LE MATEMATICHE
Vol. LX (2005) – Fasc. II, pp. 279–288

RISULTATI DI ESISTENZA PER ALCUNE CLASSI DI DISEQUAZIONI VARIAZIONALI-EMIVARIAZIONALI DI TIPO ELLITTICO

SALVATORE A. MARANO

The main purpose of this lecture is to present some basic notions on variational and variational-hemivariational inequalities as well as two recent existence results in the elliptic case. A wide bibliography is also provided.

1. Sulle disequazioni emivariazionali.

Scrive K.-C. Chang in un noto lavoro [3] del 1981:

"The interest in extending the theory of nonlinear PDEs to PDEs with discontinuous nonlinearities has been increasing daily. The reasons are twofold:
(1) Many free boundary problems may be reduced to BVPs for PDEs with discontinuous nonlinearites.
(2) Sometimes, in dealing with a PDE problem, it is beneficial to put the original PDE into a large category, for instance, PDEs with discontinuous nonlinearities.

Simply speaking, a PDE with discontinuous nonlinearity is as follows:

$$-\Delta u = \phi(u) \quad \text{in}\,\Omega\,, \qquad u = 0 \quad \text{on}\,\partial\Omega\,,$$

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 35J20, 35J85, 49J40.

Key words and phrases. Elliptic hemivariational inequalities, Elliptic variational-hemivariational inequalities, Critical points of non-smooth functions.

where ϕ is only a locally bounded measurable function. [...] Since $\phi(t)$ may be discontinuous, the corresponding functional

$$f(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx + \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} \phi(t)\, dt$$

may be non-differentiable; variational methods for non-differentiable functionals are needed."

Queste considerazioni hanno dato l'avvio allo studio della teoria dei punti critici di funzionali localmente lipschitziani. Detta teoria, introdotta da K.-C. Chang nel 1981, è stata poi applicata, sia dallo stesso Chang sia da altri autori, alle equazioni ellittiche con termini non lineari discontinui. Ulteriori contributi astratti e applicazioni sono stati forniti da Radulescu [11], Motreanu-Varga [10], Kourogenis-Papageorgiou [4], Barletta-M. [1] e Motreanu-M. [8].

Richiamiamo la definizione di punto critico data da Chang. Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach reale e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ una funzione localmente lipschitziana.

Definizione 1. Assegnati $u, v \in X$, il numero reale

$$\Phi^0(u; v) := \limsup_{w\to u,\, t\to 0^+} \frac{\Phi(w + tv) - \Phi(w)}{t}$$

si chiama derivata direzionale generalizzata di Φ in u nella direzione v.

Definizione 2. Sia $u \in X$. L'insieme

$$\{u^* \in X^* : \langle u^*, v\rangle \le \Phi^0(u; v)\ \forall\, v \in X\}$$

si chiama gradiente generalizzato di Φ in u e si denota con $\partial\Phi(u)$.

Usando il teorema di Hahn-Banach si dimostra che $\partial\Phi(u) \neq \emptyset$. Nel caso particolare in cui $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ risulta

$$\Phi^0(u; v) = \langle \Phi'(u), v\rangle\,, \quad \partial\Phi(u) = \{\Phi'(u)\}\,.$$

Le definizioni 1 e 2 sono dovute a F.H. Clarke [13].

Esempio 1. Se $X := \mathbb{R}$ e $\Phi(u) := |u|$ per ogni $u \in X$ allora

$$\Phi^0(u; v) = \begin{cases} v\,\mathrm{sign}(u) & \text{se } u \neq 0, \\ |v| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Conseguentemente,

$$\partial\Phi(u) = \begin{cases} \{-1\} & \text{per } u < 0, \\ [-1, 1] & \text{se } u = 0, \\ \{1\} & \text{per } u > 0. \end{cases}$$

Esempio 2. Sia $j \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Poniamo, per ogni $\delta > 0$ e $t \in \mathbb{R}$,

$$\underline{j}_\delta(t) := \operatorname{ess\,inf}\{j(\tau) : |\tau - t| < \delta\}, \quad \overline{j}_\delta(t) := \operatorname{ess\,sup}\{j(\tau) : |\tau - t| < \delta\},$$

$$\underline{j}(t) := \lim_{\delta \to 0^+} \underline{j}_\delta(t), \quad \overline{j}(t) := \lim_{\delta \to 0^+} \overline{j}_\delta(t).$$

È ovvio che $\underline{j}(t) \leq \overline{j}(t)$. Se

$$J(\xi) := \int_0^\xi j(t)\,dt, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

allora (cfr. [15[, Proposition 1.7)

$$\partial J(\xi) = [\underline{j}(\xi), \overline{j}(\xi)].$$

Definizione 3. Diciamo che $u \in X$ è un punto critico di Φ quando $0 \in \partial\Phi(u)$, cioè

$$\Phi^0(u; v) \geq 0 \quad \forall\, v \in X. \tag{1}$$

Relativamente alle disequazioni emivariazionali di tipo ellittico, riportiamo il risultato di esistenza contenuto in [1].

Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, con frontiera $\partial\Omega$ sufficientemente regolare, $a \in L^\infty(\Omega)$ tale che

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x \in \Omega} a(x) > 0$$

e $j : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supponiamo che:

(j_1) *j sia misurabile rispetto a ciascuna variabile separatamente.*

(j_2) *esistano $a_1 > 0$ e $p \in]2, 2^*[$ tali che*

$$|j(x,t)| \leq a_1(1 + |t|^{p-1}) \ \ in \ \ \Omega \times \mathbb{R}.$$

(j_3) $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{j(x,t)}{t} = 0$ *uniformemente rispetto a $x \in \Omega$.*

(j_4) *esistano $\mu > 2$ e $a_2 \in \mathbb{R}$ tali che*

$$J_x^0(\xi; \xi) \leq \mu J(x, \xi) + a_2$$

in $\Omega \times \mathbb{R}$*, dove*

$$J(x,\xi) := \int_0^{\xi} -j(x,t)\,dt$$

e J_x^0 *denota la derivata direzionale generalizzata di* $\xi \mapsto J(x,\xi)$*.*

(j_5) *esista* $a_3 > 0$ *tale che*

$$J(x,\xi) \le \min\{0, a_3(1-|\xi|^{\mu})\}$$

in $\Omega \times \mathbb{R}$*.*

Assegnato $\lambda \in \mathbb{R}$, denotiamo con (P_λ) il problema di determinare $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$-\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx + \lambda\int_\Omega a(x)u(x)v(x)\,dx \le \int_\Omega J_x^0(u(x);v(x))\,dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Esso è noto in letteratura con il nome di *disequazione emivariazionale di tipo ellittico*.

Osservazione 1. Si dimostra che i punti critici del funzionale localmente lipschitziano

$$\Phi(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u(x)|^2 - \lambda a(x)u(x)^2)\,dx + \int_\Omega J(x,u(x))\,dx\,, \qquad u \in H_0^1(\Omega)\,,$$

vale a dire le soluzioni di (1), sono anche soluzioni di (P_λ).

Teorema 1. *Nelle ipotesi* (j_1)–(j_5) *il problema* (P_λ) *ammette almeno una soluzione non banale per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

Osservazione 2. Se $j \in C^0(\Omega \times \mathbb{R})$ allora le soluzioni di (P_λ) coincidono con le soluzioni deboli del problema agli autovalori

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u + j(x,u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

diffusamente studiato in [19].

Osservazione 3. Nel caso in cui $\lambda = 0$ il Teorema 1 è stato recentemente esteso alle disequazioni emivariazionali con p-Laplaciano; si veda [9], Theorem 3.1.

Osservazione 4. Supponiamo, per semplicità, $\lambda = 0$ e j indipendente da x. Nella dimostrazione del Teorema 1 si prova che esiste $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che $u \neq 0$ e $-\Delta u \in \partial g(u)$, dove

$$g(v) := \int_\Omega -J(v(x))\,dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Siccome (cfr. ad esempio [3])

$$\partial g(v) \subseteq \{w \in L^2(\Omega) :\ \underline{j}(v(x)) \leq w(x) \leq \overline{j}(v(x)) \text{ q.o. in } \Omega\}\,, \qquad v \in H_0^1(\Omega)\,,$$

allora la funzione u soddisfa le disuguaglianze

$$\underline{j}(u(x)) \leq -\Delta u(x) \leq \overline{j}(u(x))$$

per quasi ogni $x \in \Omega$. Pertanto, $u \in H_0^1(\Omega)$ è una soluzione non banale del problema

$$\begin{cases} \underline{j}(u) \leq -\Delta u \leq \overline{j}(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con termine non lineare discontinuo j. Alla fine della bibliografia riportiamo un elenco (da [20] a [36]), in ordine cronologico, di lavori sull'argomento.

2. Sulle disequazioni variazionali-emivariazionali.

Nel 1986 A. Szulkin, in [12], introdusse la teoria dei punti critici per funzioni f su uno spazio di Banach reale $(X, \|\cdot\|)$, soddisfacenti la condizione

(h_f) *$f(x) := \Phi(x) + \psi(x)$, $x \in X$, dove $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $\psi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è convessa, propria e s.c.i.*

Definizione 4. Denotato con D_ψ il dominio di ψ, un punto $u \in D_\psi$ si dice critico per f quando

$$\langle \Phi'(u), v - u\rangle + \psi(v) - \psi(u) \geq 0 \quad \forall\, v \in X\,, \tag{2}$$

ossia se

$$\Phi^0(u; v - u) + \psi(v) - \psi(u) \geq 0 \quad \forall\, v \in X\,. \tag{3}$$

Lo stesso autore osserva poi che "Inequalities of this type arise in a number of problems of physics [14]" e fornisce applicazioni dei risultati astratti a problemi ai limiti di tipo ellittico, precisando che "Our examples include variational inequalities and variational equations with single- and multivalued operators".

Parecchi anni dopo, nel 1998, D. Motreanu e P.D. Panagiotopoulos, ispirandosi ai lavori di Chang e di Szulkin menzionati sopra, svilupparono in [15] la teoria dei punti critici per funzioni f del tipo

(H_f) $f(x) := \Phi(x)+\psi(x)$, $x \in X$, *dove* $\Phi : X \to \mathbb{R}$ *è localmente lipschitziana mentre* $\psi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *è convessa, propria e s.c.i.*

La nozione di punto critico è sempre quella di Szulkin, ma con (3) al posto di (2).

Leggiamo a p. 59 della monografia [15]: "Such a mathematical model - called a variational-hemivariational inequality - can be used to formulate various problems in Mechanics involving both monotone and non-monotone possibly multivalued boundary conditions, whose complete description can be found in the books of Panagiotopoulos [18] and Naniewicz and Panagiotopoulos [17]".

Osservazione 5. È chiaro che quando $\psi \equiv 0$ la Definizione 4 coincide con la Definizione 3. Se $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $\psi \equiv 0$ allora la (3) si riduce alla classica equazione di Eulero $\Phi'(u) = 0$.

Ulteriori contributi astratti e applicazioni sono stati poi ottenuti da diversi autori, fra cui Motreanu-M. [7], [35], [36], Livrea-M. [5], Candito-Motreanu-M. [2], Papageorgiou-M. [9] e Livrea-Motreanu-M. [6]. Si veda anche la recentissima monografia di Motreanu-Radulescu [16].

Per quanto concerne le disequazioni variazionali-emivariazionali di tipo ellittico riportiamo a mo' di esempio il risultato seguente, il quale è un caso particolare del Theorem 4.1 in [9].

Siano Ω, j e J come nel paragrafo 1, ma con (j_4) e (j_5) sostituite, rispettivamente, da

(j_4') *esistano* $\mu \geq p$ *ed* $M > 0$ *tali che*

$$J_x^0(\xi; \xi) \leq \mu J(x, \xi)$$

in $\Omega \times \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi| \geq M\}$.

(j_5') $J(x, \xi) \leq 0$ *in* $\Omega \times \mathbb{R}$. *Inoltre, esiste* $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ *soddisfacente* $u_1(x) > 0$ *quasi ovunque in* Ω *e*

$$\int_{\Omega(u_1(x) \geq M)} J(x, u_1(x))\, dx < 0\,.$$

Sia poi $G : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ tale che:

(g_1) *G è $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-misurabile, $G(\cdot, 0) = 0$ e $G(x, \cdot)$ è convessa, propria e s.c.i.*

(g_2) *esiste $b \geq 0$ per cui risulta*

$$G(x, 2\xi) \leq (1 + \mu)G(x, \xi) + b$$

in $\Omega \times \mathbb{R}$.

(g_3) *se u_1 è la funzione che figura nella condizione (j_5'), allora*

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t^\sigma} \int_\Omega G(x, tu_1(x))\, dx < +\infty$$

per qualche $\sigma \in]0, \mu[$.

Indichiamo con (P) il problema di determinare $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che $G(\cdot, u(\cdot)) \in L^1(\Omega)$ e inoltre

$$-\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla(v(x) - u(x))dx \leq \int_\Omega J_x^0(u(x); v(x) - u(x))dx$$
$$+ \int_\Omega G(x, v(x))dx - \int_\Omega G(x, u(x))dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Esso è noto in letteratura con il nome di *disequazione variazionale-emivariazionale di tipo ellittico.*

Osservazione 6. Si dimostra che i punti critici del funzionale $f(u) := \Phi(u) + \psi(u)$, $u \in H_0^1(\Omega)$, dove

$$\Phi(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx + \int_\Omega J(x, u(x))\, dx\,,$$
$$\psi(u) := \int_\Omega G(x, u(x))\, dx\,,$$

vale a dire le soluzioni di (3), sono anche soluzioni di (P).

Teorema 2. *Supponiamo soddisfatte le ipotesi* (j_1)–(j_3), (j_4'), (j_5') *e* (g_1)–(g_3). *Allora* (P) *ammette almeno una soluzione non banale.*

Osservazione 7. Sia $G : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ definita da

$$G(x, \xi) := \begin{cases} -g(x)\xi & \text{se } \xi \geq 0, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $g \in L^2(\Omega)$ e $g(x) \leq 0$ quasi ovunque in Ω. Si verifica facilmente che la funzione G soddisfa (g_1)–(g_3) con $b = 0$. In tal caso il precedente risultato generalizza il Theorem 3.3 in [15] scritto per $\lambda = 0$; cfr. anche [12], Theorem 5.1.

Osservazione 8. Sia $G : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ definita da

$$G(x, \xi) := \begin{cases} 0 & \text{se } \xi \geq 0, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Con questa scelta di G il problema (P) diventa: determinare $u \in K$ tale che

$$-\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla(v(x) - u(x))dx \leq \int_\Omega J_x^0(u(x); v(x) - u(x))\, dx$$

per ogni $v \in K$, dove

$$K := \{v \in H_0^1(\Omega) : \ v(x) \geq 0 \text{ q.o. in } \Omega\}\,.$$

Altri esempi che derivano dalla Meccanica e dalla Fisica sono descritti in [14].

BIBLIOGRAFIA

Articoli

[1] G. Barletta - S.A. Marano, *Some remarks on the critical point theory for locally Lipschtiz functions,* Glasgow Math. J., 45 (2003), pp. 131–141.

[2] P. Candito - S.A. Marano - D. Motreanu, *Critical points for a class of non-differentiable functions and applications,* Discrete Contin. Dyn. Syst., 13 (2005), pp. 175–194.

[3] K.-C. Chang, *Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations,* J. Math. Anal. Appl., 80 (1981), pp. 102–129.

[4] N.C. Kourogenis - N.S. Papageorgiou, *Nonsmooth critical point theory and nonlinear elliptic equations at resonance,* J. Austral. Math. Soc. (Series A), 69 (2000), pp. 245–271.

[5] R. Livrea - S.A. Marano, *Existence and classification of critical points for nondifferentiable functions,* Adv. Differential Equations, 9 (2004), pp. 961–978.

[6] R. Livrea - S.A. Marano - D. Motreanu, *Critical points for nondifferentiable functions in presence of splitting,* J. Differential Equations, in corso di stampa.

[7] S.A. Marano - D. Motreanu, *A deformation theorem and some critical point results for non-differentiable functions,* Topol. Methods Nonlinear Anal., 22 (2003), pp. 139–158.

[8] S.A. Marano - D. Motreanu, *A critical point result for non-differentiable indefinite functionals,* Comment. Math. Univ. Carolin., 45 (2004), pp. 663–679.

[9] S.A. Marano - N.P. Papageorgiou, *On some elliptic hemivariational and variational-hemivariational inequalities,* Nonlinear Anal., 62 (2005), pp. 757–774.

[10] D. Motreanu - C. Varga, *Some critical point results for locally Lipschitz functionals,* Comm. Appl. Nonlinear Anal., 4 (1997), pp. 17–33.

[11] V. Radulescu, *Mountain pass theorem for non-differentiable functions and applications,* Proc. Japan Acad. (Series A), 69 (1993), pp. 193–198.

[12] A. Szulkin, *Minimax principles for lower semicontinuous functions and applications to nonlinear boundary value problems,* Ann. Inst. Henri Poincaré, 3 (1986), pp. 77–109.

Monografie

[13] F.H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis,* Classics Appl. Math., 5, SIAM, Philadelphia, 1990.

[14] C. Duvaut - J.L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics,* Springer, Berlin, 1976.

[15] D. Motreanu - P.D. Panagiotopoulos, *Minimax Theorems and Qualitative Properties of the Solutions of Hemivariational Inequalities,* Nonconvex Optim. Appl., 29, Kluwer, Dordrecht, 1998.

[16] D. Motreanu - V. Radulescu, *Variational and Non-variational Methods in Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems,* Nonconvex Optim. Appl., 67, Kluwer, Dordrecht, 2003.

[17] Z. Naniewicz - P.D. Panagiotopoulos, *Mathematical Theory of Hemivariational Inequalities and Applications,* Marcel Dekker, New York, 1995.

[18] P.D. Panagiotopoulos, *Hemivariational Inequalities. Applications to Mechanics and Engineering,* Springer, New York, 1993.

[19] P.H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations,* CBMS Reg. Conf. Ser. in Math., 65, Amer. Math. Soc., Providence, 1986.

Elenco, in ordine cronologico, di articoli sulle equazioni ellittiche con termini non lineari discontinui

[20] H.J. Kuiper, *On positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems,* Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 20 (1971), pp. 113–138.

[21] J. Rauch, *Discontinuous semilinear differential equations and multiple valued maps,* Proc. Amer. Math. Soc., 64 (1977), pp. 272–282.

[22] I. Massabò - C.A. Stuart, *Elliptic eigenvalue problems with discontinuous nonlinearities,* J. Math. Anal. Appl., 66 (1978), pp. 261–281.

[23] C.A. Stuart - J.F. Toland, *A variational method for boundary value problems with discontinuous nonlinearities,* J. London Math. Soc. (2), 21 (1980), pp. 319–328.

[24] K.-C. Chang, *The obstacle problem and partial differential equations with discontinuous nonlinearities,* Comm. Pure Appl. Math., 33 (1980), pp. 117–146.

[25] K.-C. Chang, *Variational methods for nondifferentiable functions and their applications to partial differential equations,* J. Math. Anal. Appl., 80 (1981), pp. 102–129.

[26] K.-C. Chang, *Free boundary value problems and the set-valued mappings,* J. Differential Equations, 49 (1983), pp. 1–28.

[27] A. Ambrosetti - A. Badiale, *The dual variational principle and elliptic problems with discontinuous nonlinearities,* J. Math. Anal. Appl., 140 (1989), pp. 363–373.

[28] S. Carl - S. Heikkilä, *On extremal solutions of an elliptic boundary value problem involving discontinuous nonlinearities,* Differential Integral Equations, 5 (1992), pp. 581–589.

[29] S.A. Marano, *Existence theorems for a semilinear elliptic boundary value problem,* Ann. Polon. Math., 60 (1994), pp. 57–67.

[30] S.A. Marano, *Elliptic boundary-value problems with discontinuous nonlinearities,* Set-Valued Anal., 3 (1995), pp. 167–180.

[31] S.A. Marano, *Implicit elliptic boundary-value problems with discontinuous nonlinearities,* Set-Valued Anal., 4 (1996), pp. 287–300.

[32] S.A. Marano, *Elliptic eigenvalue problems with highly discontinuous nonlinearities,* Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997), pp. 2953–2961.

[33] S.A. Marano, *Elliptic equations and differential inclusions,* Nonlinear Anal., 30 (1997), pp. 1763–1770.

[34] G. Bonanno - S.A. Marano, *Elliptic problems in $\mathbb{R}^n$ with discontinuous nonlinearities,* Proc. Edinburgh Math. Soc., 43 (2000), pp. 545–558.

[35] S.A. Marano - D. Motreanu, *On a three critical point theorem for non-differentiable functions and applications to nonlinear boundary value problems,* Nonlinear Anal., 48 (2002), pp. 37–52.

[36] S.A. Marano - D. Motreanu, *Infinitely many critical points of non-differentiable functions and applications to a Neumann type problem involving the p-Laplacian,* J. Differential Equations, 182 (2002), pp. 108–120.

Dipartimento di Patrimonio Architettonico e Urbanistico,
Università degli Studi Mediterranea di Reggio Calabria,
Salita Melissari - Feo di Vito, 89100 Reggio Calabria (ITALY)
e-mail: marano@unirc.it