LE MATEMATICHE
Vol. LVII (2002) – Fasc. II, pp. 175–183

ALGÉBRES DE SOBOLEV ET STRUCTURE *m*-CONVEXE

ABDELLAH EL KINANI

We examine the structure of a class of Sobolev spaces. We also show that the unitization of a locally uniformly A-convex algebra is not, in general, of the same type.

1. Préliminaires et introduction.

Soient E une algèbre associative complexe et τ une topologie d'espace localement convexe sur E. On dit que (E, τ) est une algèbre localement convexe ($a.l.c.$ en abrégé) si le produit $(x, y) \longmapsto xy$ est séparément continu. Une $a.l.c.$ est dite une Q-algèbre (Q- $a.l.c.$ en abrégé) si l'ensemble des éléments quasi-inversibles $G_q(E)$, de E, est ouvert. Soient (E, τ) une $a.l.c.$ commutative et $\{|.|_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ une famille de semi-normes définissant sa topologie τ. On dit que $\big(E, (|.|_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\big)$ est une algèbre localement multiplicativement convexe ([9]) ($a.l.m.c.$ en abrégé) si $|xy|_\lambda \leq |x|_\lambda\,|y|_\lambda$, pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \Lambda$. Elle est dite A-convexe ([3]) ($a.l.A.c.$ en abrégé) si, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $x \in E$, il exite $M(\lambda, x) > 0$ telle que $|xy|_\lambda \leq M(\lambda, x)\,|y|_\lambda$, pour tout $y \in E$. Ceci revient à dire que l'origine admet un système fondamental de voisinages formés de parties disquées V tel que, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $x \in E$, il existe $M(\lambda, x) > 0$

Entrato in redazione il 19 Luglio 2002.

1991 Mathematics Subject Classification: Primary 46H20. 46C50.
Key words: Espaces de Sobolev, Q-$a.l.m.c.$, Algèbre hermitienne, $a.l.u.A.c.$

tel que $xV \subset M(\lambda, x)V$. Si $M(\lambda, x) = M(x)$ ne dépend que de x, on dit que $\left(E, (|.|_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right)$ est une algèbre uniformément A-convexe ([2]) ($a.l.u.A.c.$ en abrégé). Soit $x \longmapsto x^\sharp$ une involution d'algèbre sur E. Si $x \longmapsto x^\sharp$ est continue, alors on peut supposer que $|x|_\lambda = \left|x^\sharp\right|_\lambda$, pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \Lambda$. Un élément a, de E, est dit hermitien si $a = a^\sharp$. On désigne par $H(E)$ l'ensemble des éléments hermitiens de E. Une $a.l.m.c.$ munie d'une involution d'algèbre $x \longmapsto x^\sharp$ est dite hermitienne ([5]) si le spectre de tout élément hermitien est réel. Si pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \Lambda$, on a $\left|x^\sharp x\right|_\lambda = |x|_\lambda^2$, on dit que $\left(E, (|.|_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right)$ est une C^*-$a.l.m.c.$ ([8]). Dans toute la suite, le rayon spectral d'un élément x, d'une algèbre E, est $\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in Spx\}$, où Spx est le spectre de x.

Pour $s \in R$, $L_s^2(R^n)$ désignera l'espace des classes de fonctions complexes, mesurables, sur R^n, et telles que $\int_{R^n} |f(x)|^2 \left(1 + \|x\|^2\right)^s dx < +\infty$. L'espace $\left(L_s^2(R^n), |.|_{2,s}\right)$ est un espace de Hilbert, où

$$|f|_{2,s} = \left(\int_{R^n} |f(x)|^2 \left(1 + \|x\|^2\right)^s dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans la suite, nous ne ferons pas de différence entre deux fonctions égales presque partout. Soient f et g deux fonctions complexes mesurables " convolables " sur R^n. Le produit de convolution de f et g sera noté $f * g$. Pour une fonction f localement intégrable sur R^n, on désignera par T_f la distribution définie par f. Soit $\mathcal{S}'(R^n)$ le dual topologique de l'espace $\mathcal{S}(R^n)$ des fonctions complexes indéfiniment dérivables sur R^n à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées de tout ordre. Pour $s \in R$, on considère les espaces de Sobolev $H^s(R^n) = \left\{T \in \mathcal{S}'(R^n) : \mathcal{F}T \in L_s^2(R^n)\right\}$ autrement dit $H^s(R^n) = \overline{\mathcal{F}}\left(\left\{T_f : f \in L_s^2(R^n)\right\}\right)$, où $\overline{\mathcal{F}}$ est la cotransformation de Fourier. On munit $H^s(R^n)$ de la norme Hilbertienne $|T|_s = |f|_{2,s}$ si $\mathcal{F}T = T_f$, avec $f \in L_s^2(R^n)$. Soit $\Omega = \left\{\omega_s : s > \frac{n}{2}\right\}$, où $\omega_s(x) = \left(1 + \|x\|^2\right)^s$; $x \in R^n$. On définit les espaces suivants:

$$\begin{aligned} L_\Omega^2\left(R^n\right) &= \left\{f : R^n \longrightarrow C \text{ mesurable} : |f|^2 \omega_s \in L^1\left(R^n\right), \text{ pour tout } s > \frac{n}{2}\right\} \\ &= \bigcap_{s > \frac{n}{2}} L_s^2\left(R^n\right) \end{aligned}$$

et

$$H_\Omega\left(R^n\right) = \left\{T \in \mathcal{S}'(R^n) : \mathcal{F}T \in L_\Omega^2\left(R^n\right)\right\}.$$

On munit $L_\Omega^2(R^n)$ de la topologie définit par la famille de normes $\left(|.|_{2,s}\right)_{s>\frac{n}{2}}$ et $H_\Omega(R^n)$ par celle définit par la famille de normes $(|.|_s)_{s>\frac{n}{2}}$. Les espaces

$\left(L^2_\Omega(R^n), \left(|.|_{2,s}\right)_{s>\frac{n}{2}}\right)$ et $\left(H_\Omega(R^n), (|.|_s)_{s>\frac{n}{2}}\right)$ deviennent ainsi localement convexes complets. Pour $s > \frac{n}{2}$, on désigne par E_s l'algèbre $H_\Omega(R^n)$ muni de la norme $|.|'_s$. Soit $\overset{\wedge}{E_s}$ l'algèbre complétée, pour $|.|'_s$, de E_s. L'algèbre $\overset{\wedge}{E_s}$ est exactement égale à $H^s(R^n)$. De plus la famille $\Omega = \left\{\omega_s : s > \frac{n}{2}\right\}$ est filtrante croissante et l'on a

$$\underset{\longleftarrow_s}{\lim} H^s\left(R^n\right) = \bigcap_{s>\frac{n}{2}} H^s\left(R^n\right) = H_\Omega\left(R^n\right).$$

Pour les résultats fondamentaux sur les espaces de Sobolev (resp. les $a.l.m.c.$), se raporter à [1] et [7] (resp. à [5], [8] et [9]).

Dans cet article, on montre que $\left(H_\Omega(R^n), (|.|_s)_{s>\frac{n}{2}}\right)$ est une Q-$a.l.m.c.$ hermitienne. Ensuite, pour $s \in R$, on munit l'algèbre

$$H^s_c\left(R^n\right) = \left\{T \in H^s\left(R^n\right) : suppT \text{ compact }\right\}$$

de la topologie limite inductive stricte $\tau = \lim_{j\longrightarrow} ind\, \tau_{|.|_j}$ définie par les algèbres de Banach $\left(H^s_{[-j,j]^n}(R^n), |.|_j\right)_{j\in N^*}$; où, pour $j \in N^*$,

$$H^s_{[-j,j]^n}\left(R^n\right) = \left\{T \in H^s\left(R^n\right) : suppT \subset [-j, j]^n\right\}$$

et $|.|_j$ est la norme induite, sur $H^s_{[-j,j]^n}(R^n)$, par celle de $H^s_c(R^n)$. Puis on montre que $\left(H^s_c(R^n), \tau\right)$ est une $a.l.u.A.c.$ Enfin, contrairement à une affirmation de Cochran ([2]), nous prouvons que l'algèbre $\left(\left(H^s_c(R^n)\right)^1, \tau^1\right)$ obtenue par adjonction d'une unité à $H^s_c(R^n)$ n'est pas une $a.l.u.A.c.$

2. Structure *m*-convexe dans l'espace $H_\Omega(R^n)$.

Commençons par montrer le résultat suivant qui nous sera utile par la suite.

Lemme 2.1. *Pour tout* $s > \frac{n}{2}$ *, il existe une constante* $c_s > 0$ *telle que* $\omega_s^{-1} * \omega_s^{-1} \leq c_s\omega_s^{-1}$.

Démonstration. Soit θ_s la fonction défine, sur R^n, par $\theta_s(x) = Log\ \omega_s(x)$. Alors $\theta_s(y) \geq \theta_s(\frac{x}{2})$ si $\|y\| > \frac{\|x\|}{2}$ et $\theta_s(x-y) \geq \theta_s(\frac{x}{2})$ si $\|y\| < \frac{\|x\|}{2}$. Par suite

$$\omega_s^{-1} * \omega_s^{-1}(x) = \int_{R^n} e^{-\theta_s(y)}e^{-\theta_s(x-y)}dy$$

$$\leq \left[\int_{\|y\| \leq \frac{\|x\|}{2}} e^{-\theta_s(y)} dy + \int_{\|y\| > \frac{\|x\|}{2}} e^{-\theta_s(x-y)} dy \right] e^{-\theta_s(\frac{x}{2})}$$

Comme $\theta_s(x) - \theta_s(\frac{x}{2}) \leq 2s \ \ Log 2$, on obtient

$$\omega_s^{-1} * \omega_s^{-1}(x) \leq \left(2^{1+2s} \int_{R^n} \omega_s^{-1}(y) dy \right) \omega_s^{-1}(x); \text{ pour tout } x \in R^n.$$

Ainsi

$$\omega_s^{-1} * \omega_s^{-1}(x) \leq c_s \omega_s^{-1}(x), \text{ pour tout } x \in R^n,$$

où

$$c_s = \left(2^{1+2s} \int_{R^n} \omega_s^{-1}(y) dy \right) < \infty$$

car la fonction $x \longmapsto \omega_s^{-1}(x) = \left(1 + \|x\|^2\right)^{-s}$ appartient à $L^1(R^n)$ vu que $s > \frac{n}{2}$.

Dans toute la suite, on munit l'espace $H_\Omega(R^n)$ du produit ordinaire. Ainsi $\left(H_\Omega(R^n), (|.|_s)_{s>\frac{n}{2}}\right)$ devient une $a.l.c.$ complète. En fait on a même plus comme le montre ce qui suit.

Proposition 2.2. *L'espace* $\left(H_\Omega(R^n), (|.|_s)_{s>\frac{n}{2}}\right)$ *est une* Q*-*$a.l.m.c.$ *complète hermitienne.*

Démonstration. Montrons d'abord que $\left(H_\Omega(R^n), (|.|_s)_{s>\frac{n}{2}}\right)$ est une $a.l.m.c.$ Soient T, $S \in H_\Omega(R^n)$. Il existe f, $g \in L^2_\Omega(R^n)$ telles que $T = \overline{\mathcal{F}} T_f$ et $S = \overline{\mathcal{F}} T_g$, Donc $TS = \overline{\mathcal{F}}(T_{f*g})$. Ainsi $|TS|_s = |f * g|_{2,s}$. Montrons qu'il existe une famille de normes $\left(|.|'_{2,s}\right)_{s>\frac{n}{2}}$ équivalente à $\left(|.|_{2,s}\right)_{s>\frac{n}{2}}$ telle que

$$|f * g|'_{2,s} \leq |f|'_\omega \, |g|'_{2,s}; \quad f, g \in L^2_\Omega\left(R^n\right).$$

Comme l'espace $\mathcal{C}_c(R^n)$ des fonctions continues à support compact, dans R^n, est dense dans $\left(L^2_s(R^n), |.|_{2,s}\right)$, il suffit de montrer que

$$|f * g|'_{2,s} \leq |f|'_{2,s} \, |g|'_{2,s}; \quad f, g \in \mathcal{C}_c(R^n).$$

Soient $f, g \in \mathcal{C}_c(R^n)$ et $h = f * g$. En écrivant

$$|h(x)| = \left| \int_{R^n} f(x-y) g(y) \left| \frac{\omega_s(x-y)\omega_s(y)}{\omega_s(x-y)\omega_s(y)} \right|^{1/2} dy \right|$$

et en utilisant l'in égalit é de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|h(x)| \leq \left(\int_{R^n} |f(x-y)|^2 \, \omega_s(x-y) \, |g(y)|^2 \, \omega_s(y) dy \right)^{\frac{1}{2}} W_s^{\frac{1}{2}}(x),$$

où $W_s = \omega_s^{-1} * \omega_s^{-1}$. Il en résulte que

$$\left| \int_{R^n} |h(x)|^2 \, W_s^{-1}(x) dx \right| \leq \int_{R^n} |f(x-y)|^2 \, \omega_s(x-y) dx \int_{R^n} |g(y)|^2 \, \omega_s(y) dy$$

$$\leq |f|_{2,s}^2 \, |g|_{2,s}^2 \, .$$

Par ailleurs, par le lemme 2.1, il existe une constante $c_s > 0$ telle que $\omega_s^{-1} * \omega_s^{-1} \leq c_s \omega_s^{-1}$. Donc $\omega_s \leq c_s W_s^{-1}$; et l'on a

$$|f * g|_{2,s}^2 = \int_{R^n} |h(x)|^2 \, \omega_s(x) dx$$

$$\leq c_s \int_{R^n} |h(x)|^2 \, W_s^{-1}(x) dx$$

D'où

$$|f * g|_{2,s} \leq \sqrt{c_s} \, |f|_{2,s} \, |g|_{2,s} \, .$$

Ainsi

$$|.|_{2,s}' = \sqrt{c_s} \, |.|_{2,s} \, , \text{ pour tout } s > \frac{n}{2}.$$

Montrons maintenant que $\left(H_\Omega (R^n) \, , (|.|_s)_{s > \frac{n}{2}} \right)$ est une Q-algèbre. Posons $E = H_\Omega (R^n)$. Soit $T \in H_\Omega (R^n)$ avec $T = \overline{\mathcal{F}} T_f$, où $f \in L_\Omega^2 (R^n)$. D'aprés [8], on a

$$SpT = \bigcup_{s > \frac{n}{2}} Sp_s T = \bigcup_{s > \frac{n}{2}} Sp_{2,s} f,$$

où $Sp_s T = Sp_{H^s(R^n)} T$ et $Sp_{2,s} f = Sp_{L_s^2(R^n)} f$. Comme $\mathcal{C}_c(R^n)$ est dense dans $L^1 (R^n)$ et $\mathcal{C}_c(R^n) \subset L_s^2 (R^n) \subset L^1 (R^n)$, le spectre global $\mathcal{M} \left(L_s^2 (R^n) \right)$, de $L_\Omega^2 (R^n)$, est homéomorphe, à R^n, via la transformation de Fourier. Ainsi, on a

$$\rho(T) = \rho(f) = \rho_{2,s}(f) \leq |f|_{2,s}' = |T|_s' \, .$$

Et on conclut par un résultat de Tsertos ([10]). Montrons enfin que $H_\Omega (R^n)$ est hermitienne. Pour $T \in H_\Omega (R^n)$ avec $T = \overline{\mathcal{F}} T_f$, où $f \in L_\Omega^2 (R^n)$, on pose $T^\sharp = \overline{\mathcal{F}} T_{f^\sharp}$, où $f^\sharp(x) = \overline{f(-x)}$, pour tout $x \in R^n$. On vérifie facilement que

$T \longmapsto T^{\sharp}$ est une involution d'algèbre, sur $H_{\Omega}(R^n)$, telle que $|T|'_s = \left|T^{\sharp}\right|'_s$, pour tout $T \in H_{\Omega}(R^n)$. Soit maintenant T un élément hermitien de $H_{\Omega}(R^n)$. Alors $T = \overline{\mathcal{F}}T_f$, où $f \in L^2_{\Omega}(R^n)$ avec $f = f^{\sharp}$. Par ailleurs

$$SpT = Spf = \left\{\mathcal{F}f(x) : x \in R^n\right\}.$$

Donc $SpT \subset R$ vu que $\mathcal{F}f^{\sharp} = \overline{\mathcal{F}f}$.

Comme conséquence, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 2.3. *Pour tout $s > \frac{n}{2}$, l'espace de Sobolev $\left(H^s(R^n), |.|'_s\right)$ est une algèbre de Banach hermitienne.*

L'algèbre $\left(H^s(R^n), |.|'_s\right)$ n'est pas une C^*-algèbre car sinon $\rho(T) = |T|'_s$, pour $T \in H_{\Omega}(R^n)$ avec $T = \overline{\mathcal{F}}T_f$, où $f \in L^2_{\Omega}(R^n)$. Donc, $\rho(f) = |f|'_{2,s}$, pour tout $f \in L^2_{\Omega}(R^n)$, i.e.

$$\sup_{x \in R^n} |\mathcal{F}f(x)| = c_s \left(\int_{R^n} |f(x)|^2 \left(1 + \|x\|^2\right)^s dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

où c_s est la constante donnée par le lemme 2.1, ce qui n'est pas le cas (prendre par exemple $n = 1$, $f(t) = e^{-\pi t^2}$ et $s = 1$). Cependant on a le résultat suivant.

Proposition 2.4. *L'algèbre $\left(H_{\Omega}(R^n), (|.|_s)_{s > \frac{n}{2}}\right)$ peut être munie d'une topologie d'a.l.m.c. définie par une famille de normes $(\|.\|_s)_{s>\frac{n}{2}}$ telles que*

1) $\|T\|_s \le \sqrt{c_s}\, |T|_s$, *pour tous $T \in H_{\Omega}(R^n)$ et $s > \frac{n}{2}$, où*

$$c_s = \left(2^{1+2s} \int_{R^n} \omega_s^{-1}(y) dy\right)$$

est la constante donnée par le lemme 2.1.

2) $|TS|_s \le \|T\|_s\, |S|_s$, *pour tous $T, S \in H_{\Omega}(R^n)$ et $s > \frac{n}{2}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{L}(H_{\Omega}(R^n))$ l'algèbre des opérateurs bornés sur $H_{\Omega}(R^n)$. Pour $T \in H_{\Omega}(R^n)$, on définit l'application $L_T : H_{\Omega}(R^n) \longrightarrow H_{\Omega}(R^n)$ par $L_T(S) = TS$, pour tout $S \in H_{\Omega}(R^n)$. Alors, pour tout $s > \frac{n}{2}$, on a

$$|L_T(S)|_s = |TS|_s \le \sqrt{c_s}\, |T|_s\, |S|_s\,.$$

Donc

$$|L_T|_s = \sup\{|TS|_s : |S|_s \le 1\} \le \sqrt{c_s}\, |T|_s\,.$$

Ainsi L_T est une application linéaire bornée dans $H_\Omega(R^n)$.

1) On considère la famille $(\|.\|_s)_{s>\frac{n}{2}}$ de normes, dans $H_\Omega(R^n)$, définies par

$$\|T\|_s = \sup\{|TS|_s : |S|_s \leq 1\}.$$

L'algèbre $\left(H_\Omega(R^n), (\|.\|_s)_{s>\frac{n}{2}}\right)$ est une $a.l.m.c.$ De plus $\|T\|_s \leq \sqrt{c_s}\,|T|_s$; pour tous $T \in H_\Omega(R^n)$ et $s > \frac{n}{2}$.

2) Pour tous $T, S \in H_\Omega(R^n)$ et $s > \frac{n}{2}$, on a

$$|TS|_s = |L_T(S)|_s \leq |L_T|_s\,|S|_s = \|T\|_s\,|S|_s.$$

Remarque 2.5. Pour tout $s > \frac{n}{2}$, l'espace de Sobolev $H^s(R^n)$ est une algèbre de Banach hermitienne. Donc le rayon spectral ρ_s est une semi-norme stellaire sur $H^s(R^n)$. Pour $s > \frac{n}{2}$, soit A_s l'algèbre complétée, pour ρ_s, de $H^s(R^n)$. Notons par ρ_s la norme, de A_s, complétée de ρ_s. Alors (A_s, ρ_s) est une C^*-algèbre et $(H^s(R^n), |.|_s)$ s'injecte continûment dans (A_s, ρ_s). Par le théorème classique de Gel'fand Naimark, l'algèbre A_s est isométriquement isomorphe à la C^*-algèbre $\mathcal{C}_0(\mathcal{M}(A_s))$ des fonctions complexes continues qui s'annullent à l'infini sur le spectre $\mathcal{M}(A_s)$ de A_s. Par ailleurs, comme $\mathcal{M}(H^s(R^n))$ est homéomorphe à R^n, on montre que $\mathcal{M}(A_s)$ est aussi homéomorphe à R^n. Ainsi obtient-on le théorème de régularité de Sobolev selon lequel tout élément de $H^s(R^n)$ est la classe d'une fonction continue, sur R^n, tendant vers zéro à l'infini.

Remarque 2.6. L'algèbre $\left(H^s(R^n), |.|'_s\right)$ n'admet aucune unité approchée bornée car sinon soit $(\mathcal{E}_k)_k$ une telle unité approchée bornée de $\left(H^s(R^n), |.|'_s\right)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $|\mathcal{E}_k|_s \leq 1$, pour tout $k \in N$. Par 2) de la proposition 2.4, on obtient $|T|_s \leq \|T\|_s$; pour tout $T \in H^s(R^n)$. Donc $|.|_s$ et $\|.\|_s$ sont équivalentes car, par 1) de la proposition 2.4, on a $\|T\|_s \leq \sqrt{c_s}\,|T|_s$. Ainsi $(H^s(R^n), \|.\|_s)$ est une C^* -algèbre. Donc $\rho(T) = \|T\|_s$, pour tout $T \in H^s(R^n)$; et $\rho(T) = |T|_s$, pour tout $T \in H^s(R^n)$ ce qui n'est pas le cas.

Dans [2], Cochran affirme que l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité à une $a.l.u.A.c.$ reste aussi une $a.l.u.A.c.$ Ce résultat n'est pas vrai en général (cf. [4]). Voici un contre exemple dans la théorie des algèbres de Sobolev.

Soient $s \in R$ et $H^s_c(R^n) = \{T \in H^s(R^n) : suppT \text{ compact}\}$. On munit $H^s_c(R^n)$ de la topologie limite inductive stricte $\tau = \lim\limits_{j\longrightarrow} ind\,\tau_{|.|_j}$ définie par les algèbres de Banach $\left(H^s_{[-j,j]^n}(R^n), |.|_j\right)_{j\in N^*}$; où, pour $j \in N^*$,

$$H^s_{[-j,j]^n}(R^n) = \left\{T \in H^s(R^n) : \operatorname{supp} T \subset [-j, j]^n\right\}$$

et $|.|_j$ est la norme induite, sur $H^s_{[-j,j]^n}(R^n)$, par celle de $H^s_c(R^n)$. Soit $\{|.|_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ une famille de semi-normes définissant la topologie τ. On munit l'algèbre $\left(H^s_c(R^n)\right)^1$ de la topologie τ^1 définie par la famille de semi-normes $\left\{|.|^1_\lambda : \lambda \in \Lambda\right\}$ données par $|(T,\alpha)|^1_\lambda = |T|_\lambda + |\alpha|$, pour tous $T \in H^s_c(R^n)$, $\alpha \in C$. Comme la norme de $H^s_{[-(j+1),j+1]^n}(R^n)$ induite sur $H^s_{[-j,j]^n}(R^n)$ coincide avec celle de $H^s_{[-j,j]^n}(R^n)$, on peut définir une norme, notée $\|.\|$, sur $H^s_c(R^n)$. Soit maintenant $V = \bigcup_j \frac{1}{r_j} B_j$, $(r_j \in N^*)$ un voisinage quelconque de zéro pour τ, où B_j est la boule unité de $H^s_{[-j,j]^n}(R^n)$. Alors, pour tout $T \in H^s_c(R^n)$, on a $TV \subset \|T\| V$. Donc $\left(H^s_c(R^n), \tau\right)$ est une $a.l.u.A.c.$ Par contre l'algèbre $\left(\left(H^s_c(R^n)\right)^1, \tau^1\right)$ ne l'est pas comme le montre ce qui suit.

Proposition 2.7. *L'algèbre* $\left(\left(H^s_c(R^n)\right)^1, \tau^1\right)$ *n'est pas une* $a.l.u.A.c.$

Démonstration. Supposons le contraire. Alors, pour tout $T \in H^s_c(R^n)$, il existe $M(T) > 0$ tel que

$$|(T,0)(S,\alpha)|^1_\lambda \leq M(T)\,|(S,\alpha)|^1_\lambda \;\; ; (S,\alpha) \in \left(H^s_c\left(R^n\right)\right)^1, \lambda \in \Lambda$$

Par conséquent $|(T,0)|^1_\lambda \leq M(T)\,|(0,1)|^1_\lambda$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Ainsi, on peut supposer que $|(0,1)|^1_\lambda = 1$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Posons

$$\|T\| = \sup\left\{|(T,0)|^1_\lambda : \lambda \in \Lambda\right\}.$$

C'est une norme d'espace, sur $H^s_c(R^n)$, plus fine que τ. Soit B la boule unité de $H^s_c(R^n)$ pour $\|.\|$. Comme B est un borné de $H^s_c(R^n)$, par le lemme de Dieudonné-Schwarts ([6], p. 60), il existe $j_0 \in N$ tel que $B \subset H^s_{[-j_0,j_0]^n}(R^n)$. Donc $H^s_c(R^n) = H^s_{[-j_0,j_0]^n}(R^n)$; contradiction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.A. Adams, *Sobolev spaces,* Academic press, New york, 1973.

[2] A.C. Cochran, *Representations of A-convex algebras,* Proc. Amer. Math. Soc., 41 (1973), pp. 473–479.

[3] A.C. Cochran - R. Keown - C.R. Williams, *On a class of topological algebras,* Pacific J. Math., 34 (1970), pp. 17–25.

[4] A. El Kinani - M. Oudadess, *Non unital locally uniformly A-p-convex algebras,* Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, 51 (2002), pp. 465–475.

[5] M. Fragoulopoulou, *Symmetric Topological $*$-Algebras Applications,* Shrift–enreihe der Mathematischen Institus und der Graduiertenkollegs der Universität Munster, 3 serie, Heft 9 (1993).

[6] Vo-Khac Khoan, *Distributions, Analyse de Fourier, Operators aux dérivées partielles,* T. 1, Vuibert, Paris, 1972.

[7] Vo-Khac Khoan, *Distributions, Analyse de Fourier, Operators aux dérivées partielles,* T. 2, Vuibert, Paris, 1972.

[8] A. Mallios, *Topological algebras,* Selected topics, North Holland. 1986.

[9] E.A. Michael, *Locally multiplicatively-convex topological algebras,* Mem. Amer. Math. Soc., 11 (1952).

[10] Y. Tsertos, *A Characrerization of Q-algebras,* Functional Analysis, Approximation theory and Numerical Analysis. Ed. John M. Rassias, 1994, pp. 277–280.

Ecole Normale Supérieure,
B. P. 5118, Takaddoum,
10105 Rabat (MAROCCO)