\sigma, \tau), f)$ *dello spazio di Fréchet prodotto*

$$\Big\{(\sigma,\tau) \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(I^\infty, \mathbb{R}^n) \times W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(J^\infty, \mathbb{R}^n) : \sigma(\overline{a}) = \tau(\overline{b})\Big\} \times L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n) \quad (3.4)$$

([4])

il problema (3.3) *ha una ed una sola soluzione* $w_{(\sigma,\tau),f}$.

L'applicazione

$$((\sigma,\tau), f) \to w_{(\sigma,\tau),f} \quad (3.5)$$

è un isomorfismo algebrico e topologico tra lo spazio (3.4) *e* $W^*_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$.

Osservazione 3.1. Per la validità del Teorema 3.1 le ipotesi (3.1) adottate nel presente lavoro possono essere attenuate; infatti il già menzionato ragionamento seguito in A. Villani [10] richiede soltanto che i coefficienti A, B e C appartengano a $L^\infty_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^{n,n})$; inoltre, ulteriori generalizzazioni sono possibili (cfr. G. Sturiale [8]). Le ipotesi (3.1) consentono però di ottenere anche una formula di rappresentazione delle soluzioni del problema (3.3) mediante una *matrice di evoluzione* costruita a partire dai coefficienti dell'operatore P.

Per definire tale matrice di evoluzione ricordiamo che (cfr. A. Villani [10], Teorema 4.1) si ha il

Teorema 3.2. *Sia* $D = [u', u''] \times [v', v'']$ *un rettangolo chiuso di* $\mathbb{R}^2$ *contenuto in* $L_{I,J}$.

Allora, per ogni $(x, y) \in D$, *esiste una ed una sola funzione* $(u, v) \to V^D(u, v; x, y)$, *da* D *in* $\mathbb{R}^{n,n}$, *continua in* D *insieme con le derivate* V^D_u, V^D_v, V^D_{uv}, *soluzione del problema*

$$\begin{cases} V_{uv} - (VA)_u - (VB)_v + VC = O \quad \forall (u,v) \in D\,, \\ V_u - VB = O \quad v = y,\ \forall u \in [u', u'']\,, \\ V_v - VA = O \quad u = x,\ \forall v \in [v', v'']\,, \\ V(x, y; x, y) = I\,. \end{cases} \quad (3.6)$$

La funzione $(u, v; x, y) \to V^D(u, v; x, y)$, *da* $D \times D$ *in* $\mathbb{R}^{n,n}$, *è continua in* $D \times D$ *insieme con le derivate* V^D_u, V^D_v, V^D_{uv}, V^D_x, V^D_y, V^D_{xy}.

([4]) sottospazio lineare chiuso di

$$W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(I^\infty, \mathbb{R}^n) \times W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(J^\infty, \mathbb{R}^n) \times L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)\,.$$

Evidentemente il Teorema 3.2 implica anche che, se $(x, y) \in L_{I,J}$ e D_1, D_2 sono due qualsiasi rettangoli chiusi tali che

$$(x, y) \in D_1 \cap D_2\,, \quad D_1 \cup D_2 \subseteq L_{I,J}\,,$$

risulta

$$V^{D_1}(u, v; x, y) \;=\; V^{D_2}(u, v; x, y) \qquad \forall (u, v) \in D_1 \cap D_2\,.$$

Pertanto, denotato con $T_{I,J}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$ costituito dai punti $(u, v; x, y)$ per i quali esiste un rettangolo chiuso D di $\mathbb{R}^2$ contenuto in $L_{I,J}$ tale che (u, v), (x, y) appartengano entrambi a D, ha senso la seguente

Definizione 3.1. Si chiama *matrice di evoluzione* associata all'operatore differenziale P la funzione $(u, v; x, y) \to V(u, v; x, y)$, da $T_{I,J}$ in $\mathbb{R}^{n,n}$, che ad ogni $(u, v; x, y)$ fa corrispondere il valore $V^D(u, v; x, y)$, dove D è un qualsiasi rettangolo chiuso di $\mathbb{R}^2$ contenuto in $L_{I,J}$ e contenente entrambi i punti (u, v), (x, y).

Con lo stesso ragionamento del n. 4 di A. Villani [10] si dimostra, allora, il seguente

Teorema 3.3. *Per ogni* $(\overline{a}, \overline{b}) \in I \times J$*, ogni*

$$(\sigma, \tau) \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(I^\infty, \mathbb{R}^n) \times W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(J^\infty, \mathbb{R}^n)\,,$$

tale che $\sigma(\overline{a}) \;=\; \tau(\overline{b})$*, ed ogni* $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$*, l'unica soluzione* $w_{(\sigma,\tau),f}$ *del problema* (3.3) *è data da*

$$\begin{aligned} w_{(\sigma,\tau),f}(x, y) \;=\;& V(\overline{a}, \overline{b}; x, y)\sigma(\overline{a}) + \\ &+ \int_{\overline{a}}^{x} V(u, \overline{b}; x, y)[\sigma'(u) + B(u, \overline{b})\sigma(u)]\, du + \\ &+ \int_{\overline{b}}^{y} V(\overline{a}, v; x, y)[\tau'(v) + A(\overline{a}, v)\tau(v)]\, dv + \\ &+ \int_{\overline{a}}^{x}\int_{\overline{b}}^{y} V(u, v; x, y) f(u, v))\, du dv \qquad \forall (x, y) \in L_{I,J}\,. \end{aligned}$$

4. Soluzioni di (E).

Ferme restando le ipotesi (3.1), supponiamo, d'ora in poi, che

$$F \in L^{\infty}_{\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^{n,m}) .$$

Fissato il luogo iniziale $l(a_0, b_0)$, con $(a_0, b_0) \in I \times J$, lo stato iniziale $(\varphi_0, \psi_0) \in \Xi^{(n)}_{p,\text{loc}}$ e il controllo $U \in L^p_{\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$, dal Teorema 3.1 segue che esistono funzioni z, elementi di $W^*_{p,\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$, soluzioni di (E) verificanti la condizione

$$\gamma_{(a_0,b_0)} z \;=\; (\varphi_0, \psi_0) \, ;$$

esse sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$w_{(\sigma,\tau),FU}$$

dove (σ, τ) è un qualsiasi elemento di $W^{1,p}_{\text{loc}}(I^{\infty}, \mathbb{R}^n) \times W^{1,p}_{\text{loc}}(J^{\infty}, \mathbb{R}^n)$ tale che

$$\sigma(x) \;=\; \varphi_0(x - a_0) \quad \forall x \geq a_0 \, , \quad \tau(y) \;=\; \psi_0(y - b_0) \quad \forall y \geq b_0 \;\; ;$$

pertanto, eccettuato il caso in cui è contemporaneamente $a_0 = \inf I$ e $b_0 = \inf J$, l'insieme di tali funzioni z è infinito.

Tuttavia, se $a_0 < \sup I$ e $b_0 < \sup J$, le restrizioni delle predette funzioni all'insieme

$$L_{I_{a_0}, J_{b_0}} \, ,$$

dove $I_{a_0} = I \cap [a_0, +\infty[$, $J_{b_0} = J \cap [b_0, +\infty[$, coincidono con un unico elemento

$$z(\,\cdot\,; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U) \tag{4.2}$$

dello spazio $W^*_{p,\text{loc}}(L_{I_{a_0}, J_{b_0}}, \mathbb{R}^n)$ e l'applicazione

$$((\varphi_0, \psi_0), U) \to z(\,\cdot\,; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U) \, , \tag{4.3}$$

da $\Xi^{(n)}_{p,\text{loc}} \times L^p_{\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ in $W^*_{p,\text{loc}}(L_{I_{a_0}, J_{b_0}}, \mathbb{R}^n)$, è lineare e continua.

Per il Teorema 3.3 la funzione (4.2) ha la seguente rappresentazione

$$\begin{aligned} z(x, y; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U) \;&=\; \zeta(x, y; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0)) \, + \\ &+ \int_{a_0}^{x} \int_{b_0}^{y} V(u, v; x, y) F(u, v) U(u, v) \, du dv \qquad \forall (x, y) \in L_{I_{a_0}, J_{b_0}} \, , \end{aligned} \tag{4.4}$$

dove V è la matrice di evoluzione associata all'operatore differenziale lineare (3.2) e

$$\zeta(x, y; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0)) = \tag{4.5}$$

$$= V(a_0, b_0; x, y)\varphi_0(0) + \int_{a_0}^{x} V(u, b_0; x, y)[\varphi_0'(u-a_0) + B(u, b_0)\varphi_0(u-a_0)]\, du +$$

$$+ \int_{b_0}^{y} V(a_0, v; x, y)[\psi_0'(v-b_0) + A(a_0, v)\psi_0(v-b_0)]\, dv \qquad \forall (x, y) \in L_{I_{a_0}, J_{b_0}} .$$

Osservazione 4.1. Ovviamente la funzione

$$(x, y) \to \zeta(x, y; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0)) = z(x, y; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), 0) ,$$

$$(x, y) \in L_{I_{a_0}, J_{b_0}} ,$$

è l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} \zeta \in W^*_{p,\mathrm{loc}}(L_{I_{a_0}, J_{b_0}}, \mathbb{R}^n), \\ P\zeta = 0, \\ \gamma_{(a_0,b_0)}\zeta = (\varphi_0, \psi_0) , \end{cases}$$

mentre la funzione

$$(x, y) \to \int_{a_0}^{x} \int_{b_0}^{y} V(u, v; x, y) F(u, v) U(u, v)\, du dv =$$

$$= z(x, y; (a_0, b_0), (0, 0), U) , \quad (x, y) \in L_{I_{a_0}, J_{b_0}} ,$$

è l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} z \in W^*_{p,\mathrm{loc}}(L_{I_{a_0}, J_{b_0}}, \mathbb{R}^n), \\ Pz = FU , \\ \gamma_{(a_0,b_0)} z = (0, 0) . \end{cases}$$

5. Insieme raggiungibile.

Supponiamo adesso che, oltre al luogo iniziale $l(a_0, b_0)$, siano dati anche il luogo finale $l(a, b)$, con $(a, b) \in I \times J$ tale che $a_0 \leq a$, $b_0 \leq b$, e l'insieme $\mathcal{U} \subseteq L^p_{\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ dei controlli disponibili. Supponiamo inoltre, solo allo scopo di semplificare l'esposizione, che sia $a < \sup I$, $b < \sup J$ ([5]) .

Definizione 5.1. Dati $(a_0, b_0), (a, b) \in I \times J$, con $a_0 \leq a$, $b_0 \leq b$, $(\varphi_0, \psi_0) \in \Xi^{(n)}_{p,\text{loc}}$ e $\mathcal{U} \subseteq L^p_{\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$, dicesi *insieme raggiungibile* relativo a $l(a, b)$, a partire dallo stato iniziale (φ_0, ψ_0) su $l(a_0, b_0)$, mediante i controlli $U \in \mathcal{U}$, l'insieme

$$\mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U}) = \{\gamma_{(a,b)} z(\,\cdot\,; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U) \,:\, U \in \mathcal{U}\}$$

degli stati finali su $l(a, b)$ che si ottengono al variare di U in $\mathcal{U}$.

Dalla (4.4) e dall'Osservazione 4.1 segue che

$$\mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U}) =$$

$$= \gamma_{(a,b)} \zeta(\,\cdot\,; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0)) + \Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)} \mathcal{U} \ ,$$

dove $\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}$ è l'applicazione lineare specificata nella seguente

Definizione 5.2. (*L'applicazione* $\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}$). Dati $(a_0, b_0), (a, b) \in I \times J$, con $a_0 \leq a$, $b_0 \leq b$, indichiamo con

$$\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}$$

l'applicazione, da $L^p_{\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ in $\Xi^{(n)}_{p,\text{loc}}$, che ad ogni $U \in L^p_{\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ fa corrispondere l'elemento

$$\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)} U = \gamma_{(a,b)} z(\,\cdot\,; (a_0, b_0), (0, 0), U)$$

di $\Xi^{(n)}_{p,\text{loc}}$.

Per quanto evidenziato nel precedente n. 4 relativamente all'applicazione (4.3), si ha, in particolare, che l'applicazione

$$U \to z(\,\cdot\,; (a_0, b_0), (0, 0), U)$$

è lineare e continua da $L^p_{\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ in $W^*_{p,\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$; dunque, grazie al Teorema 2.7, possiamo concludere che

---

([5]) Rimandiamo al n. 10 per mostrare come questa ipotesi possa essere rimossa.

Proposizione 5.1. *L'applicazione* $\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}$ *è lineare e continua da* $L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ *in* $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$.

Considerata, allora, l'applicazione

$$\Lambda'_{(a_0,b_0),(a,b)} \;:\; \left(\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}\right)' \;\to\; \left(L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)\right)',$$

aggiunta di $\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}$, in virtù di un risultato generale sulla rappresentazione della chiusura convessa di un insieme mediante la sua funzione di appoggio (cfr., ad es. G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [5], Proposizione 5.1), si ha la seguente caratterizzazione dell'insieme $\overline{\mathrm{co}}(\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}\mathcal{U})$.

Teorema 5.1. *Dati* $(a_0, b_0), (a, b) \in I \times J$, *con* $a_0 \le a$, $b_0 \le b$, *e* $\mathcal{U} \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$, *si ha*

$$\overline{\mathrm{co}}(\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}\mathcal{U}) =$$

$$= \Big\{(\chi, \eta) \in \Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}} \;:\; <(\chi, \eta), Q> \;\le$$

$$\le \sup_{U\in\mathcal{U}} <\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}U, Q> \quad \forall Q \in (\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}})'\Big\} =$$

$$= \Big\{(\chi, \eta) \in \Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}} \;:\; <(\chi, \eta), Q> \;\le$$

$$\le \sup_{U\in\mathcal{U}} <U, \Lambda'_{(a_0,b_0),(a,b)}Q> \quad \forall Q \in (\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}})'\Big\}.$$

Nel caso $p \in [1, +\infty[$, identificando (algebricamente e topologicamente) lo spazio duale $\left(\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}\right)'$ con $L^{p'}_c([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L^{p'}_c([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ (Teorema 2.5) e lo spazio duale $\left(L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)\right)'$ con $L^{p'}_c(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ (Teorema 2.1), si può dare una rappresentazione esplicita della trasformazione aggiunta $\Lambda'_{(a_0,b_0),(a,b)}$. Si trova, infatti, per ogni $(\mu, \nu, \xi) \in L^{p'}_c([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L^{p'}_c([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ ed ogni $U \in L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$, utilizzando lo stesso procedimento seguito nel n. 6 di G. Pulvirenti - G. Santagati [4],

$$<U, \Lambda'_{(a_0,b_0),(a,b)}(\mu, \nu, \xi)> \;=\; <\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}U, (\mu, \nu, \xi)> \;=$$

$$= \iint_{L_{I_{a_0}, J_{b_0}}} H^*_{(a,b)}(u, v; (\mu, \nu, \xi))U(u, v)\, du dv\,,$$

dove

$$(u, v) \to H_{(a,b)}(u, v; \mu, \nu, \xi)$$

è la funzione misurabile, da $L_{I,J}$ in $\mathbb{R}^m$, definita nel modo seguente:

$$H^*_{(a,b)}(u, v; (\mu, \nu, \xi)) = \tag{5.1}$$

$$= \begin{cases} \Big\{\xi^* V(u, v; a, b) + \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} [\mu^*(t) V_x(u, v; a+t, b) + \nu^*(t) V_y(u, v; a, b+t)]\, dt \Big\} F(u, v) \\ \qquad\qquad \text{q.o. } (u, v) \in L_{I,J} \cap (]-\infty, a[\times]-\infty, b[), \\ \Big\{\mu^*(u-a) V(u, v; u, b) + \displaystyle\int_{u-a}^{+\infty} \mu^*(t) V_x(u, v; a+t, b)\, dt \Big\} F(u, v) \\ \qquad\qquad \text{q.o. } (u, v) \in L_{I,J} \cap ([a, +\infty[\times]-\infty, b[), \\ \Big\{\nu^*(v-b) V(u, v; a, v) + \displaystyle\int_{v-b}^{+\infty} \nu^*(t) V_y(u, v; a, b+t)\, dt \Big\} F(u, v) \\ \qquad\qquad \text{q.o. } (u, v) \in L_{I,J} \cap (]-\infty, a[\times[b, +\infty[), \\ 0 \qquad\qquad \text{q.o. } (u, v) \in L_{I,J} \cap ([a, +\infty[\times[b, +\infty[). \end{cases}$$

Si verifica facilmente che, per ogni $(a_0, b_0) \in I \times J$, con $a_0 \le a$, $b_0 \le b$, la restrizione di $H_{(a,b)}(\,\cdot\,; (\mu, \nu, \xi))$ a $L_{I_{a_0}, J_{b_0}}$ è un elemento di $L_c^{p'}(L_{I_{a_0}, J_{b_0}}, \mathbb{R}^m)$, quindi la funzione $\mathbf{1}_{L_{I_{a_0}, J_{b_0}}} H_{(a,b)}(\,\cdot\,; (\mu, \nu, \xi))$ ($\mathbf{1}_{L_{I_{a_0}, J_{b_0}}}$ indicatore di $L_{I_{a_0}, J_{b_0}}$) appartiene a $L_c^{p'}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$. Si ha, pertanto, il seguente

Teorema 5.2. *Sia $p \in [1, +\infty[$. Dati $(a_0, b_0), (a, b) \in I \times J$, con $a_0 \le a$, $b_0 \le b$, per ogni $(\mu, \nu, \xi) \in L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ risulta*

$$\Lambda'_{(a_0, b_0), (a,b)}(\mu, \nu, \xi) = \mathbf{1}_{L_{I_{a_0}, J_{b_0}}} H_{(a,b)}(\,\cdot\,; (\mu, \nu, \xi)) .$$

Di conseguenza, dato che, per ogni $(\chi, \eta) \in \Xi^{(n)}_{p,\text{loc}}$ ed ogni

$$(\mu, \nu, \xi) \in L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n ,$$

si ha

$$< (\chi, \eta), (\mu, \nu, \xi) > = \int_0^{+\infty} \mu^*(t) \chi'(t)\, dt + \int_0^{+\infty} \nu^*(t) \eta'(t)\, dt + \xi^* \chi(0) ,$$

sussiste il

Teorema 5.3. *Sia* $p \in [1, +\infty[$. *Dati* $(a_0, b_0), (a, b) \in I \times J$, *con* $a_0 \leq a$, $b_0 \leq b$, *e* $\mathcal{U} \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$, *si ha*

$$\overline{\mathrm{co}}(\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}\mathcal{U}) =$$

$$= \Big\{(\chi, \eta) \in \Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}} : \int_0^{+\infty} \mu^*(t)\chi'(t)\,dt + \int_0^{+\infty} \nu^*(t)\eta'(t)\,dt + \xi^*\chi(0) \leq$$

$$\leq \sup_{U \in \mathcal{U}} \iint_{L_{I_{a_0}, J_{b_0}}} H^*_{(a,b)}(u, v; (\mu, \nu, \xi))U(u, v)\,du dv$$

$$\forall (\mu, \nu, \xi) \in L^{p'}_c([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L^{p'}_c([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \Big\} .$$

6. Problemi di controllo con luogo iniziale variabile.

Fissati il luogo finale $l(a, b)$, con $(a, b) \in I \times J$, lo stato iniziale $(\varphi_0, \psi_0) \in \Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ e l'insieme dei controlli $\mathcal{U} \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$, consideriamo, relativamente al processo di controllo (E), i seguenti due problemi di controllo con luogo iniziale $l(a_0, b_0)$ variabile.

Problema 6.1. (*Controllabilità esatta con luogo iniziale variabile.*)
Siano dati $(a, b) \in I \times J$, $(\varphi_0, \psi_0) \in \Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ e $\mathcal{U} \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$. Per ogni $(\chi, \eta) \in \Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ trovare $(a_0, b_0) \in I \times J$, $a_0 \leq a$, $b_0 \leq b$, e $U \in \mathcal{U}$ tali che

$$\gamma_{(a,b)} z(\,\cdot\,; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U) = (\chi, \eta) .$$

Ovviamente si ha la

Proposizione 6.1. *Il* Problema 6.1 *ha soluzione se e solo se*

$$\bigcup_{\substack{(a_0,b_0) \in I \times J \\ a_0 \leq a, b_0 \leq b}} \mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U}) = \Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}} . \tag{6.1}$$

È altresì ovvio che per la validità della (6.1) è sufficiente che esista $(a_0, b_0) \in I \times J$, $a_0 \leq a$, $b_0 \leq b$, tale che

$$\mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U}) = \Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}} , \tag{6.2}$$

mentre il seguente esempio mostra che questa condizione non è, però, necessaria.

Esempio 6.1. Siano $I = J = \mathbb{R}$; $n = m = 1$; $A = B = C = 0$ (quindi $V(u, v; x, y) = 1$ in $\mathbb{R}^4$); $F = 1$; cioè consideriamo il processo di controllo scalare

$$z_{xy} = U(x, y) \qquad \text{q.o. } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ . \tag{6.3}$$

Siano, inoltre, $(a, b) = (0, 0)$, $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$ l'elemento nullo di $\Xi^{(1)}_{p,\mathrm{loc}}$ e

$$\mathcal{U} = \{U \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2) : |U(x, y)| \leq 1 \text{ q.o.}(x, y) \in]-\infty, 0[\times]-\infty, 0[\}. \tag{6.4}$$

Dimostriamo che il Problema 6.1 ha soluzione.

Fissato $(\overline{\chi}, \overline{\eta}) \in \Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$, scegliamo $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$, $a_0 < 0$, $b_0 < 0$, tale che $a_0 b_0 \geq |\overline{\chi}(0)|$.

Ricordato che, per ogni $U \in \mathcal{U}$, si ha

$$z(x, y; (a_0, b_0), (0, 0), U) = \int_{a_0}^{x} \int_{b_0}^{y} U(u, v)\, du dv$$

$$\forall\ (x, y) \in [a_0, +\infty[\times[b_0, +\infty[$$

e posto, per brevità,

$$\gamma_{(0,0)} z(\,\cdot\,; (a_0, b_0), (0, 0), U) = (\varphi, \psi)\ , \tag{6.5}$$

vale a dire

$$\varphi(t) = \int_{a_0}^{t} \int_{b_0}^{0} U(u, v)\, du dv \quad \forall t \in [0, +\infty[\ , \tag{6.6}$$

$$\psi(t) = \int_{a_0}^{0} \int_{b_0}^{t} U(u, v)\, du dv \quad \forall t \in [0, +\infty[\ , \tag{6.7}$$

osserviamo che, se si fissa $U \in \mathcal{U}$ in modo che

$$U(x, y) = \frac{\overline{\chi}(0)}{a_0 b_0} \quad \text{q.o. } (x, y) \in [a_0, 0[\times[b_0, 0[\tag{6.8}$$

(ciò che è possibile in quanto $\left|\frac{\overline{\chi}(0)}{a_0 b_0}\right| \leq 1$), risulta $\varphi(0) = \overline{\chi}(0)$, $\psi(0) = \overline{\eta}(0)$.

Pertanto, al fine di avere $\varphi = \overline{\chi}$, è sufficiente che sia $\varphi' = \overline{\chi}'$, cioè

$$(6.9) \qquad \int_{b_0}^{0} U(t, v)\, dv \;=\; \overline{\chi}'(t) \qquad \text{q.o. } t \in [0, +\infty[\;.$$

Per la validità della (6.9) basta scegliere $U \in \mathcal{U}$ in modo che si abbia

$$(6.10) \qquad U(x, y) \;=\; -\frac{\overline{\chi}'(x)}{b_0} \qquad \text{q.o. } (x, y) \in [0, +\infty[\times[b_0, 0[\;.$$

Analogamente, per ottenere che sia pure $\psi' = \overline{\eta}'$, è sufficiente prendere $U \in \mathcal{U}$ in modo che si abbia

$$(6.11) \qquad U(x, y) \;=\; -\frac{\overline{\eta}'(y)}{a_0} \qquad \text{q.o. } (x, y) \in [a_0, 0[\times[0, +\infty[\;.$$

In definitiva, scegliendo, come è possibile, $U \in \mathcal{U}$ tale che siano verificate le (6.8), (6.10) e (6.11), risulta $(\varphi, \psi) = (\overline{\chi}, \overline{\eta})$.

Infine, per verificare che non esiste alcun punto $(a_0, b_0) \in\,]-\infty, 0]\times]-\infty, 0]$ per il quale sia valida la (6.2), basta osservare che, se (a_0, b_0) è un arbitrario punto di $]-\infty, 0]\times]-\infty, 0]$, dalle (6.4) e (6.6) si ricava

$$|\varphi(0)| \;\le\; a_0 b_0 \qquad \forall (\varphi, \psi) \in \mathcal{A}((a_0, b_0), (0, 0); (0, 0), \mathcal{U})$$

e quindi $\mathcal{A}((a_0, b_0), (0, 0); (0, 0), \mathcal{U}) \neq \Xi^{(1)}_{p,\mathrm{loc}}$.

Com'è usuale per i processi di controllo con parametri distribuiti, in cui lo spazio degli stati è ad infinite dimensioni, è importante considerare, oltre al problema di tipo esatto, anche la corrispondente versione approssimata.

Problema 6.2. (*Controllabilità approssimata con luogo iniziale variabile.*)
Siano dati $(a, b) \in I \times J$, $(\varphi_0, \psi_0) \in \Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ e $\mathcal{U} \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$. Per ogni $(\chi, \eta) \in \Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$, ogni seminorma $\pi_{\mathrm{A,B}}$ su $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ ed ogni $\varepsilon > 0$ trovare $(a_0, b_0) \in I \times J$, $a_0 \le a$, $b_0 \le b$, e $U \in \mathcal{U}$ tali che

$$\pi_{\mathrm{A,B}}(\gamma_{(a,b)} z(\,\cdot\,; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U) \;-\; (\chi, \eta)) \;<\; \varepsilon \;.$$

Data la natura delle seminorme $\pi_{\mathrm{A,B}}$ la richiesta del Problema 6.2 è quella di trovare, per ogni elemento (χ, η) dello spazio $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ ed ogni intorno $\mathcal{O}$ di (χ, η), un punto $(a_0, b_0) \in I \times J$, $a_0 \le a$, $b_0 \le b$, ed un controllo $U \in \mathcal{U}$ tali che

$$\gamma_{(a,b)} z(\,\cdot\,; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U) \;\in\; \mathcal{O} \;;$$

dunque si ha la

Proposizione 6.2. *Il* Problema 6.2 *ha soluzione se e solo se l'insieme*

$$\bigcup_{\substack{(a_0,b_0)\in I\times J\\ a_0\le a,b_0\le b}} \mathcal{A}((a_0,b_0),(a,b);(\varphi_0,\psi_0),\mathcal{U})$$

è denso in $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$.

Naturalmente, la risolubilità del Problema 6.1 implica la risolubilità del Problema 6.2. Il successivo esempio mostra che non è vero il viceversa.

Esempio 6.2. Consideriamo lo stesso processo di controllo scalare (6.3) dell'Esempio 6.1 e siano, ancora, $(a,b)=(0,0)$, $(\varphi_0,\psi_0)=(0,0)$, mentre l'insieme dei controlli disponibili è

$$\mathcal{U} \;=\; \{U\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\;:\;|U(x,y)|\le 1\quad \text{q.o. } (x,y)\in\mathbb{R}^2\}\;. \tag{6.12}$$

Dimostriamo che il Problema 6.1 non ha soluzione. A tale scopo basta osservare che, per ogni $(a_0,b_0)\in\;]-\infty,0]\times]-\infty,0]$ ed ogni ogni $(\varphi,\psi)\in\mathcal{A}((a_0,b_0),(0,0);(0,0),\mathcal{U})$, dalle (6.6) e (6.12) si ottiene

$$|\varphi'(t)| \;\le\; \left|\int_{b_0}^{0}|U(t,v)|\,dv\right| \;\le\; |b_0|t \qquad\qquad \text{q.o. } t\in[0,+\infty[\tag{6.13}$$

e, conseguentemente,

$$\bigcup_{a_0\le 0,b_0\le 0} \mathcal{A}((a_0,b_0),(0,0);(0,0),\mathcal{U})\neq \Xi^{(1)}_{p,\mathrm{loc}}\;.$$

Dimostriamo adesso che il Problema 6.2 ha soluzione. Fissiamo un elemento $(\overline{\chi},\overline{\eta})\in\Xi^{(1)}_{p,\mathrm{loc}}$, una seminorma $\pi_{\mathrm{A,B}}$ su $\Xi^{(1)}_{p,\mathrm{loc}}$, un numero $\varepsilon>0$ ed osserviamo che non è restrittivo supporre che sia

$$\mathrm{A}\;=\,]0,t_1[\;\;,\;\;\mathrm{B}\;=\,]0,t_2[\;.$$

Denotato con ρ un arbitrario numero positivo, siano $\alpha,\beta\in L^\infty(]0,+\infty[)$ due funzioni tali che

$$\|\alpha-\overline{\chi}'\|_{L^p(]0,t_1[)}<\rho \quad,\qquad \alpha(t)\;=\;0 \qquad \text{q.o. } t\;\ge\;t_1\;,$$

$$\|\beta-\overline{\eta}'\|_{L^p(]0,t_2[)}<\rho \quad,\qquad \beta(t)\;=\;0 \qquad \text{q.o. } t\;\ge\;t_2\;,$$

ed indichiamo con (χ_1, η_1) l'elemento di $\Xi^{(1)}_{p,\mathrm{loc}}$ definito nel modo seguente:

$$\chi_1(t) \;=\; \overline{\chi}(0) + \int_0^t \alpha(s)\,ds \qquad \forall t \in [0, +\infty[\ ,$$

$$\eta_1(t) \;=\; \overline{\chi}(0) + \int_0^t \beta(s)\,ds \qquad \forall t \in [0, +\infty[\ .$$

A questo punto fissiamo $(a_0, b_0) \in\ ]-\infty, 0[\times]-\infty, 0[$ in modo che

$$a_0 b_0 \;\geq\; |\overline{\chi}(0)|\ ,$$

$$|a_0| \;\geq\; |\beta(t)| \text{ q.o. } t \in]0, +\infty[\ ,\quad |b_0| \;\geq\; |\alpha(t)| \text{ q.o. } t \in]0, +\infty[$$

ed osserviamo che, scegliendo il controllo $U \in \mathcal{U}$ in modo da aversi

$$U(x, y) \;=\; \frac{\overline{\chi}(0)}{a_0 b_0} \qquad \text{q.o. } (x, y) \in [a_0, 0[\times[b_0, 0[\ ,$$

$$U(x, y) \;=\; -\frac{\alpha(x)}{b_0} \qquad \text{q.o. } (x, y) \in [0, +\infty[\times[b_0, 0[\ ,$$

$$U(x, y) \;=\; -\frac{\beta(y)}{a_0} \qquad \text{q.o. } (x, y) \in [a_0, 0[\times[0, +\infty[\ ,$$

risulta, con le stesse notazioni (6.5), (6.6) e (6.7) dell'Esempio 6.1,

$$(\varphi, \psi) \;=\; (\chi_1, \eta_1)\ .$$

Denotata con $k_{\mathrm{A,B}}$ una costante tale da aversi

$$\pi_{\mathrm{A,B}}(\chi, \eta) \;\leq\; k_{\mathrm{A,B}}\Big(|\chi(0)| + \|\chi'\|_{L^p(\mathrm{A})} + \|\eta'\|_{L^p(\mathrm{B})}\Big) \quad \forall (\chi, \eta) \in \Xi^{(1)}_{p,\mathrm{loc}}\ ,$$

si ha allora

$$\pi_{\mathrm{A,B}}\big(\gamma_{(0,0)} z(\,\cdot\,; (a_0, b_0), (0,0), U) - (\overline{\chi}, \overline{\eta})\big) \;=\; \pi_{\mathrm{A,B}}((\chi_1, \eta_1) - (\overline{\chi}, \overline{\eta})) \leq$$

$$\leq\; k_{\mathrm{A,B}}\Big(\|\alpha - \overline{\chi}'\|_{L^p(\mathrm{A})} + \|\beta - \overline{\eta}'\|_{L^p(\mathrm{B})}\Big) \;<\; 2\rho k_{\mathrm{A,B}}\ ,$$

da cui, scegliendo $\rho > 0$ in modo che $2\rho k_{\mathrm{A,B}} < \varepsilon$, si ottiene la tesi.

Osservazione 6.1. Analogamente a quanto osservato relativamente al Problema 6.1, una ovvia condizione sufficiente per la risolubilità del Problema 6.2 è che esista $(a_0, b_0) \in I \times J$, $a_0 \leq a$, $b_0 \leq b$, tale che $\mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U})$ sia denso in $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$; tale condizione non è, però, necessaria, come si evince, per la (6.13), anche dal precedente Esempio 6.2.

7. Sulla risolubilità del Problema 6.2.

In questo n. 7 stabiliamo una condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità del Problema 6.2 nel caso in cui (φ_0, ψ_0) è l'elemento nullo di $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ e $\mathcal{U}$ è la palla unitaria di $L^q(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ con $q \in [p, +\infty]$. Tale condizione si esprime mediante il funzionale

$$(\mu, \nu, \xi) \ \to \ H_{(a,b)}(\,\cdot\,; (\mu, \nu, \xi)) \ ,$$

dato dalla (5.1).

È interessante osservare che la condizione, similmente a quanto avviene per i processi di controllo con parametri concentrati (si vedano in proposito i Teoremi II.2.1 e VI.5.1 di R. Conti [1]) è analoga alla condizione necessaria e sufficiente di completa approssimata controllabilità con luogo iniziale $l(a_0, b_0)$ e luogo finale $l(a, b)$ fissati, stabilita in G. Pulvirenti - G. Santagati [4], Teorema 6.1.

Teorema 7.1. *Sia* $1 < p < +\infty$. *Siano inoltre:* $(a, b) \in I \times J$, $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$ *l'elemento nullo di* $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ *e*

$$\mathcal{U} \ = \ \mathcal{U}_q \ = \ \{U \in L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m) \ : \ \|U\|_{L^q(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)} \leq 1\}$$

con $q \in [p, +\infty]$.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il Problema 6.2 *abbia soluzione è che risulti*

$$\iint_{L_{I,J}} |H_{(a,b)}(u, v; (\mu, \nu, \xi))|^{q'} \, du dv \ = \ +\infty \tag{7.1}$$

$$\forall (\mu, \nu, \xi) \in L^{p'}_c([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L^{p'}_c([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ ,$$

essendo q' *l'esponente coniugato di* q.

Dimostrazione. La condizione è necessaria. Supponiamo che il Problema 6.2 abbia soluzione e, per assurdo, esista $(\overline{\mu}, \overline{\nu}, \overline{\xi}) \in L^{p'}_c([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L^{p'}_c([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tale che

$$\iint_{L_{I,J}} |H_{(a,b)}(u, v; (\overline{\mu}, \overline{\nu}, \overline{\xi}))|^{q'} \, du dv \ = \ k \ < \ +\infty \ .$$

Per la continuità del funzionale lineare $(\overline{\mu}, \overline{\nu}, \overline{\xi})$ e per la natura delle seminorme su $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ esistono una seminorma π su $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ ed una costante positiva c tali che

$$| < (\chi, \eta), (\overline{\mu}, \overline{\nu}, \overline{\xi}) > | \ \leq \ c\pi(\chi, \eta) \qquad \forall (\chi, \eta) \in \Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}} \ .$$

Sia $r > 0$. Poichè $(\overline{\mu}, \overline{\nu}, \overline{\xi})$ è un funzionale lineare non nullo su $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$, esiste $(\overline{\chi}, \overline{\eta}) \in \Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ tale che

$$< (\overline{\chi}, \overline{\eta}), (\overline{\mu}, \overline{\nu}, \overline{\xi}) >> r + k^{\frac{1}{q'}} \ . \tag{7.2}$$

Poichè il Problema 6.2 ha soluzione, in corrispondenza dell'elemento $(\overline{\chi}, \overline{\eta}) \in \Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$, della seminorma π e del numero positivo $\frac{r}{c}$, esistono un punto $(a_0, b_0) \in I \times J$, $a_0 \leq a$, $b_0 \leq b$, ed un elemento (χ, η) dell'insieme raggiungibile

$$\mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (0, 0), \mathcal{U}_q) = \Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)} \, \mathcal{U}_q$$

tali che

$$\pi((\chi, \eta) - (\overline{\chi}, \overline{\eta})) < \frac{r}{c} \ .$$

Si ha allora, per il Teorema 5.3,

$$< (\overline{\chi}, \overline{\eta}), (\overline{\mu}, \overline{\nu}, \overline{\xi}) > =$$

$$= < (\overline{\chi}, \overline{\eta}) - (\chi, \eta), (\overline{\mu}, \overline{\nu}, \overline{\xi}) > + < (\chi, \eta), (\overline{\mu}, \overline{\nu}, \overline{\xi}) > \leq$$

$$\leq c\pi((\overline{\chi}, \overline{\eta}) - (\chi, \eta)) + \sup_{U \in \mathcal{U}_q} \iint_{L_{I_{a_0}, J_{b_0}}} H^*_{(a,b)}(u, v; (\overline{\mu}, \overline{\nu}, \overline{\xi})) U(u, v) \, du dv <$$

$$< r + \left(\iint_{L_{I_{a_0}, J_{b_0}}} |H^*_{(a,b)}(u, v; (\overline{\mu}, \overline{\nu}, \overline{\xi}))|^{q'} \, du dv \right)^{\frac{1}{q'}} \leq$$

$$\leq r + \left(\iint_{L_{I,J}} |H^*_{(a,b)}(u, v; (\overline{\mu}, \overline{\nu}, \overline{\xi}))|^{q'} \, du dv \right)^{\frac{1}{q'}} = r + k^{\frac{1}{q'}} \ ,$$

ciò che contraddice la (7.2).

La condizione è sufficiente.

Supponiamo che sia verificata la condizione (7.1) e, per assurdo, il Problema 6.2 non abbia soluzione, cioè esista un elemento $(\overline{\chi}, \overline{\eta}) \in \Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ tale che

$$(\overline{\chi}, \overline{\eta}) \notin \overline{\bigcup_{\substack{(a_0,b_0) \in I \times J \\ a_0 \leq a, b_0 \leq b}} \Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)} \, \mathcal{U}_q} \ . \tag{7.3}$$

Osserviamo che, essendo $\mathcal{U}_q$ un insieme convesso e $\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}$ un'applicazione lineare, ciascuno degli insiemi $\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}\mathcal{U}_q$, $(a_0, b_0) \in I \times J$, $a_0 \le a$, $b_0 \le b$, è convesso.

Osserviamo, inoltre, che da (a_0', b_0'), $(a_0'', b_0'') \in I \times J$, $a_0' \le a_0'' \le a$, $b_0' \le b_0'' \le b$, segue

$$\Lambda_{(a_0',b_0'),(a,b)}\,\mathcal{U}_q \supseteq \Lambda_{(a_0'',b_0''),(a,b)}\mathcal{U}_q \ ;$$

infatti, se $(\chi, \eta) \in \Lambda_{(a_0'',b_0''),(a,b)}\mathcal{U}_q$, cioè se esiste $U'' \in \mathcal{U}_q$ tale che

$$(\chi, \eta) = \gamma_{(a,b)} z(\,\cdot\,; (a_0'', b_0''), (0, 0), U'') \,,$$

allora, posto

$$U'(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{q.o. } (x, y) \in L_{I,J} \setminus L_{I_{a_0''}, J_{b_0''}} \,, \\ U''(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in L_{I_{a_0''}, J_{b_0''}} \,, \end{cases}$$

si ha $U' \in \mathcal{U}_q$ e risulta

$$z(x, y; (a_0', b_0'), (0, 0), U') = \begin{cases} 0 & \forall (x, y) \in L_{I_{a_0'}, J_{b_0'}} \setminus L_{I_{a_0''}, J_{b_0''}} \,, \\ z(x, y; (a_0'', b_0''), (0, 0), U'') & \\ \qquad\qquad \forall (x, y) \in L_{I_{a_0''}, J_{b_0''}} \,, \end{cases}$$

dunque

$$(\chi, \eta) = \gamma_{(a,b)} z(\,\cdot\,; (a_0', b_0'), (0, 0), U') \in \Lambda_{(a_0',b_0'),(a,b)}\mathcal{U}_q \,.$$

Dalle precedenti osservazioni segue facilmente che l'unione

$$\bigcup_{\substack{(a_0,b_0)\in I\times J \\ a_0\le a,\, b_0\le b}} \Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}\mathcal{U}_q$$

e, quindi, anche la sua chiusura sono insiemi convessi.

Dalla (7.3), per il teorema di separazione in senso stretto (N. Dunford - J. T. Schwartz [3], Theorem V. 2.10), segue l'esistenza di

$$(\overline{\mu}, \overline{\nu}, \overline{\xi}) \in L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

tale che

$$(7.4)\qquad <(\chi,\eta),(\overline{\mu},\overline{\nu},\overline{\xi})> \;<\; <(\overline{\chi},\overline{\eta}),(\overline{\mu},\overline{\nu},\overline{\xi})>$$

$$\forall(\chi,\eta)\in\overline{\bigcup_{\substack{(a_0,b_0)\in I\times J\\ a_0\leq a,\, b_0\leq b}}\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}\,\mathcal{U}_q}\,.$$

D'altra parte, come verificheremo subito dopo, per ogni $(a_0, b_0)\in I\times J$, $a_0\leq a$, $b_0\leq b$, esiste $(\chi_0,\eta_0)\in\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}\,\mathcal{U}_q$ per cui risulta
(7.5)

$$<(\chi_0,\eta_0),(\overline{\mu},\overline{\nu},\overline{\xi})> \;=\; \left(\iint_{L_{I_{a_0},J_{b_0}}}|H_{(a,b)}(u,v;(\overline{\mu},\overline{\nu},\overline{\xi}))|^{q'}\,du\,dv\right)^{\frac{1}{q'}}$$

e quindi, per la (7.4),

$$\left(\iint_{L_{I_{a_0},J_{b_0}}}|H_{(a,b)}(u,v;(\overline{\mu},\overline{\nu},\overline{\xi}))|^{q'}\,du\,dv\right)^{\frac{1}{q'}} \;<\; <(\overline{\chi},\overline{\eta}),(\overline{\mu},\overline{\nu},\overline{\xi})>\,;$$

conseguentemente si ha, per l'arbitrarietà di (a_0, b_0),

$$\iint_{L_{I,J}}|H_{(a,b)}(u,v;(\overline{\mu},\overline{\nu},\overline{\xi}))|^{q'}\,du\,dv \;\leq\; \Big(<(\overline{\chi},\overline{\eta}),(\overline{\mu},\overline{\nu},\overline{\xi})>\Big)^{q'}\,,$$

ma ciò contraddice la (7.1).

Verifichiamo, infine, la validità della (7.5). Si ha

$$\left(\iint_{L_{I_{a_0},J_{b_0}}}|H_{(a,b)}(u,v;(\overline{\mu},\overline{\nu},\overline{\xi}))|^{q'}\,du\,dv\right)^{\frac{1}{q'}} = \left\|H_{(a,b)}(\,\cdot\,;(\overline{\mu},\overline{\nu},\overline{\xi}))\right\|_{L^{q'}(L_{I_{a_0},J_{b_0}},\mathbb{R}^m)} =$$

$$= \sup_{\substack{\tilde{U}\in L^q(L_{I_{a_0},J_{b_0}},\mathbb{R}^m)\\ \|\tilde{U}\|_{L^q(L_{I_{a_0},J_{b_0}},\mathbb{R}^m)}\leq 1}} \iint_{L_{I_{a_0},J_{b_0}}} H^*_{(a,b)}(u,v;(\overline{\mu},\overline{\nu},\overline{\xi}))\tilde{U}(u,v)\,du\,dv =$$

$$= \sup_{U\in\mathcal{U}_q}\iint_{L_{I_{a_0},J_{b_0}}} H^*_{(a,b)}(u,v;(\overline{\mu},\overline{\nu},\overline{\xi}))U(u,v)\,du\,dv =$$

$$= \sup_{U\in\mathcal{U}_q}\iint_{L_{I,J}} \mathbf{1}_{I_{a_0},J_{b_0}}(u,v)H^*_{(a,b)}(u,v;(\overline{\mu},\overline{\nu},\overline{\xi}))U(u,v)\,du\,dv$$

e quindi, per il Teorema 5.2,

$$\left(\iint_{L_{I_{a_0}, J_{b_0}}} |H_{(a,b)}(u, v; (\overline{\mu}, \overline{\nu}, \overline{\xi}))|^{q'} \, dudv \right)^{\frac{1}{q'}} =$$

$$= \sup_{U \in \mathcal{U}_q} < U, \Lambda'_{(a_0,b_0),(a,b)}(\overline{\mu}, \overline{\nu}, \overline{\xi}) > = \sup_{U \in \mathcal{U}_q} < \Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)} U, (\overline{\mu}, \overline{\nu}, \overline{\xi}) > .$$

D'altra parte l'insieme $\mathcal{U}_q \subseteq L^p_{\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ è chiuso, convesso e limitato e, quindi, anche debolmente chiuso; di conseguenza, dato che $1 < p < +\infty$, $\mathcal{U}_q$ risulta debolmente compatto (G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [5], Proposizione 2.6), pertanto anche $\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}\mathcal{U}_q$ è debolmente compatto. Ne segue che il funzionale lineare e [debolmente] continuo $(\overline{\mu}, \overline{\nu}, \overline{\xi})$ è dotato di massimo nell'insieme $\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}\mathcal{U}_q$, vale a dire esiste $(\chi_0, \eta_0) \in \Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}\mathcal{U}_q$ tale che

$$\sup_{U \in \mathcal{U}_q} < \Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)} U, (\overline{\mu}, \overline{\nu}, \overline{\xi}) > = < (\chi_0, \eta_0), (\overline{\mu}, \overline{\nu}, \overline{\xi}) >$$

e quindi vale la (7.5).

Per i processi di controllo scalari del tipo

$$z_{xy} = F(x, y)U(x, y) \qquad \text{q.o. } (x, y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

già considerati in precedenti lavori (G. Pulvirenti - G. Santagati [4]; G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [5], [6]) e negli Esempi 6.1 e 6.2, il teorema precedente acquista una formulazione che lo rende più facilmente utilizzabile nelle applicazioni. Si ha, infatti, in proposito il seguente

Corollario 7.1. *Siano* $I = J = \mathbb{R}$*;* $n = m = 1$*;* $A = B = C = 0$*. Supponiamo, inoltre,* $1 < p < +\infty$*.*

Dati $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*,* $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$ *elemento nullo di* $\Xi^{(1)}_{p,\text{loc}}$ *e*

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_q = \{U \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2) : \|U\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq 1\}$$

con $q \in [p, +\infty]$*, il* Problema 6.2 *ha soluzione se e solo se valgono le condizioni*

(7.6) $$\int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} |F(u, v)|^{q'} \, dudv = +\infty ,$$

(7.7) $$\int_{-\infty}^{b} |F(u, v)|^{q'} \, dv = +\infty \qquad \text{q.o. } u \geq a ,$$

(7.8) $$\int_{-\infty}^{a} |F(u, v)|^{q'} \, du = +\infty \qquad \text{q.o. } v \geq b ,$$

dove q' *è l'esponente coniugato di* q*.*

Dimostrazione. Si ha $V(u, v; x, y) = 1$ in $\mathbb{R}^4$ e pertanto, per ogni $(\mu, \nu, \xi) \in L_c^{p'}([0, +\infty[) \times L_c^{p'}([0, +\infty[) \times \mathbb{R}$, risulta

$$H_{(a,b)}(u, v; (\mu, \nu, \xi)) = \begin{cases} \xi F(u, v) \\ \qquad \text{q.o. } (u, v) \in]-\infty, a[\times]-\infty, b[\,, \\[1ex] \mu(u-a)F(u, v) \\ \qquad \text{q.o. } (u, v) \in [a, +\infty[\times]-\infty, b[\,, \\[1ex] \nu(v-b)F(u, v) \\ \qquad \text{q.o. } (u, v) \in]-\infty, a[\times[b, +\infty[\,, \\[1ex] 0 \qquad \text{q.o. } (u, v) \in [a, +\infty[\times[b, \infty[\,. \end{cases}$$

Supponiamo che il Problema 6.2 abbia soluzione. Dalla (7.1), prendendo $(\mu, \nu, \xi) = (0, 0, 1)$, si ottiene subito la (7.6). Prendendo, invece, $(\mu, \nu, \xi) = (\mathbf{1}_T, 0, 0)$, dove T è un arbitrario sottoinsieme limitato e misurabile di $[0, +\infty[$, con $m(T) > 0$, si ottiene

$$\int_T \int_{-\infty}^{b} |F(a+t, v)|^{q'} \, dt dv = +\infty \,,$$

da cui, per l'arbitrarietà di T, con un facile ragionamento per assurdo si deduce la (7.7). Analogamente si prova la (7.8).

Viceversa, siano verificate le (7.6), (7.7), (7.8) e sia (μ, ν, ξ) un arbitrario elemento non nullo di $L_c^{p'}([0, +\infty[) \times L_c^{p'}([0, +\infty[) \times \mathbb{R}$.

Se $\xi \neq 0$, dalla (7.6) si ottiene

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |H_{(a,b)}(u, v; (\mu, \nu, \xi))|^{q'} \, du dv \;\geq\; \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} |\xi F(u, v)|^{q'} \, du dv \;=\; +\infty.$$

Se $\mu \neq 0$, cioè $\mu(t) \neq 0$ in un insieme $T \subseteq [0, +\infty[$ di misura positiva, dalla (7.7) si ricava

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |H_{(a,b)}(u, v; (\mu, \nu, \xi))|^{q'} \, du dv \;\geq\; \int_{a}^{+\infty} \int_{-\infty}^{b} |\mu(u-a)F(u, v)|^{q'} \, du dv \;\geq$$

$$\geq\; \int_{a+T} \Big[\, |\mu(u-a)|^{q'} \int_{-\infty}^{b} |F(u, v)|^{q'} \, dv \Big] du \;=\; +\infty\,.$$

Analogamente, se $\nu \neq 0$, la (7.8) implica che

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |H_{(a,b)}(u, v; (\mu, \nu, \xi))|^{q'} \, du dv \;=\; +\infty\,.$$

Pertanto, in ogni caso, è verificata la (7.1), cioè il Problema 6.2 ha soluzione.

Osservazione 7.1. La risolubilità del Problema 6.2 nel caso dell'Esempio 6.2, che abbiamo già dimostrato direttamente, discende anche, limitatamente al caso $1 < p < +\infty$, dal precedente Corollario 7.1.

8. Sulla risolubilità del Problema 6.1.

Ci occupiamo, adesso, dello studio del Problema 6.1, continuando a supporre che (φ_0, ψ_0) sia l'elemento nullo di $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$.

Verifichiamo preliminarmente che, considerando come insieme dei controlli lo stesso insieme $\mathcal{U}_q$ del Teorema 7.1, non è possibile trovare condizioni di risolubilità del Problema 6.1. Si ha, infatti, il seguente

Teorema 8.1. *Siano:* $1 \leq p \leq +\infty$*;* $(a, b) \in I \times J$*;* $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$ *l'elemento nullo di* $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ *e*

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_q = \{U \in L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m) : \|U\|_{L^q(L_{I,J},\mathbb{R}^m)} \leq 1\}$$

con $q \in [p, +\infty]$.

Allora il Problema 6.1 *non ha soluzione.*

Dimostrazione. L'insieme $\mathcal{U}_q$ è un sottoinsieme limitato di $L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$. Infatti, per ogni compatto $K \subseteq L_{I,J}$, denotata con c_K una costante tale che

$$\|l\|_{L^p(K)} \leq c_K \|l\|_{L^q(K)} \qquad \forall l \in L^q(K)\,,$$

si ha, per la corrispondente seminorma π_K su $L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$, la seguente maggiorazione

$$\pi_K(U) = \|U\|_{L^p(K,\mathbb{R}^m)} \leq c_K \|U\|_{L^q(K,\mathbb{R}^m)} \leq c_K \qquad \forall U \in \mathcal{U}_q\,.$$

Di conseguenza (Proposizione 5.1) anche

$$\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}\,\mathcal{U}_q$$

è un sottoinsieme limitato di $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$, qualunque siano i punti $(a_0, b_0), (a, b) \in I \times J$, $a_0 \leq a$, $b_0 \leq b$.

Ricordiamo inoltre che (come già osservato nel corso della dimostrazione della condizione sufficiente del Teorema 7.1), assegnato $(a, b) \in I \times J$, da $(a_0', b_0'), (a_0'', b_0'') \in I \times J$, $a_0' \leq a_0'' \leq a$, $b_0' \leq b_0'' \leq b$, segue

$$\Lambda_{(a_0',b_0'),(a,b)}\,\mathcal{U}_q \supseteq \Lambda_{(a_0'',b_0''),(a,b)}\,\mathcal{U}_q\,.$$

Pertanto, fissata una sucessione $\{(a_k, b_k)\}$ di punti di $I \times J$ tale da aversi

$$a_k \leq a\ , \quad b_k \leq b \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k \ = \ \inf I\ , \quad \lim_{k\to\infty} b_k \ = \ \inf J$$

e inoltre, qualora $\inf I$ [risp. $\inf J$] appartenga a I [risp. J],

$$a_k \ = \ \inf I \quad [\text{risp. } b_k \ = \ \inf J]$$

per k sufficientemente grande, l'insieme

$$\bigcup_{\substack{(a_0,b_0)\in I\times J \\ a_0\leq a, b_0\leq b}} \Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}\, \mathcal{U}_q \tag{8.1}$$

risulta uguale a

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Lambda_{(a_k,b_k),(a,b)}\, \mathcal{U}_q\ ,$$

dunque è unione numerabile di sottoinsiemi limitati di $\Xi^{(n)}_{p,\text{loc}}$.

Il successivo Lemma 8.1 implica allora che l'insieme (8.1) non può coincidere con $\Xi^{(n)}_{p,\text{loc}}$.

Lemma 8.1. *Lo spazio* $\Xi^{(n)}_{p,\text{loc}}$ *non è unione numerabile di insiemi limitati.*

Dimostrazione. Sia $\{\mathcal{X}_k\}$ una qualunque successione di sottoinsiemi limitati di $\Xi^{(n)}_{p,\text{loc}}$. Si ha, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$s_k \ = \ \sup_{(\varphi,\psi)\in\mathcal{X}_k} \pi_{]k-1,k[,]k-1,k[}(\varphi,\,\psi) \ < \ +\infty\ .$$

Considerato, allora, un elemento $(\overline{\varphi},\,\overline{\psi})$ di $\Xi^{(n)}_{p,\text{loc}}$ tale che

$$|\overline{\varphi}'(t)| \ = \ s_k + 1 \qquad \text{q.o. } t \in]k-1, k[,\ \ \forall k \in N\ ,$$

risulta

$$\pi_{]k-1,k[,]k-1,k[}(\overline{\varphi},\,\overline{\psi}) \ \geq \ \|\overline{\varphi}\|_{W^{1,p}(]k-1,k[,\mathbb{R}^n)} \ \geq \ \|\overline{\varphi}'\|_{L^p(]k-1,k[,\mathbb{R}^n)} \ = \ s_k + 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

e pertanto $(\overline{\varphi},\,\overline{\psi})$ non appartiene a nessuno degli insiemi $\mathcal{X}_k$.

Osserviamo, ancora, che la condizione (7.1), che serve a caratterizzare la risolubilità del Problema 6.2 nel caso $\mathcal{U} = \mathcal{U}_q$ (e che ovviamente, per il teorema precedente, non può in tal caso garantire l'esistenza di soluzioni del Problema 6.1), non è da sola sufficiente per la risolubiltà del Problema 6.1 neanche se come insieme dei controlli ammissibili si assume l'intero spazio $L^p_{\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$. Ciò si evince dal seguente Esempio 8.1. L'ulteriore Esempio 8.2 mostrerà, poi, che la condizione (7.1) non è neanche necessaria per la risolubiltà del Problema 6.1.

Esempio 8.1. Siano $I = J = \mathbb{R}$; $n = m = 1$; $A = B = C = 0$ (quindi $V(u, v; x, y) = 1$ in $\mathbb{R}^4$);

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \leq -x \,, \\ 0 & \text{se } y > -x \,. \end{cases}$$

Siano, inoltre, $(a, b) = (0, 0)$ e $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$ l'elemento nullo di $\Xi^{(1)}_{p,\mathrm{loc}}$.

Dimostriamo che, qualunque sia l'esponente $p \in [1, +\infty]$, il Problema 6.1 con $\mathcal{U} = L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ non ha soluzione. Infatti, per ogni $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$, $a_0 \leq 0$, $b_0 \leq 0$, ed ogni $U \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, posto (come nella (6.5))

$$\gamma_{(0,0)} z(\,\cdot\,; (a_0, b_0), (0, 0), U) = (\varphi, \psi),$$

si ha

$$\varphi(t) = \int_{a_0}^{t} \int_{b_0}^{0} F(u, v) U(u, v)\, du dv \quad \forall t \in [0, +\infty[\,,$$

$$\psi(t) = \int_{a_0}^{0} \int_{b_0}^{t} F(u, v) U(u, v)\, du dv \quad \forall t \in [0, +\infty[\,,$$

quindi

$$\varphi'(t) = \int_{b_0}^{0} F(t, v) U(t, v)\, dv \quad \text{q.o. } t \in [0, +\infty[\,,$$

$$\psi'(t) = \int_{a_0}^{0} F(u, t) U(u, t)\, du \quad \text{q.o. } t \in [0, +\infty[\,,$$

da cui

$$\varphi'(t) = 0 \quad \text{q.o. } t \in [-b_0, +\infty[\quad , \quad \psi'(t) = 0 \quad \text{q.o. } t \in [-a_0, +\infty[\,,$$

pertanto le funzioni φ e ψ sono costanti negli intervalli $[-b_0, +\infty[$ e $[-a_0, +\infty[$, rispettivamente. Ne segue che è

$$\bigcup_{a_0 \leq 0, b_0 \leq 0} \mathcal{A}((a_0, b_0), (0, 0); (0, 0), L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)) \neq \Xi^{(1)}_{p,\mathrm{loc}}\,,$$

cioè il Problema 6.1 non ha soluzione.

Tuttavia, la condizione (7.1) è soddisfatta qualunque sia $q' \in [1, +\infty[$. Per verificare ciò osserviamo che valgono, ovviamente, le condizioni (7.6) – (7.8), quindi, fissato un qualunque $p \in]1, q[$ (q l'esponente coniugato di q'), per il Corollario 7.1 il Problema 6.2 ha soluzione con $\mathcal{U} = \mathcal{U}_q$ e dunque, per il Teorema 7.1, vale la (7.1).

Quanto precedentemente osservato mostra che, al fine di ottenere delle condizioni di risolubiltà del Problema 6.1, oltre a considerare un adeguato insieme di controlli ammissibili più ampio di $\mathcal{U}_q$, occorre anche introdurre ulteriori ipotesi sui dati. A tale scopo, analogamente a quanto fatto in A. Villani [11] in occasione della condizione di controllabilità completa esatta con luogo iniziale e finale assegnati, introdurremo opportune ipotesi di invertibilità della matrice F in un appropriato sottoinsieme di $L_{I,J}$ per pervenire ad una condizione necessaria e sufficiente di risolubiltà del Problema 6.1 che si esprime mediante un integrale costruito a partire dai dati e che presenta, nei riguardi della condizione i) di A. Villani [11], Teorema 6.1, lo stesso tipo di analogia già osservato, nel numero precedente, a proposito della (7.1) nei riguardi della condizione di controllabilità completa approssimata di G. Pulvirenti - G. Santagati [4].

Teorema 8.2. *Siano:* $1 \leq p \leq +\infty$*;* $(a, b) \in I \times J$*;* $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$ *l'elemento nullo di* $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$ *e*

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{q,(a,b)} = \{U \in L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m) : \|U\|_{L^q(L_{I,J}\cap(]-\infty,a[\times]-\infty,b[),\mathbb{R}^m)} \leq 1\}$$

con $q \in [p, +\infty]$*,* $q > 1$*.*

Sia inoltre verificata la seguente ipotesi:

(I) *Esistano una matrice funzione* $F^+ \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^{m,n})$*, due successioni numeriche* $\{a_k\}$*,* $\{b_k\}$*, crescenti e divergenti, con* $a_1 = a$*,* $b_1 = b$*, e due successioni di intervalli*

$$\{[a'_k, a''_k]\}\ ,\quad \{[b'_k, b''_k]\}\ ,$$

con

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} b'_k \in J\ ,\quad \sup_{k\in\mathbb{N}} b''_k \leq b\ ,$$

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} a'_k \in I\ ,\quad \sup_{k\in\mathbb{N}} a''_k \leq a\ ,$$

tali che

$$F(x, y)F^+(x, y) = I$$

$$\text{q.o. } (x, y) \in \left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\big([a_k, a_{k+1}] \times [b'_k, b''_k]\big)\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\big([a'_k, a''_k] \times [b_k, b_{k+1}]\big)\right).$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il Problema 6.1 *abbia soluzione è che risulti*

$$\iint_{L_{I,J}\cap(]-\infty,a]\times]-\infty,b])} |\xi^* V(u, v; a, b)F(u, v)|^{q'}\, dudv = +\infty \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\ , \tag{8.2}$$

essendo q' *l'esponente coniugato di* q*.*

Dimostrazione. Proviamo innanzitutto che, indipendentemente dall'ipotesi (I), la validità della (8.2) equivale al sussistere dell'uguaglianza

$$\bigcup_{\substack{(a_0,b_0)\in I\times J\\ a_0\leq a,\, b_0\leq b}} z(a, b; (a_0, b_0), (0, 0), \mathcal{U}_{q,(a,b)}) = \mathbb{R}^n . \tag{8.3}$$

A tale scopo, possiamo adoperare lo stesso procedimento usato, nel caso di processi di controllo con parametri concentrati, in R. Conti [1], Teorema VI.5.1.

Precisamente, cominciamo con l'osservare preliminarmente che, fissato $(a_0, b_0) \in I \times J$, $a_0 \leq a$, $b_0 \leq b$, ed indicato con λ un elemento di $\mathbb{R}^n$, si ha

$$\lambda \in z(a, b; (a_0, b_0), (0, 0), \mathcal{U}_{q,(a,b)}) \iff \tag{8.4}$$

$$\iff |\xi^*\lambda|^{q'} \leq \int_{a_0}^{a}\int_{b_0}^{b} |\xi^* V(u, v; a, b)F(u, v)|^{q'}\, du dv \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n .$$

Ciò è ovvio nel caso in cui è $a_0 = a$ oppure $b_0 = b$. Altrimenti, denotata con $B_{(a_0,b_0),(a,b),q}$ la palla unitaria di $L^q([a_0, a] \times [b_0, b], \mathbb{R}^m)$, cioè posto

$$B_{(a_0,b_0),(a,b),q} = \{\tilde{U} \in L^q([a_0, a] \times [b_0, b], \mathbb{R}^m) : \|\tilde{U}\|_{L^q([a_0,a]\times[b_0,b],\mathbb{R}^m)} \leq 1\},$$

osserviamo che

$$z(a, b; (a_0, b_0), (0, 0), \mathcal{U}_{q,(a,b)}) =$$

$$= \left\{ \int_{a_0}^{a}\int_{b_0}^{b} V(u, v; a, b)F(u, v)U(u, v)\, du dv \ :\ U \in \mathcal{U}_{q,(a,b)} \right\} =$$

$$= \left\{ \int_{a_0}^{a}\int_{b_0}^{b} V(u, v; a, b)F(u, v)\tilde{U}(u, v)\, du dv \ :\ \tilde{U} \in B_{(a_0,b_0),(a,b),q} \right\} =$$

$$= G_{(a_0,b_0),(a,b),q}(B_{(a_0,b_0),(a,b),q}) ,$$

dove $G_{(a_0,b_0),(a,b),q}$ è l'applicazione lineare e continua, da $L^q([a_0, a] \times [b_0, b], \mathbb{R}^m)$ in $\mathbb{R}^n$, definita mediante la posizione

$$G_{(a_0,b_0),(a,b),q}(\tilde{U}) = \int_{a_0}^{a}\int_{b_0}^{b} V(u, v; a, b)F(u, v)\tilde{U}(u, v)\, du dv$$

$$\forall \tilde{U} \in L^q([a_0, a] \times [b_0, b], \mathbb{R}^m) .$$

Di conseguenza, se $q < +\infty$, dato che $B_{(a_0,b_0),(a,b),q}$ è un sottoinsieme debolmente compatto di $L^q([a_0, a] \times [b_0, b], \mathbb{R}^m)$, l'insieme $z(a, b; (a_0, b_0), (0, 0), \mathcal{U}_{q,(a,b)})$ è un sottoinsieme compatto, e quindi chiuso, di $\mathbb{R}^n$. Alla stessa conclusione si perviene nel caso $q = +\infty$ dato che l'insieme $B_{(a_0,b_0),(a,b),\infty}$ è debolmente* compatto e l'applicazione $G_{(a_0,b_0),(a,b),\infty}$, come immediatamente si verifica, è debolmente* continua. Poichè l'insieme

$$z(a, b; (a_0, b_0), (0, 0), \mathcal{U}_{q,(a,b)}) = G_{(a_0,b_0),(a,b),q}(B_{(a_0,b_0),(a,b),q})$$

è anche convesso, l'appartenenza ad esso di un elemento $\lambda \in \mathbb{R}^n$ si caratterizza (cfr., ad es., G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [5], Proposizione 5.1) mediante la sua funzione di appoggio, cioè si ha

$$\lambda \in z(a, b; (a_0, b_0), (0, 0), \mathcal{U}_{q,(a,b)}) \iff$$

$$\iff \xi^*\lambda \leq \sup\{\xi^*\delta : \delta \in z(a, b; (a_0, b_0), (0, 0), \mathcal{U}_{q,(a,b)})\} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n ,$$

da cui, tenendo presente che

$$\sup\{\xi^*\delta : \delta \in z(a, b; (a_0, b_0), (0, 0), \mathcal{U}_{q,(a,b)})\} =$$

$$= \sup\left\{ \int_{a_0}^{a}\int_{b_0}^{b} \xi^* V(u, v; a, b)F(u, v)\tilde{U}(u, v)\, du dv \ : \ \tilde{U} \in B_{(a_0,b_0),(a,b),q} \right\} =$$

$$= \|\xi^* V(\,\cdot\,; a, b)F\|_{L^{q'}([a_0,a]\times[b_0,b],\mathbb{R}^m)} =$$

$$= \left(\int_{a_0}^{a}\int_{b_0}^{b} |\xi^* V(u, v; a, b)F(u, v)|^{q'}\, du dv \right)^{\frac{1}{q'}} ,$$

si deduce la (8.4).

Proviamo adesso che la (8.3) implica la (8.2).

Ragionando per assurdo, supponiamo che esista $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tale da aversi

$$\iint_{L_{I,J} \cap\ (]-\infty,a]\times]-\infty,b])} |\overline{\xi}^* V(u, v; a, b)F(u, v)|^{q'}\, du dv = M < +\infty,$$

e quindi

$$\int_{a_0}^{a}\int_{b_0}^{b} |\overline{\xi}^* V(u, v; a, b)F(u, v)|^{q'}\, du dv \leq M ,$$

per ogni $(a_0, b_0) \in I \times J$, $a_0 \leq a$, $b_0 \leq b$; dalla (8.4) segue allora che, scegliendo $\lambda \in \mathbb{R}^n$ in modo che $|\overline{\xi}^* \lambda|^{q'} > M$, risulta

$$\lambda \notin \bigcup_{\substack{(a_0, b_0) \in I \times J \\ a_0 \leq a, b_0 \leq b}} z(a, b; (a_0, b_0), (0, 0), \mathcal{U}_{q,(a,b)}) ,$$

ma ciò contraddice la (8.3).

Viceversa, dalla (8.2) segue la (8.3). Infatti, fissato un qualunque $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}^n$, la (8.2) implica, in particolare, che per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$, esiste $(a_\xi, b_\xi) \in I \times J$, $a_\xi \leq a$, $b_\xi \leq b$ tale che

$$\int_{a_\xi}^{a} \int_{b_\xi}^{b} |\xi^* V(u, v; a, b) F(u, v)|^{q'} \, du dv \ > \ |\overline{\lambda}|^{q'}$$

e quindi, per la continuità della funzione

$$\delta \ \to \ \int_{a_\xi}^{a} \int_{b_\xi}^{b} |\delta^* V(u, v; a, b) F(u, v)|^{q'} \, du dv \ ,$$

da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, esiste pure un insieme aperto $\Omega_\xi \subseteq \mathbb{R}^n$, contenente ξ, tale che

$$\int_{a_\xi}^{a} \int_{b_\xi}^{b} |\delta^* V(u, v; a, b) F(u, v)|^{q'} \, du dv \ > \ |\overline{\lambda}|^{q'} \quad \forall \delta \in \Omega_\xi .$$

Dato che la famiglia di insiemi $\{\Omega_\xi \ : \ \xi \in \mathbb{R}^n, \ |\xi| = 1\}$ costituisce un ricoprimento aperto del compatto $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| = 1\}$, esistono $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$, $|\xi_1| = \ldots = |\xi_k| = 1$, tali che

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| = 1\} \ \subseteq \ \Omega_{\xi_1} \cup \ldots \cup \Omega_{\xi_k} \ .$$

Posto

$$\overline{a}_0 \ = \ \min\{a_{\xi_1}, \ldots, a_{\xi_k}\} \ , \quad \overline{b}_0 \ = \ \min\{b_{\xi_1}, \ldots, b_{\xi_k}\} \ ,$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$, si ha $\xi \in \Omega_{\xi_r}$ per qualche $r = 1, \ldots, k$ e quindi

$$\int_{\overline{a}_0}^{a} \int_{\overline{b}_0}^{b} |\xi^* V(u, v; a, b) F(u, v)|^{q'} \, du dv \ \geq$$

$$\geq \ \int_{a_{\xi_r}}^{a} \int_{b_{\xi_r}}^{b} |\xi^* V(u, v; a, b) F(u, v)|^{q'} \, du dv \ > \ |\overline{\lambda}|^{q'} \ \geq \ |\xi^* \overline{\lambda}|^{q'} \ .$$

Abbiamo così provato che

$$\int_{\overline{a}_0}^{a}\int_{\overline{b}_0}^{b} |\xi^* V(u, v; a, b)F(u, v)|^{q'}\, du dv \;>\; |\xi^*\overline{\lambda}|^{q'} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ |\xi| = 1 .$$

Ne segue che

$$\int_{\overline{a}_0}^{a}\int_{\overline{b}_0}^{b} |\xi^* V(u, v; a, b)F(u, v)|^{q'}\, du dv \;\geq\; |\xi^*\overline{\lambda}|^{q'} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n ,$$

vale a dire, per la (8.4),

$$\overline{\lambda} \in z(a, b; (\overline{a}_0, \overline{b}_0), (0, 0), \mathcal{U}_{q,(a,b)}) .$$

Per l'arbitrarietà di $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ concludiamo che vale la (8.3).

A questo punto, provata l'equivalenza tra la (8.2) e la (8.3), per dimostrare la necessità della condizione (8.2) basta osservare che la risolubilità del Problema 6.1 implica, ovviamente, il verificarsi della (8.3).

Dimostriamo, infine, la sufficienza della condizione (8.2).

Sia $(\overline{\chi}, \overline{\eta}) \in \Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$.

Poichè per ipotesi è verificata la (8.2), per quanto dimostrato preliminarmente vale pure la (8.3), cioè esistono $(a_0, b_0) \in I \times J$, $a_0 \leq a$, $b_0 \leq b$ e $U_0 \in \mathcal{U}_{q,(a,b)}$ tali che

$$z(a, b; (a_0, b_0), (0, 0), U_0) \;=\; \overline{\chi}(0) .$$

Osserviamo che, analogamente a quanto rilevato a proposito di $\mathcal{U}_q$ nel corso della dimostrazione del Teorema 7.1, da $(a_0', b_0'), (a_0'', b_0'') \in I \times J$, $a_0' \leq a_0'' \leq a$, $b_0' \leq b_0'' \leq b$, segue

$$\Lambda_{(a_0',b_0'),(a,b)}\, \mathcal{U}_{q,(a,b)} \;\supseteq\; \Lambda_{(a_0'',b_0''),(a,b)} \mathcal{U}_{q,(a,b)} ,$$

cioè

$$\mathcal{A}((a_0', b_0'), (a, b); (0, 0), \mathcal{U}_{q,(a,b)}) \;\supseteq\; \mathcal{A}((a_0'', b_0''), (a, b); (0, 0), \mathcal{U}_{q,(a,b)}) .$$

Per la precedente osservazione e per le proprietà che hanno le successioni di intervalli $\{[a_k', a_k'']\}$, $\{[b_k', b_k'']\}$, possiamo supporre che

$$b_0 \;\leq\; \inf_{k\in\mathbb{N}} b_k' \, , \quad a_0 \leq \; \inf_{k\in\mathbb{N}} a_k' \, .$$

Inoltre, poichè dalla (8.2) segue ovviamente che $b > \inf J$ e $a > \inf I$, possiamo supporre anche che $b_0 < b$, $a_0 < a$.

Adoperando allora lo stesso procedimento usato in A. Villani [11], Teorema 6.1, si prova che, posto

$$R_k^{(1)} =]a_k, a_{k+1}[\times]b_0, b[\ ,\ R_k^{(2)} =]a_0, a[\times]b_k, b_{k+1}[\ ,\quad k \in \mathbb{N}\ ,$$

e denotando ancora con P (cfr. la (3.2) del n. 3) l'operatore differenziale

$$w \to Pw = w_{xy} + Aw_x + Bw_y + Cw\ ,$$

lineare e continuo da $W_p^*(R_k^{(i)}, \mathbb{R}^n)$ in $L^p(R_k^{(i)}, \mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2$, $k \in \mathbb{N}$, esistono quattro successioni

$$\{z_k^{(1)}\}\ ,\quad \{U_k^{(1)}\}\ ,$$
$$\{z_k^{(2)}\}\ ,\quad \{U_k^{(2)}\}\ ,$$

con

$$z_k^{(i)} \in W_p^*(R_k^{(i)}, \mathbb{R}^n)\ ,\quad U_k^{(i)} \in L^p(R_k^{(i)}, \mathbb{R}^m)\ ,\quad i = 1, 2\ ,\quad k \in \mathbb{N}\ ,$$

tali che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$(8.5)_k^{(1)} \quad \begin{cases} (Pz_k^{(1)})(x, y) = F(x, y)U_k^{(1)}(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in R_k^{(1)}, \\ z_k^{(1)}(x, b_0) = 0\ ,\ z_k^{(1)}(x, b) = \overline{\chi}(x - a) & \forall x \in [a_k, a_{k+1}], \\ z_k^{(1)}(a_k, y) = z_{k-1}^{(1)}(a_k, y) & \forall y \in [b_0, b], \end{cases}$$

$$(8.5)_k^{(2)} \quad \begin{cases} (Pz_k^{(2)})(x, y) = F(x, y)U_k^{(2)}(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in R_k^{(2)}, \\ z_k^{(2)}(a_0, y) = 0\ ,\ z_k^{(2)}(a, y) = \overline{\eta}(y - b) & \forall y \in [b_k, b_{k+1}], \\ z_k^{(2)}(x, b_k) = z_{k-1}^{(2)}(x, b_k) & \forall y \in [a_0, a], \end{cases}$$

avendo indicato con $z_0^{(1)} = z_0^{(2)}$ la restrizione di $z(\cdot; (a_0, b_0), (0, 0), U_0)$ al rettangolo $R_0 =]a_0, a[\times]b_0, b[$.

Per dimostrare l'esistenza delle successioni $\{z_k^{(1)}\}$ e $\{U_k^{(1)}\}$ cominciamo con il costruire $z_1^{(1)}$ e $U_1^{(1)}$. Supponiamo, per fissare le idee, che sia $b_0 < b_1'$, $b_1'' < b$. Dal Theorem 5 di M. B. Suryanarayana [9] segue l'esistenza di $w_1 \in W_p^*(]a_1, a_2[\times]b_0, b_1'[, \mathbb{R}^n)$, $w_2 \in W_p^*(]a_1, a_2[\times]b_1'', b[, \mathbb{R}^n)$ tali che

$$\begin{cases} (Pw_1)(x, y) = F(x, y)U_0(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in]a_1, a_2[\times]b_0, b_1'[, \\ w_1(x, b_0) = 0 & \forall x \in [a_1, a_2], \\ w_1(a_1, y) = z_0^{(1)}(a_1, y) & \forall y \in [b_0, b_1'], \end{cases}$$

$$\begin{cases} (Pw_2)(x, y) = F(x, y)U_0(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in]a_1, a_2[\times]b_1'', b[, \\ w_2(x, b) = \overline{\chi}(x - a) & \forall x \in [a_1, a_2], \\ w_2(a_1, y) = z_0^{(1)}(a_1, y) & \forall y \in [b_1'', b]; \end{cases}$$

dal Lemma 6.1 di A. Villani [11] si ottiene l'esistenza di $w_3 \in W_p^*(]a_1, a_2[\times]b_1', b_1''[, \mathbb{R}^n)$ tale che

$$\begin{cases} w_3(x, b_1') = w_1(x, b_1') \,,\ w_3(x, b_1'') = w_2(x, b_1'') & \forall x \in [a_1, a_2], \\ w_3(a_1, y) = z_0^{(1)}(a_1, y) & \forall y \in [b_1', b_1''] \end{cases}$$

posto, allora,

$$z_1^{(1)}(x, y) = \begin{cases} w_1(x, y) & \forall (x, y) \in]a_1, a_2[\times]b_0, b_1'[, \\ w_3(x, y) & \forall (x, y) \in]a_1, a_2[\times]b_1', b_1''[, \\ w_2(x, y) & \forall (x, y) \in]a_1, a_2[\times]b_1'', b[, \end{cases}$$

$$U_1^{(1)}(x, y) = \begin{cases} U_0(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in R_1^{(1)} \setminus (]a_1, a_2[\times]b_1', b_1''[), \\ F^+(x, y)(Pw_3)(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in]a_1, a_2[\times]b_1', b_1''[, \end{cases}$$

risulta $z_1^{(1)} \in W_p^*(R_1^{(1)}, \mathbb{R}^n)$, $U_1^{(1)} \in L^p(R_1^{(1)}, \mathbb{R}^m)$ e valgono le $(8.5)_1^{(1)}$. La costruzione si semplifica in modo ovvio se $b_1' = b_0$ o $b_1'' = b$.

Con lo stesso procedimento, a partire da $z_1^{(1)}$ si costruiscono $z_2^{(1)}$ e $U_2^{(1)}$ verificanti le $(8.5)_2^{(1)}$ e, in generale, a partire da $z_{k-1}^{(1)}$ si costruiscono $z_k^{(1)}$ e $U_k^{(1)}$ verificanti le $(8.5)_k^{(1)}$.

L'esistenza delle successioni $\{z_k^{(2)}\}$ e $\{U_k^{(2)}\}$ si dimostra in maniera perfettamente analoga.

Posto, allora,

$$\overline{U}(x, y) = \begin{cases} U_0(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in L_{I,J} \cap (]-\infty, a]\times]-\infty, b]), \\ U_k^{(i)}(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in R_k^{(i)},\ i = 1, 2,\ \ k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \\ \quad \text{q.o. } (x, y) \in L_{I,J} \setminus \Big((]-\infty, a]\times]-\infty, b]) \cup \Big(\bigcup\limits_{\substack{i=1,2 \\ k\in\mathbb{N}}} R_k^{(i)}\Big)\Big), & \end{cases}$$

si ha, ovviamente, $\overline{U} \in \mathcal{U}_{q,(a,b)}$ e risulta

$$z(x, y; (a_0, b_0), (0, 0), \overline{U}) = z_k^{(i)}(x, y)$$
$$\forall (x, y) \in R_k^{(i)} \,,\ i = 1, 2,\ \ k \in \mathbb{N} \,,$$

dunque

$$z(x, b; (a_0, b_0), (0, 0), \overline{U}) = \overline{\chi}(x - a) \qquad \forall x \in [a, +\infty[\ ,$$

$$z(a, y; (a_0, b_0), (0, 0), \overline{U}) = \overline{\eta}(y - b) \qquad \forall y \in [b, +\infty[\ ,$$

cioè

$$\gamma_{(a,b)} z(\,\cdot\,; (a_0, b_0), (0, 0), \overline{U}) = (\overline{\chi}, \overline{\eta})\,.$$

Il teorema è così dimostrato.

Osservazione 8.1. È evidente che, qualunque sia $q' \in [1, +\infty[$, il verificarsi della (7.1) implica il verificarsi della (8.2) (basta assumere, nella (7.1), $\mu = \nu = 0$). Osserviamo però che non è lecito, nell'enunciato del Teorema 8.2, sostituire la (8.2) con la (7.1). Ciò segue dal successivo esempio.

Esempio 8.2. Siano $I = J = \mathbb{R}$; $n = m = 1$; $A = B = C = 0$ (quindi $V(u, v; x, y) = 1$ in $\mathbb{R}^4$);

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } xy \geq -1\,, \\ 0 & \text{se } xy < -1\,. \end{cases}$$

Siano, inoltre, $(a, b) = (0, 0)$ e $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$ l'elemento nullo di $\Xi^{(1)}_{p,\mathrm{loc}}$.
Siano, infine, $p \in]1, +\infty[$, $q \in [p, +\infty]$ e $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{q,(0,0)}$.

È immediato verificare che l'ipotesi (I) e la condizione (8.2) sono soddisfatte. Pertanto, per il teorema precedente, il Problema (6.1) ha soluzione.

Invece, la condizione (7.1) non è soddisfatta. Infatti in questo caso non sono verificate la (7.7) e la (7.8), dunque (Corollario 7.1) il Problema 6.2 con $\mathcal{U} = \mathcal{U}_q$ non ha soluzione e quindi (Teorema 7.1) la (7.1) non è verificata.

Osservazione 8.2. La risolubilità del Problema 6.1 nel caso dell'Esempio 6.1, già acquisita con un ragionamento diretto, si può dedurre anche dal Teorema 8.2.

Osservazione 8.3. Anche la non risolubilità del Problema 6.1 nel caso dell'Esempio 6.2, che abbiamo dimostrato direttamente, si può ottenere applicando il Teorema 8.2.

9. Permanenza della risolubilità dei Problemi 6.1 e 6.2 al variare di $l(a, b)$.

In questo numero esaminiamo la possibilità di dedurre dalla risolubilità del Problema 6.1, ovvero del Problema 6.2, rispetto al luogo finale assegnato $l(a, b)$, la risolubilità dello stesso problema rispetto ad un altro luogo finale assegnato $l(a', b')$.

A tale scopo ci sarà utile introdurre la seguente definizione.

Definizione 9.1. (*Proprietà di* 0*-incollamento*). L'insieme $\mathcal{U} \subseteq L^p_{\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ ha la *proprietà di* 0*-incollamento* (*zero-incollamento*) se per ogni insieme misurabile $Y \subseteq L_{I,J}$ si ha

$$U \in \mathcal{U} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{1}_Y U \in \mathcal{U} \, .$$

Ad esempio gli insiemi $\mathcal{U}_q$ e $\mathcal{U}_{q,(a,b)}$, considerati nei numeri precedenti, hanno la proprietà di 0-incollamento.

L'ipotesi che l'insieme dei controlli $\mathcal{U}$ abbia la proprietà di 0-incollamento ci permette di provare che, analogamente a quanto si è verificato a proposito della controllabilità completa, esatta o approssimata, (A. Villani [11], Teorema 5.1 e G. Pulvirenti - G. Santagati [4], Teorema 5.1), la risolubilità del Problema 6.1 e quella del Problema 6.2 sono proprietà che permangono al "crescere" dei parametri a e b.

Si ha infatti il seguente teorema.

Teorema 9.1. *Siano dati* $(a, b) \in I \times J$, $(\varphi_0, \psi_0) \in \Xi^{(n)}_{p,\text{loc}}$, $\mathcal{U} \subseteq L^p_{\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ *e supponiamo inoltre che l'insieme* $\mathcal{U}$ *abbia la proprietà di* 0*-incollamento.*

Allora la risolubilità del Problema 6.1, *ovvero del* Problema 6.2, *rispetto al luogo finale* $l(a, b)$ *implica la risolubilità dello stesso problema rispetto ad un qualunque luogo finale* $l(a', b')$ *con* $(a', b') \in I \times J$ *tale che* $a' \geq a$, $b' \geq b$.

Dimostrazione. Sia $(a', b') \in I \times J$, $a' \geq a$, $b' \geq b$. Osserviamo che (cfr. il n. 4) l'applicazione

$$(\chi, \eta) \ \to \ z(\,\cdot\,; (a, b), (\chi, \eta), 0)$$

è lineare e continua da $\Xi^{(n)}_{p,\text{loc}}$ in $W^*_{p,\text{loc}}(L_{I_a,J_b}, \mathbb{R}^n)$; di conseguenza (Teorema 2.7) anche l'applicazione g, da $\Xi^{(n)}_{p,\text{loc}}$ in sè, definita ponendo

$$g(\chi, \eta) \ = \ \gamma_{(a',b')} z(\,\cdot\,; (a, b), (\chi, \eta), 0) \qquad \forall (\chi, \eta) \in \Xi^{(n)}_{p,\text{loc}},$$

è lineare e continua. Tale applicazione, inoltre, è surgettiva; infatti, dato $(\overline{\chi}, \overline{\eta}) \in \Xi^{(n)}_{p,\text{loc}}$, fissata in corrispondenza (n. 4) una funzione $\overline{z} \in W^*_{p,\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ soluzione dell'equazione $Pz = 0$ verificante la condizione $\gamma_{(a',b')}\overline{z} \ = \ (\overline{\chi}, \overline{\eta})$ e posto $(\chi, \eta) \ = \ \gamma_{(a,b)}\overline{z}$, risulta

$$z(x, y; (a, b), (\chi, \eta), 0) \ = \ \overline{z}(x, y) \qquad \forall (x, y) \in L_{I_a,J_b}$$

e quindi

$$g(\chi, \eta) = (\overline{\chi}, \overline{\eta}).$$

Dall'ipotesi di 0-incollamento segue che per ogni $(a_0, b_0) \in I \times J$, $a_0 \leq a$, $b_0 \leq b$, risulta

$$g(\mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U})) \subseteq \mathcal{A}((a_0, b_0), (a', b'); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U});$$

infatti, se $(\chi, \eta) \in \mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U})$, cioè esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che

$$(\chi, \eta) = \gamma_{(a,b)} z(\,\cdot\,; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U),$$

posto

$$U_1 = \mathbf{1}_{L_{I,J} \setminus L_{I_a, J_b}} U,$$

si ha $U_1 \in \mathcal{U}$ e

$$z(x, y; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U_1) = \begin{cases} z(x, y; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U) \\ \qquad \text{se } (x, y) \in L_{I_{a_0}, J_{b_0}} \setminus L_{I_a, J_b}, \\ \\ z(x, y; (a, b), (\chi, \eta), 0) \\ \qquad \text{se } (x, y) \in L_{I_a, J_b}; \end{cases}$$

pertanto

$$g(\chi, \eta) = \gamma_{(a',b')} z(\,\cdot\,; (a, b), (\chi, \eta), 0) =$$
$$= \gamma_{(a',b')} z(\,\cdot\,; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U_1) \in \mathcal{A}((a_0, b_0), (a', b'); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U}).$$

Di conseguenza si ha

$$\bigcup_{\substack{(a_0,b_0)\in I\times J \\ a_0\leq a, b_0\leq b}} g(\mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U})) \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{\substack{(a_0,b_0)\in I\times J \\ a_0\leq a, b_0\leq b}} \mathcal{A}((a_0, b_0), (a', b'); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U}) \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{\substack{(a_0,b_0)\in I\times J \\ a_0\leq a', b_0\leq b'}} \mathcal{A}((a_0, b_0), (a', b'); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U}).$$

Supponiamo, adesso, che il Problema 6.1 sia risolubile rispetto al luogo finale $l(a, b)$, cioè l'insieme

$$\bigcup_{\substack{(a_0,b_0)\in I\times J \\ a_0\leq a, b_0\leq b}} \mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U}) \tag{9.1}$$

coincida con $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$. Dato che l'applicazione g è surgettiva, l'insieme

$$g\Big(\bigcup_{\substack{(a_0,b_0)\in I\times J\\ a_0\le a,b_0\le b}} \mathcal{A}((a_0,b_0),(a,b);(\varphi_0,\psi_0),\mathcal{U})\Big) = \tag{9.2}$$

$$= \bigcup_{\substack{(a_0,b_0)\in I\times J\\ a_0\le a,b_0\le b}} g(\mathcal{A}((a_0,b_0),(a,b);(\varphi_0,\psi_0),\mathcal{U}))\,,$$

e quindi anche l'insieme

$$\bigcup_{\substack{(a_0,b_0)\in I\times J\\ a_0\le a',b_0\le b'}} \mathcal{A}((a_0,b_0),(a',b');(\varphi_0,\psi_0),\mathcal{U})\,, \tag{9.3}$$

coincidono con $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$, dunque il Problema 6.1 è risolubile rispetto al luogo finale $l(a',b')$.

Supponiamo, infine, che il Problema 6.2 sia risolubile rispetto al luogo finale $l(a,b)$, cioè l'insieme (9.1) sia denso in $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$. Poiché l'applicazione g è continua e surgettiva anche l'insieme (9.2) è denso in $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$; la stessa cosa può allora dirsi dell'insieme (9.3), dunque il Problema 6.2 è risolubile rispetto al luogo finale $l(a',b')$. Ciò completa la dimostrazione.

Osservazione 9.1. Analogamente a quanto accade per la controllabilità completa esatta (A. Villani [11], Esempio 5.1) ovvero approssimata (G. Pulvirenti - G. Santagati [4], Osservazione 5.1), la risolubilità del Problema 6.1, ovvero del Problema 6.2, rispetto al luogo finale $l(a,b)$, unitamente all'ipotesi di 0-incollamento su $\mathcal{U}$, non garantisce, in generale, l'esistenza di un intorno $\mathcal{O}$ del punto (a,b) tale che lo stesso problema sia pure risolubile rispetto ad ogni luogo finale $l(a',b')$, con $(a',b')\in\mathcal{O}\cap(I\times J)$.

Si hanno in proposito i seguenti esempi.

Esempio 9.1. Consideriamo lo stesso processo di controllo scalare (6.3) dell'Esempio 6.1 e, fermi restando i dati $(\varphi_0,\psi_0)=(0,0)$ e

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{+\infty,(0,0)} = \{U\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\ :\ |U(x,y)| \le 1$$
$$\text{q.o. } (x,y)\in\,]-\infty,0[\times]-\infty,0[\}\,,$$

supponiamo che sia $p<+\infty$.

Studiamo la risolubilità del Problema 6.1 rispetto al luogo finale fissato $l(a',b')$, con $(a',b')\in\mathbb{R}^2$.

Come abbiamo già visto, il Problema 6.1 è risolubile rispetto a $l(0,0)$ e quindi, per il Teorema 9.1, rispetto ad ogni luogo finale $l(a',b')$, $(a',b') \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$. È altresì facile provare che il Problema 6.1 è risolubile rispetto al luogo finale $l(a',b')$ anche nei casi $(a',b') \in]-\infty,0[\times]0,+\infty[$ oppure $(a',b') \in]0,+\infty[\times]-\infty,0[$. Infatti, supponendo, ad esempio, che sia $(a',b') \in]-\infty,0[\times]0,+\infty[$, assegnato un qualunque stato finale $(\overline{\chi},\overline{\eta}) \in \Xi^{(1)}_{p,\mathrm{loc}}$, se, in corrispondenza di $(\overline{\chi},\overline{\eta})$, si fissa il luogo iniziale $l(a_0,b_0)$ con $a_0 < a'$ e $0 < b_0 < b'$ e si sceglie, come è certamente possibile, un controllo $U \in \mathcal{U}_{+\infty,(0,0)}$ tale che

$$U(x,y) = \frac{\overline{\chi}(0)}{(a'-a_0)(b'-b_0)} \qquad \text{q.o. } (x,y) \in [a_0,a'[\times[b_0,b'[\ ,$$

$$U(x,y) = \frac{\overline{\chi}'(x-a')}{b'-b_0} \qquad \text{q.o. } (x,y) \in [a',+\infty[\times[b_0,b'[\ ,$$

$$U(x,y) = \frac{\overline{\eta}'(y-b')}{a'-a_0} \qquad \text{q.o. } (x,y) \in [a_0,a'[\times[b',+\infty[\ ,$$

risulta

$$\gamma_{(a',b')} z(\,\cdot\,;(a_0,b_0),(0,0),U) = (\overline{\chi},\overline{\eta})$$

(per verificare ciò basta adattare il ragionamento svolto nell'Esempio 6.1).

Proviamo che, invece, il Problema 6.1 non è risolubile rispetto al luogo finale $l(a',b')$ se $(a',b') \in]-\infty,0]\times]-\infty,0] \setminus \{(0,0)\}$. Ovviamente, per il Teorema (9.1), basta limitarci ai casi $(a',0)$, $a'<0$ e $(0,b')$, $b'<0$.

Consideriamo il caso $(a',0)$, $a'<0$. Fissati $(a_0,b_0) \in \mathbb{R}^2$, con $a_0 \le a'$, $b_0 \le 0$, e $U \in \mathcal{U}$, posto, analogamente alla (6.5),

$$\gamma_{(a',0)} z(\,\cdot\,;(a_0,b_0),(0,0),U) = (\varphi,\psi)\ ,$$

si ha

$$\varphi(t) = \int_{a_0}^{a'+t}\int_{b_0}^{0} U(u,v)\,du\,dv \qquad \forall t \in [0,+\infty[\ ,$$

e quindi

$$\varphi'(t) = \int_{b_0}^{0} U(a'+t,v)dv \qquad \text{q.o. } t \in [0,+\infty[\ ,$$

da cui

$$|\varphi'(t)| \le -b_0 \qquad \text{q.o. } t \in [0,-a'[\ ;$$

conseguentemente, poiché $p < +\infty$,

$$\bigcup_{a_0 \le a', b_0 \le 0} \mathcal{A}((a_0, b_0), (a', 0); (0, 0), \mathcal{U}_{+\infty,(0,0)}) \neq \Xi^{(1)}_{p,\mathrm{loc}} ,$$

cioè il relativo Problema 6.1 non ha soluzione.

Analogamente si procede nel caso $(0, b')$, $b' < 0$.

Da quanto osservato segue, in particolare, che il Problema 6.1 è risolubile rispetto a $l(0, 0)$, ma non esiste alcun intorno $\mathcal{O}$ di $(0, 0)$ tale che il Problema 6.1 sia risolubile rispetto ad ogni luogo finale $l(a', b')$, con $(a', b') \in \mathcal{O}$.

Studiamo adesso la risolubilità del Problema 6.2 rispetto al luogo finale fissato $l(a', b')$, con $(a', b') \in \mathbb{R}^2$.

Si verifica facilmente che il Problema 6.2 è risolubile rispetto ad un qualunque luogo finale fissato $l(a', b')$, con $(a', b') \in \mathbb{R}^2$. Nel caso $1 < p < +\infty$ ciò segue dal Corollario 7.1, tenuto conto che $\mathcal{U}_{+\infty,(0,0)} \supseteq \mathcal{U}_{+\infty}$; il caso $p = 1$ si deduce dal caso $1 < p < +\infty$ in virtù della densità di $\Xi^{(1)}_{p,\mathrm{loc}}$, con $1 < p < +\infty$, in $\Xi^{(1)}_{1,\mathrm{loc}}$.

Esempio 9.2. Riprendiamo in esame il processo di controllo scalare dell'Esempio 8.2

$$z_{xy} = F(x, y)U(x, y) \qquad \text{q.o. } (x, y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

con

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } xy \ge -1 , \\ 0 & \text{se } xy < -1 , \end{cases}$$

e, fermo restando lo stato iniziale $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$, elemento nullo di $\Xi^{(1)}_{p,\mathrm{loc}}$, assumiamo adesso come insieme dei controlli ammissibili $\mathcal{U}$ l'intero spazio $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $p \in [1, +\infty]$.

Studiamo il Problema 6.1.

Il Problema 6.1 è risolubile rispetto al luogo finale $l(0, 0)$ (ciò è un'ovvia conseguenza di quanto provato nell'Esempio 8.2, nel quale $\mathcal{U}$ era un sottoinsieme proprio di $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$) e quindi, per il Teorema 9.1, rispetto ad ogni luogo finale $l(a', b')$, con $(a', b') \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[$.

Dimostriamo che, invece, il Problema 6.1 non è risolubile rispetto al luogo finale $l(a', b')$ se $a' < 0$ oppure $b' < 0$.

Consideriamo il caso $b' < 0$. Fissato un qualunque $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$, con $a_0 \le a'$, $b_0 \le b'$, e posto

$$\gamma_{(a',b')} z(\,\cdot\,; (a_0, b_0), (0, 0), U) = (\varphi, \psi) ,$$

si ha

$$\varphi(t) = \int_{a_0}^{a'+t} \int_{b_0}^{b'} F(u, v) U(u, v)\, du dv \qquad \forall t \in [0, +\infty[\ ,$$

quindi

$$\varphi'(t) = \int_{b_0}^{b'} F(a' + t, v) U(a' + t, v) dv \qquad \text{q.o. } t \in [0, +\infty[\ ,$$

da cui

$$\varphi'(t) = 0 \qquad \text{q.o. } t \in \Big[\max\{0, -a' - \frac{1}{b'}\}, +\infty \Big[\ ,$$

dunque la funzione φ è costante in un intervallo; ciò comporta che

$$\bigcup_{a_0 \leq a', b_0 \leq b'} \mathcal{A}((a_0, b_0), (a', b'); (0, 0), L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)) \neq \Xi^{(1)}_{p,\text{loc}}\ ,$$

cioè il relativo Problema 6.1 non è risolubile.

Analogamente si procede nel caso $a' < 0$.

Consideriamo adesso il Problema 6.2.

Ovviamente il Problema 6.2 è risolubile se $(a', b') \in [0, +\infty[\times[0, +\infty[$. Proviamo che non è, invece, risolubile se $a' < 0$ oppure $b' < 0$. A tale scopo, supponendo, ad esempio, che sia $b' < 0$, basta riprendere il ragionamento svolto a proposito del Problema 6.1 ed osservare inoltre che l'intervallo

$$\Big[\max\{0, -a' - \frac{1}{b'}\}, +\infty \Big[\ ,$$

nel quale la funzione φ risulta costante, dipende da (a', b') ma non da (a_0, b_0).

Il precedente Esempio 9.2 mostra che, tanto per il Problema 6.1 quanto per il 6.2, è possibile che vi sia risolubilità rispetto ad un luogo finale assegnato $l(a, b)$, ma tale risolubilità venga a mancare non appena si consideri un qualsiasi luogo finale assegnato $l(a', b')$ con $a' < a$ oppure $b' < b$.

Un esempio dello stesso tenore, relativamente al Problema 6.2, è il seguente.

Esempio 9.3. Siano $I = J = \mathbb{R}$; $n = m = 1$; $A = B = C = 0$ (quindi $V(u, v; x, y) = 1$ in $\mathbb{R}^4$); $F = \mathbf{1}_Z$, essendo Z l'insieme

$$Z = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\Big\} \cup \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\Big\} \cup \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| \leq 1\Big\}.$$

Sia, inoltre, $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$ l'elemento nullo di $\Xi^{(1)}_{p,\mathrm{loc}}$.

Siano, infine, $p \in \,]1, +\infty[$, $q \in [p, +\infty]$ e $\mathcal{U} = \mathcal{U}_q$.

Per il Teorema 8.1 il Problema 6.1 non è risolubile rispetto ad alcun luogo finale $l(a', b')$, con $(a', b') \in \mathbb{R}^2$.

Dal Corollario 7.1 segue invece che il Problema 6.2 è risolubile rispetto al luogo finale $l(a', b')$ se e soltanto se è $(a', b') \in [0, +\infty[\times[0, +\infty[$; infatti se $(a', b') \in [0, +\infty[\times[0, +\infty[$ sono soddisfatte le condizioni (7.6), (7.7) e (7.8); viceversa, se $(a', b') \notin [0, +\infty[\times[0, +\infty[$, ad es. poiché $a' < 0$, allora non vale la (7.7).

Osservazione 9.2. L'ipotesi di 0-incollamento dell'insieme $\mathcal{U}$ nel Teorema 9.1 ha un ruolo essenziale. Infatti, se l'insieme $\mathcal{U}$ non ha la proprietà di 0-incollamento, allora è possibile che il Problema 6.1 (ovvero il Problema 6.2) sia risolubile rispetto al luogo finale $l(a, b)$, ma non lo sia rispetto a qualche luogo finale $l(a', b')$ con $(a', b') \in I \times J$, $a' \geq a$, $b' \geq b$. Ciò segue dal successivo Esempio 9.2 che mostra, addirittura, un caso in cui, tanto per il Problema 6.1 quanto per il Problema 6.2, vi è un unico luogo finale $l(a, b)$ rispetto al quale si ha risolubilità.

Esempio 9.4. Consideriamo lo stesso processo di controllo scalare (6.3) dell'Esempio 6.1 e, fermo restando lo stato iniziale $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$, elemento nullo di $\Xi^{(1)}_{p,\mathrm{loc}}$, assumiamo adesso come insieme dei controlli ammissibili $\mathcal{U}$ il sottoinsieme di $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ definito nel modo di seguito descritto.

Fissati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
Q &= [-1, 0[\times[-1, 0[\,,\\
X_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq 0,\; -\frac{1}{x+1} \leq y < 0\right\},\\
X_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq 1,\; 0 \leq y < \frac{1}{x+1}\right\},\\
Y_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y \geq 0,\; -\frac{1}{y+1} \leq x < 0\right\},\\
Y_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y \geq 1,\; 0 \leq x < \frac{1}{y+1}\right\},
\end{aligned}
$$

indichiamo, per ogni $(\chi, \eta) \in \Xi^{(1)}_{p,\mathrm{loc}}$, con $U_{(\chi,\eta)}$ l'elemento di $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ definito ponendo

$$U_{(\chi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} \chi(0) & \text{q.o. } (x, y) \in Q\,, \\ (x+1)\chi'(x) & \text{q.o. } (x, y) \in X_1, \\ (x+1)|\chi'(x)| & \text{q.o. } (x, y) \in X_2, \\ (y+1)\eta'(y) & \text{q.o. } (x, y) \in Y_1, \\ (y+1)|\eta'(y)| & \text{q.o. } (x, y) \in Y_2, \\ 0 & \text{q.o. } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (Q \cup X_1 \cup X_2 \cup Y_1 \cup Y_2) \end{cases}$$

e diciamo $\mathcal{U}$ il sottoinsieme di $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ formato da tutti gli elementi $U_{(\chi,\eta)}$ al variare di (χ, η) in $\Xi^{(1)}_{p,\text{loc}}$.

Faremo vedere che il Problema 6.1 (e quindi anche il Problema 6.2) è risolubile rispetto al luogo finale $l(0, 0)$ e che, viceversa, rispetto ad un qualunque luogo finale $l(a, b)$ diverso da $l(0, 0)$ non c'è risolubilità del Problema 6.2 (e quindi neanche del Problema 6.1).

A tale scopo ricordiamo che, per il processo di controllo (6.3), per ogni $U \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ ed ogni $(a_0, b_0), (a, b) \in \mathbb{R}^2$, con $a_0 \le a$, $b_0 \le b$, si ha

$$z(x, y; (a_0, b_0), (0, 0), U) = \int_{a_0}^{x}\int_{b_0}^{y} U(u, v)\, du dv$$

$$\forall\, (x, y) \in [a_0, +\infty[\times[b_0, +\infty[$$

e pertanto

$$\gamma_{(a,b)} z(\,\cdot\,; (a_0, b_0), (0, 0), U) = (\varphi, \psi)\,,$$

dove (φ, ψ) è l'elemento di $\Xi^{(1)}_{p,\text{loc}}$ dato da

$$\varphi(t) = \int_{a_0}^{a+t}\int_{b_0}^{b} U(u, v)\, du dv \quad \forall t \in [0, +\infty[\,,$$

$$\psi(t) = \int_{a_0}^{a}\int_{b_0}^{b+t} U(u, v)\, du dv \quad \forall t \in [0, +\infty[\;;$$

conseguentemente si ha

$$\varphi'(t) = \int_{b_0}^{b} U(a+t, v)\, dv \quad \text{q.o. } t \in [0, +\infty[\,,$$

$$\psi'(t) = \int_{a_0}^{a} U(u, b+t)\, du \quad \text{q.o. } t \in [0, +\infty[\,.$$

Proviamo che il Problema 6.1 è risolubile rispetto al luogo finale $l(0,0)$ facendo vedere che, se $(a_0, b_0) = (-1, -1)$, è addirittura verificata la (6.2).

Infatti, assegnato un qualunque $(\chi, \eta) \in \Xi^{(1)}_{p,\mathrm{loc}}$, se prendiamo $U = U_{(\chi,\eta)}$, si ha, per ogni $t \in [0, +\infty[$,

$$\varphi(t) = \int_{-1}^{t}\int_{-1}^{0} U(u, v)\,du dv =$$

$$= \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{0} \chi(0)\,du dv + \int_{0}^{t}\int_{-\frac{1}{u+1}}^{0} (u+1)\chi'(u)\,du dv =$$

$$= \chi(0) + \int_{0}^{t} \chi'(u)\,du = \chi(t)$$

e, analogamente, $\psi(t) = \eta(t)$, pertanto $(\varphi, \psi) = (\chi, \eta)$.

Ciò prova la risolubilità del Problema 6.1 rispetto al luogo finale $l(0,0)$.

Dimostriamo adesso che rispetto ad un qualunque luogo finale $l(a,b)$ diverso da $l(0,0)$ il Problema 6.2 non è risolubile.

Supponiamo, per fissare le idee, che sia $a \neq 0$ e distinguiamo i tre casi: $a < -1$, $-1 \leq a < 0$ e $a > 0$. In maniera perfettamente analoga si procede se $b \neq 0$.

Se $a < -1$, allora è immediato verificare che, qualunque siano il controllo $U \in \mathcal{U}$ ed il luogo iniziale $l(a_0, b_0)$, con $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $a_0 \leq a$ e $b_0 \leq b$, risulta

$$\psi(t) = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty[\,.$$

Ciò implica, ovviamente, che il Problema 6.2 non è risolubile.

Se $-1 \leq a < 0$, allora, osservato che l'insieme Y_1 può scriversi

$$Y_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ -1 \leq x < 0,\ 0 \leq y \leq -\frac{x+1}{x}\}\,,$$

si ha che, per q.o. $t \in [0, +\infty[$ tale da aversi

$$b + t > -\frac{a+1}{a}$$

e quindi anche

$$b + t > -\frac{u+1}{u} \qquad \forall u \in [a_0, a]\,,$$

risulta, qualunque siano il controllo $U \in \mathcal{U}$ ed il luogo iniziale $l(a_0, b_0)$, con $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $a_0 \leq a$ e $b_0 \leq b$,

$$U(u, b+t) = 0 \quad \text{q.o. } u \in [a_0, a]$$

e quindi

$$\psi'(t) = 0 .$$

Pertanto abbiamo che per ogni elemento (φ, ψ) dell'insieme

$$\bigcup_{\substack{(a_0,b_0)\in\mathbb{R}^2 \\ a_0\leq a,b_0\leq b}} \mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (0, 0), \mathcal{U}) \tag{9.4}$$

la derivata ψ' è quasi ovunque nulla nell'intervallo

$$\Big] \max\{0, -\frac{a+1}{a} - b\}, +\infty \Big[$$

(che dipende soltanto dal luogo finale $l(a, b)$). Ne segue facilmente che il Problema 6.2 non è risolubile rispetto a $l(a, b)$.

Esaminiamo, infine, il caso $a > 0$. Per provare che il Problema 6.2 non è risolubile facciamo vedere, questa volta, che esiste un intervallo $]\gamma, +\infty[\subseteq [0, +\infty[$, dipendente solo da (a, b), tale da aversi, per ogni elemento (φ, ψ) dell'insieme (9.4),

$$\psi'(t) \geq 0 \quad \text{q.o. } t \in]\gamma, +\infty[.$$

Da ciò si deduce facilmente che il Problema (6.2) non è risolubile rispetto a $l(a, b)$.

Sia

$$\gamma = \max\{1 - b, \frac{1-a}{a} - b, 0\} ,$$

sicché da $t > \gamma$ segue che è pure

$$b + t > 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{b+t+1} < a .$$

Conseguentemente, per ogni controllo $U = U_{(\chi,\eta)} \in \mathcal{U}$, risulta, per q.o. $t \in]\gamma, +\infty[$,

$$U(u, b+t) = \begin{cases} (b+t+1)\eta'(b+t) & \text{q.o. } u \in [-(b+t+1), 0[, \\ (b+t+1)|\eta'(b+t)| & \text{q.o. } u \in [0, b+t+1[, \\ 0 & \text{q.o. } u \in \mathbb{R} \setminus [-(b+t+1), b+t+1[, \end{cases}$$

e da ciò segue che è $\psi'(t) \geq 0$; infatti, se $a_0 < -\frac{1}{b+t+1}$, si ha

$$\psi'(t) = \int_{a_0}^{a} U(u, b+t)\, du = \int_{-\frac{1}{b+t+1}}^{\frac{1}{b+t+1}} U(u, b+t)\, du =$$

$$= \int_{-\frac{1}{b+t+1}}^{0} (b+t+1)\eta'(b+t)\,du + \int_{0}^{\frac{1}{b+t+1}} (b+t+1)|\eta'(b+t)|\,du =$$

$$= \eta'(b+t) + |\eta'(b+t)| \geq 0 \;;$$

se $-\frac{1}{b+t+1} \leq a_0 < 0$, allora

$$\psi'(t) = \int_{a_0}^{\frac{1}{b+t+1}} U(u, b+t)\,du =$$

$$= \int_{a_0}^{0} (b+t+1)\eta'(b+t)\,du + \int_{0}^{\frac{1}{b+t+1}} (b+t+1)|\eta'(b+t)|\,du =$$

$$= |a_0|\eta'(b+t) + |\eta'(b+t)| \geq |a_0|(\eta'(b+t) + |\eta'(b+t)|) \geq 0 \;;$$

infine, se $a_0 \geq 0$, risulta

$$U(u, b+t) \geq 0 \qquad \text{q.o. } u \in [a_0, a]$$

e quindi $\psi'(t) \geq 0$.

10. I casi $a = \sup I$ e $b = \sup J$.

Mostriamo, infine, come l'ipotesi

$$a < \sup I \;,\quad b < \sup J \;, \tag{10.1}$$

assunta a partire dal n. 5 per semplificare l'esposizione, possa essere rimossa nella trattazione sin qui svolta.

Per quanto riguarda il n. 5, cominciamo con l'osservare che il suo contenuto resta inalterato se invece della (10.1) è verificata l'ipotesi più debole

$$a_0 < \sup I \;,\quad b_0 < \sup J \;, \tag{10.2}$$

utilizzata nel n. 4.

Nel caso in cui neanche la (10.2) è verificata, per riottenere i risultati del n. 5 basta estendere quelli del n. 4. A tale scopo, continuando ad utilizzare il simbolo $L_{I_{a_0}, J_{b_0}}$ per denotare l'insieme

$$L_{I,J} \cap ([a_0, +\infty[\times[b_0, +\infty[)$$

anche se gli insiemi I_{a_0}, J_{b_0} non sono entrambi intervalli non degeneri, notiamo che le restrizioni all'insieme $L_{I_{a_0},J_{b_0}}$ delle funzioni $z \in W^*_{p,\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$, soluzioni di (E) verificanti la condizione $\gamma_{(a_0,b_0)}z = (\varphi_0, \psi_0)$, coincidono con un'unica funzione continua, che seguiteremo a denotare con $z(\cdot; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U)$, per la quale vale ancora la rappresentazione data dalle (4.4) e (4.5); in particolare la traccia su $l(a, b)$ di una qualunque delle predette soluzioni di (E) individua un unico elemento di $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$, che continuiamo ad indicare con $\gamma_{(a,b)}z(\cdot; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U)$.

È facile poi verificare che l'applicazione

$$((\varphi_0, \psi_0), U) \to \gamma_{(a,b)}z(\cdot; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U) \quad , \tag{10.3}$$

da $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}} \times L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ in $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$, è lineare e continua.

Da quanto premesso segue che il contenuto del n. 5 resta valido anche se non è verificata la (10.2).

Una volta acquisita l'estensione del n. 5, quella nei nn. 6, 7 e 8 ne è un'immediata conseguenza.

Infine, per quanto riguarda il n. 9, basta tenere presente che, se non è verificata la (10.1), l'applicazione g considerata nella dimostrazione del Teorema 9.1 è ancora lineare e continua dato che, come abbiamo prima osservato a proposito della (10.3), l'applicazione

$$((\varphi_0, \psi_0), U) \to \gamma_{(a',b')}z(\cdot; (a, b), (\varphi_0, \psi_0), U) \quad ,$$

da $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}} \times L^p_{\mathrm{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ in $\Xi^{(n)}_{p,\mathrm{loc}}$, è lineare e continua.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Conti, *Problemi di controllo e di controllo ottimale,* UTET, Torino, 1974.

[2] R. Di Vincenzo - A. Villani, *Sopra un problema ai limiti per una equazione lineare del terzo ordine di tipo iperbolico. Esistenza, unicità e rappresentazione della soluzione,* Le Matematiche, 32 (1977), pp. 211–238.

[3] N. Dunford - J.T. Schwartz, *Linear operators,* Part I, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.

[4] G. Pulvirenti - G. Santagati, *Processi di controllo con parametri distribuiti in insiemi non limitati. Controllabilità completa approssimata,* Ann. Mat. Pura Appl., (4) 33 (1983), pp. 35–50.

[5] G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani, *Processi di controllo con parametri distribuiti in insiemi non limitati. Insieme raggiungibile,* Boll. Un. Mat. Ital. B, (7) 4 (1990), pp. 345–379.

[6] G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani, *Processi di controllo con parametri distribuiti in insiemi non limitati. Problemi di controllo,* Le Matematiche, 51 (1996), pp. 413–443.

[7] G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani, *Control processes with distributed parameters in unbounded sets. Approximate controllability with variable initial locus,* in *Variational analysis and applications*, F. Giannessi - A. Maugeri editors, Springer, 2005, pp. 855–887.

[8] G. Sturiale, *Un problema di Darboux in un insieme non limitato. Esistenza, unicità e dipendenza continua della soluzione,* Le Matematiche, 53 (1998), pp. 359–373.

[9] M.B. Suryanarayana, *A Sobolev space and a Darboux Problem,* Pacific J. Math., 69 (1977), pp. 535–550.

[10] A. Villani, *Un problema al contorno per un sistema lineare iperbolico su un insieme non limitato,* Le Matematiche, 36 (1981), pp. 215–234.

[11] A. Villani, *Processi di controllo con parametri distribuiti in insiemi non limitati. Controllabilità completa esatta,* Ann. Mat. Pura Appl., (4) 33 (1983), pp. 19–33.

[12] A. Villani, *On the metrizability of* $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mu)$*,* Le Matematiche, 38 (1983), pp. 237–244.

Dipartimento di Matematica e Informatica,
Università di Catania,
Viale A. Doria 6, 95125 Catania (ITALY)
e-mail: villani@dmi.unict.it