LE MATEMATICHE
Vol. LX (2005) – Fasc. II, pp. 299–314

SUR L'INÉGALITÉ DE LEWY-STAMPACCHIA POUR LE PROBLÈME BILATÉRAL ET POUR LE PROBLÈME QUADRATIQUE

ABDELHAFID MOKRANE - FRANÇOIS MURAT

In this paper, we present two results that we recently proved in [18] and [19]: on the first hand, the Lewy-Stampacchia's inequality for the bilateral obstacle problem with a fairly general Leray-Lions operator; on the second hand, again the Lewy-Stampacchia's inequality but now for the unilateral obstacle problem with a quasilinear operator perturbed by a non linearity with quadratic growth in the gradient.

Introduction.

Dans cet article, nous présentons deux résultats que nous avons démontrés récemment : d'une part l'inégalité de Lewy-Stampacchia pour le problème bilatéral relatif à un opérateur de Leray-Lions du deuxième ordre assez général, et d'autre part cette même inégalité de Lewy-Stampacchia pour le problème unilatéral avec un opérateur quasilinéaire perturbé par une non linéarité à croissance quadratique par rapport au gradient.

L'inégalité de Lewy-Stampacchia a d'abord été démontrée dans [15] pour le problème de Laplace avec obstacle. Elle a ensuite été généralisée à de nombreux cas de problèmes du deuxième ordre avec obstacle, car c'est un outil puissant pour démontrer des résultats d'existence et de régularité. Il serait vain d'essayer de donner une bibliographie de l'ensemble de ces travaux. Nous nous bornerons seulement à citer le livre [20], et parmi les travaux récents, l'article [3] qui utilise la pénalisation homographique pour démontrer l'inégalité de Lewy-Stampacchia et l'article [13].

Dans les dernières années, nous avons entrepris l'étude de l'inégalité de Lewy-Stampacchia par une nouvelle démonstration basée sur la pénalisation naturelle. Nous en avons d'abord donné dans [16] une nouvelle démonstration dans le cas du problème unilatéral (cet article présente, avant la démonstration du cas général, un exposé trés simple de notre démonstration dans un cas modèle). Nous avons ensuite considéré dans [18] le cas du problème bilatéral avec un opérateur de Leray-Lions assez général, et dans [19] le cas du problème quasilinéaire où l'opérateur comporte un terme avec croissance quadratique par rapport au gradient, deux extensions qui présentent chacune des difficultés notables. Ce sont ces résultats que nous présentons dans le présent article.

1. L'inégalité de Lewy-Stampacchia pour le problème bilatéral.

1.1. Position du problème et hypothèses.

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats de notre article [18]. Nous considérons l'inéquation variationnelle avec deux obstacles pour un opérateur de Leray-Lions

$$
\begin{cases} u \in K(\psi_1, \psi_2), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, u, Du)(Dv - Du)\,dx + \int_\Omega a_0(x, u)(v - u)\,dx \geq \langle f, v - u\rangle, \\ \hfill \forall v \in K(\psi_1, \psi_2), \end{cases} \tag{1}
$$

et nous démontrons que toute solution de (1) vérifie l'inégalité de Lewy-Stampacchia

$$
\begin{cases} -(-\mathrm{div}(a(x, \psi_2, D\psi_2)) + a_0(x, \psi_2) - f(x))^- \leq \\ \qquad \leq -\mathrm{div}(a(x, u, Du)) + a_0(x, u) - f(x) \leq \\ \qquad\qquad \leq (-\mathrm{div}(a(x, \psi_1, D\psi_1)) + a_0(x, \psi_1) - f(x))^+, \end{cases} \tag{2}
$$

sous des hypothèses sur les données Ω, p, a, a_0, f, ψ_1 et ψ_2 que nous précisons maintenant.

On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$ non nécessairement régulière, et que p et p' sont tels que

$$
1 < p\,,\ p' < +\infty, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{3}
$$

On suppose que les obstacles sont des fonctions mesurables $\psi_1, \psi_2 : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ et que le convexe $K(\psi_1, \psi_2)$ défini par

$$K(\psi_1, \psi_2) = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \quad \psi_1 \leq v \leq \psi_2 \ \text{ p.p. dans } \Omega\} \tag{4}$$

est non vide, i.e. que

$$\exists\, v^\star \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \psi_1 \leq v^\star \leq \psi_2, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \tag{5}$$

et que le second membre vérifie

$$f \in W^{-1,p'}(\Omega). \tag{6}$$

On suppose que la fonction $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory qui est strictement monotone en ξ, i.e. qui vérifie pour presque tout $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $\eta \in \mathbb{R}^N$ avec $\xi \neq \eta$

$$\begin{cases} x \to a(x, s, \xi) \ \text{ est mesurable}, \qquad (s, \xi) \to a(x, s, \xi) \ \text{ est continue}, \\ (a(x, s, \xi) - a(x, s, \eta))(\xi - \eta) > 0. \end{cases} \tag{7}$$

On suppose de plus qu'il existe $\overline{\alpha} > 0, \overline{\beta} \geq 0, \overline{\gamma} > 0, \overline{h} \in L^1(\Omega)$ et $\overline{l} \in L^{p}(\Omega)$ tels que, pour presque tout $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\begin{cases} a(x, s, \xi)\xi \geq \overline{\alpha}|\xi|^p - \overline{\beta}|s|^{p-1} - |\overline{h}(x)|, \\ |a(x, s, \xi)| \leq \overline{\gamma}(|\overline{l}(x)| + |s| + |\xi|)^{p-1}. \end{cases} \tag{8}$$

On suppose en outre que pour tout $m > 0$ il existe $\alpha_m > 0$, $\gamma_m > 0$, $\delta_m \geq 0$, $h_m \in L^p(\Omega)$ et $l_m \in L^p(\Omega)$, tels que pour presque tout $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ tels que $|s| \leq m$ et $|t| \leq m$, et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et tout $\eta \in \mathbb{R}^N$, on a l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes :
ou bien

$$|a(x, s, \xi) - a(x, t, \xi)| \leq \gamma_m |s - t| (|l_m(x)| + |\xi|)^{p-1}, \tag{9}$$

ou bien

$$\begin{cases} (a(x, s, \xi) - a(x, s, \eta))(\xi - \eta) \geq \begin{cases} \alpha_m |\xi - \eta|^p \qquad \text{si} \quad p \geq 2, \\ \alpha_m \dfrac{|\xi - \eta|^2}{(|h_m(x)| + |\xi| + |\eta|)^{2-p}} \\ \qquad\qquad \text{si} \quad 1 < p \leq 2, \end{cases} \\ |a(x, s, \xi) - a(x, t, \xi)| \leq \begin{cases} \gamma_m |s - t|^{\frac{1}{p'} + \delta_m} (|l_m(x)| + |\xi|)^{p-1} \\ \qquad \text{si} \quad p \geq 2, \\ \gamma_m |s - t|^{\frac{1}{2} + \delta_m} (|l_m(x)| + |\xi|)^{p-1} \\ \qquad \text{si} \quad 1 < p \leq 2. \end{cases} \end{cases} \tag{10}$$

On suppose que la fonction $a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory qui est croissante au sens large en s, i.e. qui vérifie pour presque tout $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$(11) \qquad \begin{cases} x \to a_0(x, s) \quad \text{est mesurable,} \qquad s \to a_0(x, s) \quad \text{est continue,} \\ (a_0(x, s) - a_0(x, t))(s - t) \geq 0. \end{cases}$$

On suppose de plus qu'il existe $\overline{\beta}_0 > 0$ et $\overline{k}_0 \in L^p(\Omega)$ tels que pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a

$$(12) \qquad |a_0(x, s)| \leq \overline{\beta}_0(|\overline{k}_0(x)| + |s|)^{p-1}.$$

On définit l'opérateur $B : W^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ par

$$(13) \qquad \forall v \in W^{1,p}(\Omega), \quad B(v) = -\operatorname{div}(a(x, v, Dv)) + a_0(x, v) - f(x),$$

et le dual d'ordre $V_{p'}^\star$ de $W_0^{1,p}(\Omega)$ comme l'ensemble des éléments g de $W^{-1,p'}(\Omega)$ qui appartiennent aussi à l'ensemble des mesures de Radon $\mathcal{M}(\Omega)$ et qui sont tels que g^+ et g^- appartiennent à $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Enfin on fait sur les données l'une et/ou l'autre des hypothèses suivantes :

$$(14) \qquad \psi_1 \in W^{1,p}(\Omega), \qquad B(\psi_1) \in V_{p'}^\star,$$

et/ou

$$(15) \qquad \psi_2 \in W^{1,p}(\Omega), \qquad B(\psi_2) \in V_{p'}^\star.$$

Remarque 1.1. L'exemple modèle pour les fonctions a et a_0 est donné par

$$a(x, s, \xi) = \hat{a}(x)|\xi|^{p-2}\xi, \quad a_0(x, s) = \hat{a}_0(x)|s|^{p-2}s,$$

où $\hat{a} \in L^\infty(\Omega)$ et $\hat{a}_0 \in L^\infty(\Omega)$, avec $0 < \hat{\alpha} \leq \hat{a}(x) \leq \hat{\beta} < +\infty$, $0 < \hat{\alpha}_0 \leq \hat{a}_0(x) \leq \hat{\beta}_0 < +\infty$ (noter que $\hat{a}_0$ peut être nul). Pour cet exemple, les hypothèses (7), (8), (9), (10), (11), (12) sont satisfaites.

Remarque 1.2. Avec la notation (13), l'inéquation variationnelle (1) et l'inegalité de Lewy-Stampacchia (2) s'écrivent respectivement

$$\begin{cases} u \in K(\psi_1, \psi_2), \\ \langle B(u), v - u\rangle \geq 0, \quad \forall v \in K(\psi_1, \psi_2), \end{cases}$$

et

$$-(B(\psi_2))^- \leq B(u) \leq (B(\psi_1))^+,$$

où $\langle , \rangle$ est le crochet de dualité entre $W^{-1,p'}(\Omega)$ et $W_0^{1,p}(\Omega)$.

1.2. Résultats et commentaires.

Le résultat d'existence suivant est classique (voir par exemple [14]).

Proposition 1.1. *On suppose que l'on a* (3), (5), (6), (7), (8), (11), (12). *Alors il existe au moins une solution de* (1).

Le résultat d'unicité suivant est une variante de résultats connus (voir par exemple [1], [4], [8], [9]).

Proposition 1.2. *On se place sous les hypothèses de la Proposition 1.1 et on suppose de plus, d'une part que $a_0(x, s)$ est strictement croissante en s, et d'autre part que ou bien l'hypothèse* (9) *est satisfaite, ou bien l'hypothèse* (10) *est satisfaite avec $\delta_m = 0$. Alors la solution de* (1) *est unique.*

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 1.3. *On se place sous les hypothèses de la Proposition 1.1 et on suppose de plus que ou bien l'hypothèse* (9) *est satisfaite, ou bien l'hypothèse* (10) *est satisfaite avec $\delta_m > 0$. Alors, si l'hypothèse* (14) *sur ψ_1 et $B(\psi_1)$ est satisfaite, pour toute solution u de* (1)*, la distribution $B(u)$ définie par* (13) *vérifie*

$$B(u) \in V_{p'}^{\star}, \qquad (B(u))^+ \leq (B(\psi_1))^+. \tag{16}$$

De même, si l'hypothèse (15) *sur ψ_2 et $B(\psi_2)$ est satisfaite, pour toute solution u de* (1)*, la distribution $B(u)$ vérifie*

$$B(u) \in V_{p'}^{\star}, \qquad -(B(\psi_2))^- \leq -(B(u))^-. \tag{17}$$

Finalement, si à la fois les hypothèses (14) *et* (15) *sont satisfaites, pour toute solution u de* (1)*, la distribution $B(u)$ vérifie*

$$B(u) \in V_{p'}^{\star}, \qquad -(B(\psi_2))^- \leq B(u) \leq (B(\psi_1))^+, \tag{18}$$

i.e. l'inégalité de Lewy-Stampacchia (2).

Le résultat d'existence de la Proposition 1.1 est classique ; nous le démontrons dans [18] en utilisant la pénalisation naturelle

$$-\frac{1}{\varepsilon}(u - \psi_1)^- + \frac{1}{\varepsilon}(u - \psi_2)^+,$$

car cette pénalisation est à la base de notre démonstration de l'inégalité de Lewy-Stampacchia (voir aussi paragraphe 1.3 ci-dessous).

De même le résultat d'unicité de la Proposition 1.2 est une variante de résultats antérieurs, la seule nouveauté étant ici le fait que les hypothèse de lipschitzianité (9) ou de forte monotonie et d'hölderianité (10) sont imposées seulement localement (i.e. pour $|s| \leq m$ et $|t| \leq m$). La présence d'un terme d'ordre zéro strictement croissant $a_0(x, u)$ est cruciale pour obtenir ce résultat d'unicité.

En revanche le résultat du Théorème 1.3 est original. Son originalité tient aux trois faits suivants. D'une part, nous traitons le cas du convexe bilatéral, et ceci sous des hypothèses de régularité assez faibles sur les fonctions a et a_0 et sur les obstacles ψ_1 et ψ_2. Ces hypothèses n'entraînent pas l'unicité de la solution de l'inéquation (1) (ni de la solution de l'équation correspondante) (voir [4], [8], [9]), mais nous démontrons néanmoins l'inégalité de Lewy-Stampacchia pour toute solution de (1), et non seulement pour une seule solution de (1) comme nous l'avions fait dans [16] pour le problème unilatéral. D'autre part nous employons une méthode de démonstration originale, basée sur la pénalisation naturelle. Les résultats obtenus dans [18] peuvent d'ailleurs être considérés comme la suite de ceux obtenus dans nos articles [16] et [17] qui traitraient du cas unilatéral. Enfin cette méthode nous permet de démontrer indépendamment les deux parties (16) et (17) de l'inégalité de Lewy-Stampacchia : nous montrons par exemple que si ψ_1 et $B(\psi_1)$ vérifient (14), alors on a (16), même si l'on ne fait aucune autre hypothèse que (5) sur ψ_2 et $B(\psi_2)$.

1.3. Idée de la démonstration du Théorème 1.3.

La démonstration du Théorème 1.3 que nous donnons dans [18] est assez délicate et technique mais repose sur quelques idées simples.

La première idée est de modifier l'inéquation variationnelle (1) de manière à considérer, pour une solution donnée u de (1), un problème voisin pour lequel on a unicité. De facon précise, pour u donné on considère le problème modifié suivant : trouver $u^\star$ solution de

$$(19) \qquad \begin{cases} u^\star \in K(\psi_1, \psi_2), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, u^\star, Du^\star)(Dv - Du^\star)\, dx + \int_\Omega a_0(x, u^\star)(v - u^\star)\, dx \\ \displaystyle\quad + \int_\Omega (j(x, u^\star) - j(x, u))(v - u^\star)\, dx \geq \langle f, v - u^\star \rangle, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall v \in K(\psi_1, \psi_2), \end{cases}$$

où $j(x, s)$ vérifie les hypothèses (11) et (12) et est strictement croissante en s, par exemple $j(x, s) = |s|^{p-2}s$. Sous les hypothèses du Théorème 1.3, les Propositions 1.1 et 1.2 impliquent immédiatement que le problème (19) a une solution unique $u^\star$. Cette solution est donc nécessairement $u^\star = u$.

La deuxième idée est alors d'approcher le problème (19) par la pénalisation naturelle, i.e. de chercher une solution u_ε de

$$(20)\qquad \begin{cases} u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad (u_\varepsilon - \psi_1)^- \in L^2(\Omega), \quad (u_\varepsilon - \psi_2)^+ \in L^2(\Omega), \\ -\mathrm{div}(a(x, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)) + a_0(x, u_\varepsilon) + j(x, u_\varepsilon) - \dfrac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi_1)^- + \\ \qquad \dfrac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi_2)^+ = f + j(x, u) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases}$$

qui a une solution d'après des résultats classiques (voir par exemple [14] quand $p \geq 2$, et [16] quand $1 < p \leq 2$).

Il est facile de montrer qu'après extraction d'une sous suite (encore notée u_ε) on a

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u^\star \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ faible},$$

où $u^\star$ est une solution de (19) ; donc $u^\star = u$.

D'autre part, en utilisant l'opérateur B défini par (13), l'équation (20) se réécrit sous la forme

$$B(u_\varepsilon) + j(x, u_\varepsilon) - j(x, u) = \mu_\varepsilon = \mu_\varepsilon^1 - \mu_\varepsilon^2,$$

avec

$$\mu_\varepsilon^1 = \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi_1)^-, \quad \mu_\varepsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi_2)^+,$$

et on démontre de façon classique que

$$\mu_\varepsilon \rightharpoonup \mu \text{ dans } W^{-1,p'}(\Omega) \text{ faible},$$

où μ vérifie

$$B(u) = \mu.$$

La troisième idée est la suivante. Pour démontrer la première partie (16) de l'inégalité de Lewy-Stampacchia, on introduit la fonction z_ε définie par

$$z_\varepsilon = (B(\psi_1))^+ - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi_1)^-.$$

En utilisant $(z_\varepsilon)^-$, ou plus exactement la troncature $T_k(z_\varepsilon)^-$, comme fonction test dans (20) (voir ci-dessous pour l'utilisation correcte de cette fonction test), nous démontrons que sous les hypothèses du Théorème 1.3, on a

$$(21)\qquad z_\varepsilon^- \to 0 \quad \text{fortement dans } L^1(\Omega).$$

On déduit des définitions de z_ε et de μ_ε^1 que

$$0 \leq \mu_\varepsilon^1 = (B(\psi_1))^+ - z_\varepsilon = (B(\psi_1))^+ - z_\varepsilon^+ + z_\varepsilon^- \leq (B(\psi_1))^+ + z_\varepsilon^-,$$

qui avec (21) implique que

$$0 \leq \mu_1 \leq (B(\psi_1))^+,$$

si on a extrait une sous suite (encore notée μ_ε^1) telle que

$$\mu_\varepsilon^1 \rightharpoonup \mu^1 \quad \text{dans } \mathcal{M}(\Omega) \text{ faible*}.$$

Comme $\mu = \mu^1 - \mu^2$, avec $\mu^2 \geq 0$, et comme $\mu = B(u)$, on en déduit que

$$(B(u))^+ \leq \mu^1 \leq (B(\psi_1))^+, \tag{22}$$

c'est à dire la première partie (16) de l'inégalité de Lewy-Stampacchia.

En fait on ne peut pas effectuer de façon correcte la démonstration décrite ci dessus sous les seules hypothèses du Théorème 1.3. En particulier, pour pouvoir utiliser $T_k(z_\varepsilon)^-$ comme fonction test dans (20), on est conduit à supposer que $(B(\psi_1))^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$; plus exactement on suppose que (comparer avec l'hypothèse (14))

$$\begin{cases} \psi_1 \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad \text{(et pas seulement à } W^{1,p}(\Omega)), \\ (B(\psi_1))^+ \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad \text{(et pas seulement à } W^{-1,p'}(\Omega)). \end{cases} \tag{23}$$

La démonstration esquissée ci-dessus devient alors correcte.

Quand l'hypothèse (23) n'est pas vérifiée, on procède par approximation, en considérant des fonctions ψ_1^n, ψ_2^n et f^n telles que (23) soit satisfaite. Pour cette approximation on obtient l'analogue de (22), i.e.

$$(B_n(u_n))^+ \leq (B_n(\psi_1^n))^+, \tag{24}$$

où l'opérateur B_n est défini par

$$B_n(v) = -\text{div}(a(x, v, Dv)) + a_0(x, v) - f_n.$$

En passant à la limite en n dans (24) on obtient

$$(B(u))^+ \leq (B(\psi_1))^+,$$

i.e. (16).

Pour démontrer la deuxième partie (17) de l'inégalité de Lewy-Stampacchia, on fabrique une autre approximation, pour lequelle l'analogue de (23) est satisfaite, i.e. (comparer avec l'hypothèse (15))

$$(25)\quad \begin{cases} \psi_2^n \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad \text{(et pas seulement à } W^{1,p}(\Omega)\text{)}, \\ (B_n(\psi_2^n))^- \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad \text{(et pas seulement à } W^{-1,p'}(\Omega)\text{)}. \end{cases}$$

Une démonstration analogue à celle décrite ci-dessus pour ψ_1 (ou plus exactement pour ψ_1^n) donne alors

$$-(B_n(\psi_2^n))^- \leq -(B_n(u_n))^-,$$

inégalité à partir de laquelle on obtient (17) en passant à la limite en n.

On a ainsi démontré indépendamment (16) (quand (14) est satisfaite) et (17) (quand (15) est satisfaite), pour toute solution donnée u de l'inéquation (1). Quand à la fois (14) et (15) sont satisfaites, on a donc démontré à la fois (16) et (17), c'est à dire (18), qui n'est autre que l'inégalité de Lewy-Stampacchia (2).

2. L'inégalité de Lewy-Stampacchia pour le problème quasilinéaire avec une non linéarité à croissance quadratique par rapport au gradient.

2.1. Position du problème et hypothèses.

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats de notre article [19]. Nous considérons l'inéquation variationnelle avec obstacle unilatéral pour le problème quasilinéaire avec un terme non linéaire à croissance quadratique par rapport au gradient

$$(26)\quad \begin{cases} u \in K(\psi) \cap L^\infty(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)Du(Dv - Du)\,dx + \lambda \int_\Omega u(v-u)\,dx \geq \\ \qquad \displaystyle\geq \int_\Omega H(x,u,Du)(v-u)\,dx + \int_\Omega f(v-u)\,dx, \\ \qquad\qquad \forall v \in K(\psi) \cap L^\infty(\Omega), \end{cases}$$

pour laquelle nous démontrons l'inégalité de Lewy-Stampacchia

$$(27)\quad 0 \leq -\mathrm{div}(A(x)Du) + \lambda u - H(x,u,Du) - f(x) \leq$$

$$\leq (-\mathrm{div}(A(x)D\psi) + \lambda\psi - H(x,\psi,D\psi) - f(x))^+,$$

sous les hypothèses suivantes.

Le convexe $K(\psi)$ est maintenant défini par

(28) $$K(\psi) = \{v \in H_0^1(\Omega) : \ v \geq \psi \ \text{ p.p. dans } \Omega\},$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ non nécessairement régulier. On suppose maintenant que l'obstacle ψ vérifie

(29) $$\psi \in H^1(\Omega), \quad \psi^+ \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

Cette dernière hypothèse implique que $K(\psi) \cap L^\infty(\Omega)$ est non vide, car il contient ψ^+.

On suppose que la matrice A est bornée coercive, i.e. que

(30) $$A \in (L^\infty(\Omega))^{N\times N}, \quad A(x) \geq \alpha I \quad \text{p.p. } x \in \Omega,$$

avec $\alpha > 0$, et que le second membre f et le coefficient λ sont tels que

(31) $$f \in L^\infty(\Omega),$$

(32) $$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0.$$

On suppose aussi que $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory qui vérifie pour presque tout $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$

(33) $$|H(x, s, \xi)| \leq C_0 + C_1|\xi|^2,$$

(34) $$|H(x, s, \xi) - H(x, \psi(x), D\psi(x))| \leq$$
$$\leq C_2|s - \psi(x)| + C_3|\xi - D\psi(x)|^2 + C_4|\xi - D\psi(x)|,$$

où C_0, C_1, C_2, C_3 et C_4 sont des constantes positives.

On définit maintenant l'opérateur $B : H^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) + L^1(\Omega)$ par

(35) $$B(v) = -\text{div}(A(x)Dv) + \lambda v - H(x, v, Dv) - f, \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Avec cette notation, l'inéquation (26) et l'inégalité de Lewy-Stampacchia (27) s'écrivent respectivement

$$\begin{cases} u \in K(\psi) \cap L^\infty(\Omega), \\ \langle B(u), v - u\rangle \geq 0, \quad \forall v \in K(\psi) \cap L^\infty(\Omega), \end{cases}$$

et

$$0 \leq B(u) \leq (B(\psi))^+,$$

où $\langle \, , \rangle$ désigne maintenant le crochet de dualité entre $H^{-1}(\Omega) + L^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Outre les hypothèses précédentes, on suppose que

(36) $$B(\psi) \in \mathcal{M}(\Omega), \quad \text{avec } \ B(\psi)^+ \in L^\infty(\Omega),$$

i.e. que $B(\psi)$ est une mesure de Radon dont la partie positive appartient à $L^\infty(\Omega)$. Comme $B(\psi)$ appartient à $H^{-1}(\Omega) + L^1(\Omega)$ (puisque ψ appartient à $H^1(\Omega)$), l'hypothèse (36) implique que $B(\psi)^-$ appartient à $H^{-1}(\Omega) + L^1(\Omega)$.

Remarque 2.1. Les hypothèses ci-dessus sont toutes vérifiées dans le cas modèle où

$$H(x, s, \xi) = h(x, s)|\xi|^2,$$

quand $h(x, s)$ est une fonction de Carathéodory qui est bornée et qui est Lipschitzienne en s (on supposera en outre que $h(x, s)$ est croissante en s si on veut que l'hypothèse (42) ci-dessous ait lieu, ce qui entrainera l'unicité), et où

$$\psi \in W^{1,\infty}(\Omega) \quad \text{avec} \quad -\operatorname{div}(A(x)D\psi) \in \mathcal{M}(\Omega)$$
$$\text{et} \quad (-\operatorname{div}(A(x)D\psi))^+ \in L^\infty(\Omega).$$

2.2. Résultats et commentaires,

Sous les hypothèses ci-dessus, nous démontrons que l'inégalité de Lewy-Stampacchia a lieu pour au moins une solution du problème (26).

Théorème 2.1. *On suppose que l'on a* (29)*,* (30)*,* (31)*,* (32)*,* (33)*,* (34)*,* (36)*. Alors pour au moins une solution u du problème* (26)*, la distribution $B(u)$ définie par* (35) *vérifie*

$$0 \leq B(u) \leq (B(\psi))^+, \tag{37}$$

i.e. l'inégalité de Lewy-Stampacchia (27).

Dans le problème (26), l'opérateur est en un sens bien plus général que celui considéré dans [16], [17] et [18], puisqu'il comporte maintenant un terme H d'ordre inférieur à croissance naturelle (ici quadratique) par rapport au gradient. Mais par rapport à ces travaux, nous ne réussissons maintenant à démontrer l'inégalité de Lewy-Stampacchia que sous des hypothèses bien plus restrictives sur $(B(\psi))^+$, qui est supposé appartenir à $L^\infty(\Omega)$, alors dans [16], [17] et [18] où $H = 0$, nous démontrons l'inégalité de Lewy-Stampacchia sous la seule hypothèse $(B(\psi))^+ \in H^{-1}(\Omega)$, qui est l'hypothèse naturelle.

Parmi les hypothèses du Théorème 2.1, l'hypothèse (34) et la deuxième partie de l'hpothèse (36) ne semblent pas tout à fait naturelles. Cependant, d'une part, l'hypothèse (34) est vérifiée lorsque $H(x, s, \xi)$ est à croissance quadratique en ξ et localement lipschitzienne en s et ξ, i.e. lorsque l'on a pour presque tout $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $\eta \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{cases} |H(x, s, \xi) - H(x, s, \eta)| \leq C(1 + |\xi| + |\eta|)|\xi - \eta|, \\ |H(x, s, \xi) - H(x, t, \xi)| \leq C(1 + |\xi|^2)|s - t|, \end{cases} \tag{38}$$

et

$$\psi \in W^{1,\infty}(\Omega). \tag{39}$$

D'autre part, la deuxième partie de l'hypothèse (36) semble forte, et il serait plus naturel de supposer seulement $B(\psi)^+ \in H^{-1}(\Omega)+L^1(\Omega)$. Cependant l'hypothèse (36) nous permet de démontrer l'inégalité de Lewy-Stampacchia (27), i.e.

$$-\mathrm{div}(A(x)Du) + \lambda u - H(x,u,Du) - f = \mu, \tag{40}$$

où μ vérifie

$$0 \leq \mu \leq (B(\psi))^+. \tag{41}$$

Si l'on considère (40) comme une équation en u pour un second membre μ donné, une hypothèse classique permettant d'obtenir l'existence d'une solution de (40) consiste à supposer que μ appartient à $L^\infty(\Omega)$, ou à $L^{\frac{N}{2}+\delta}(\Omega)$ avec $\delta > 0$, voire à $L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ ou $L^{\frac{N}{2},\infty}(\Omega)$(voir par exemple [5], [6], [7], [10], [11], [12]). Il est donc assez naturel de supposer que $(B(\psi))^+$ appartient à $L^\infty(\Omega)$, puisque par (41) cela implique que μ appartient à $L^\infty(\Omega)$.

Enfin, nous ne démontrons l'inégalité de Lewy-Stampacchia que pour une seule solution de (26), et non pour toute solution de l'inéquation avec obstacle comme dans [17] et [18]. Notons cependant que la solution de (26) est unique (voir [2], subsection 3.3.3) lorsque $H(x,s,\xi)$ est C^1 en s et ξ et satisfait la première partie de l'hypothèse (38) ainsi que la condition de structure

$$\lambda - \frac{\partial H}{\partial s}(x,s,\xi) \geq \lambda_0 > 0, \tag{42}$$

pour presque tout $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$.

2.3. Idée de la démonstration du Théorème 2.1.

Pour démontrer le Théorème 2.1, nous suivons la démarche que nous avons utilisée dans [16], [17] et [18], démarche qui a été rappelée dans le paragraphe 1.3 ci-dessus.

Nous considérons le problème pénalisé

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ -\mathrm{div}(A(x)Du_\varepsilon) + \lambda u_\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^- = H(x,u_\varepsilon,Du_\varepsilon) + f \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases} \tag{43}$$

qui a au moins une solution pour $\varepsilon > 0$ fixé (voir [5* et [6]).

Nous démontrons d'abord que toute solution de (43) vérifie

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sup\left(\frac{C_0 + \|f\|_{L^\infty(\Omega)}}{\lambda}, \|\psi^+\|_{L^\infty(\Omega)}\right).$$

Cette inégalité s'obtient facilement par le principe du maximum fort (en considérant un point où $u_\varepsilon(x)$ atteint son maximum) si tout est régulier dans (43) ; sinon on emploie une démonstration analogue à celle de [5] et [6], basée sur l'utilisation d'une fonction test non linéaire.

En utilisant ensuite comme fonction test dans (43) la fonction $\varphi(u_\varepsilon - v^\star)$, où $v^\star$ est donné dans $K(\psi) \cap L^\infty(\Omega)$ et où φ est donné par exemple par $\varphi(s) = s\exp(Ms^2)$ avec M convenable (on peut prendre ici $M = C_1^2/4\alpha^2$), nous démontrons comme dans [5] et [6] que

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C,$$

où C est une constante independante de ε.

Le raisonnement déja employé dans [5] et [6] permet alors de démontrer que pour une sous suite (encore notée u_ε) on a

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ fort,} \tag{44}$$

où u est une solution de l'inéquation (26).

Pour obtenir ces résultats nous n'avons jusqu'à présent utilisé que les hypothèses (29), (30), (31), (32) et (33). Si maintenant nous faisons toutes les hypothèses du Théorème 2.1, i.e. si nous faisons en outre les hypothèses (34) et (36), nous démontrons que pour ε assez petit

$$\|\frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^-\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2\|(B(\psi))^+\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Lorsque tout est régulier dans (43), ce résultat s'obtient facilement par le principe du maximum fort en considérant un point où $(u_\varepsilon - \psi)(x)$ atteint son maximum : on écrit (43) comme une équation sur $(u_\varepsilon - \psi)$, et on utilise les l'hypothèses (34) et (36). Dans le cas où on ne fait aucune hypothèse de régularité, on utilise comme précédemment (et comme dans [5] et [6]) une fonction test non linéaire.

Enfin nous définissons

$$z_\varepsilon = (B(\psi))^+ - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^-. \tag{45}$$

En utilisant dans (43) la fonction test $-z_\varepsilon^-$ (voir ci-dessous pour l'utilisation correcte de cette fonction test), nous démontrons que

$$z_\varepsilon^- \to 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort.} \tag{46}$$

Cette démonstration est voisine de celle utilisée dans [16], [17] et [18] pour démontrer des résultats analogues.

Il est alors facile d'obtenir l'inégalité de Lewy-Stampacchia. En effet, d'après la définition (45) de z_ε, on a

$$0 \leq \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^- = (B(\psi))^+ - z_\varepsilon \leq (B(\psi))^+ + z_\varepsilon^-. \tag{47}$$

Mais si on définit μ_ε par

$$\mu_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^-,$$

l'équation pénalisée (43) s'écrit

$$\mu_\varepsilon = B(u_\varepsilon), \tag{48}$$

et (44) implique que

$$B(u_\varepsilon) \to B(u) \text{ dans } H^{-1}(\Omega) + L^1(\Omega) \text{ fort.} \tag{49}$$

De (46), (47), (48) et (49) on déduit immédiatement que

$$0 \leq B(u) \leq (B(\psi))^+,$$

c'est à dire l'inégalité de Lewy-Stampacchia (27), comme désiré.

En fait pour démontrer (46), on ne peut utiliser $-z_\varepsilon^-$ comme fonction test dans (43), car cette fonction appartient seulement à $L^\infty(\Omega)$ si on ne fait que les hypothèses du Théorème 2.1 (et en particulier seulement l'hypothèse (36)), et non à $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ comme on le souhaiterait. On effectue donc en fait la démonstration précédente, non pour le problème pénalisé (43), mais pour un problème pénalisé $(43)_n$ où l'on a remplacé f par un f_n convenable, de sorte que $(B_n(\psi))^+$ (ou plus exactement un majorant positif de $B_n(\psi)$) appartient à $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. On termine la démonstration en passant à la limite en n.

Remerciements. Ce travail a été effectué durant les visites du premier auteur au Laboratoire Jacques-Louis Lions de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI) dans le cadre de l'Accord-programme 02 MDU 543 de coopération franco-algérienne du CMEP, que les deux auteurs remercient pour son soutien.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Artola, *Sur une classe de problèmes paraboliques quasilinéaires,* Boll. Un. Mat. Ital., 5 (1986), pp.51–70.

[2] G. Barles - F. Murat, *Uniqueness and the maximum principle for quasilinear elliptic equations with quadratic growth conditions,* Arch. Rat. Mech. Anal., 133 (1995), pp. 77–101.

[3] L. Boccardo - G.R. Cirmi, *Non smooth unilateral problems,* in *Nonsmooth optimization: Methods and applications (Proceedings, Erice, 1991)*, ed. by F. Giannessi, Gordon and Breach, New York, 1992, pp. 1–10.

[4] L. Boccardo - T. Gallouët - F. Murat, *Unicité de la solution pour des équations elliptiques non linéaires,* C.R. Acad. Sci. Paris Série I, 315 (1992), pp. 1159–1164.

[5] L. Boccardo - F. Murat -J.-P. Puel, *Existence de solutions faibles pour des équations elliptiques quasi-linéaires à croissance quadratique,* in *Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France Seminar, Vol. IV*, ed. by H. Brezis & J.-L. Lions, Res. Notes in Math., 84, Pitman, London, 1983, pp.19–73.

[6] L. Boccardo - F. Murat -J.-P. Puel, *Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic unilateral problems,* Ann. Mat. pura appl., 152 (1988), pp. 183–196.

[7] L. Boccardo - F. Murat - J.-P. Puel, L^{∞} *estimate for some nonlinear elliptic partial differential equations and application to an existence result,* SIAM J. Math. Anal., 23 (1992), pp. 326–333.

[8] J. Carrillo - M. Chipot, *On nonlinear elliptic equations involving derivatives of the nonlinearity,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 100A (1985), pp. 86–128.

[9] M. Chipot - G. Michaille, *Uniqueness results and monotonicity properties for strongly nonlinear elliptic variational inequalities,* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 16 (1989), pp. 137–166.

[10] V. Ferone - F. Murat, *Quasilinear problems having quadratic growth in the gradient: an existence result when the source term is small,* in *Équations aux dérivées partielles et applications (articles dédiés à Jacques-Louis Lions)*, Gauthier-Villars, Paris, 1998, pp. 497–515.

[11] V. Ferone - F. Murat, *Nonlinear problems having natural growth in the gradient: an existence result when the source terms are small,* Nonlinear Anal., Th., Meth. and Appl., Series A, 42 (2000), pp. 1309–1326.

[12] V. Ferone - F. Murat, *Nonlinear elliptic equations with natural growth in the gradient and source terms in Lorentz spaces,* à paraître.

[13] C. Leone, *On a class of nonlinear obstacle problems with measure data,* Comm. Part. Diff. Eq., 25 (2000), pp. 2259–2286.

[14] J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires,* Dunod, Paris, 1969.

[15] H. Lewy - G. Stampacchia, *On the smoothness of superharmonics which solve a minimum problem,* J. Analyse Math., 23 (1970), pp.227–236.

[16] A. Mokrane - F. Murat, *A proof of the Lewy-Stampacchia inequality by a penalization method,* Pot. Anal., 9 (1998), pp. 105–142.

[17] A. Mokrane - F. Murat, *Proving the Lewy-Stampacchia inequality by penalization,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 46 (Suppl. dedicated to C. Vinti) (1998), pp. 315–334.

[18] A. Mokrane - F. Murat, *The Lewy-Stampacchia inequality for bilateral problems,* Ric. Mat., 53 (2004), pp. 139–182.

[19] A. Mokrane - F. Murat, *The Lewy-Stampacchia inequality for the obstacle problem with quadratic growth in the gradient,* Ann. Mat. pura appl., 184 (2005), pp. 347-360.

[20] G.M. Troianiello, *Elliptic differential equations and obstacle problems,* Plenum Press, New York, 1978.

A. Mokrane
Département de Mathématiques,
École Normale Supérieure,
B.P. 92, Vieux Kouba, 16050 Alger (ALGÉRIE)
e-mail : mokrane@ens-kouba.dz

F. Murat
Laboratoire Jacques-Louis Lions,
Boîte courrier 187,
Université Pierre et Marie Curie,
75252 Paris cedex 05 (FRANCE)
e-mail : murat@ann.jussieu.fr