LE MATEMATICHE
Vol. LVI (2001) – Fasc. I, pp. 27–37

SULLA COMPOSIZIONE DELLE FORME QUADRATICHE DI VARIABILI NORMALI IN COMPONENTI SFERICHE

GIORGIO PEDERZOLI

Si considera il rapporto tra due forme quadratiche di variabili normali indipendenti e la sua distribuzione sulla ipersfera unitaria. Viene poi ottenuta una decomposizione per forme quadratiche in termini di vettori aleatori di tipo sferico. Si ottengono infine le espressioni esatte per la densità di probabilità in alcuni casi particolari.

1. Introduzione.

Tra le distribuzioni multivariate continue quelle a contorno ellittico ed in particolare quelle chiamate sferiche godono di proprietà importanti sia per la costruzione del modello che per l'analisi inferenziale. Sviluppi teorici e applicazioni pratiche sono riportate, ad esempio, sia nell'articolo di Kelker [4] che nella monografia di Fang, Kotz and Ng [1].

Di particolare interesse nello studio della correlazione seriale è il rapporto tra due particolari forme quadratiche di variabili normali indipendenti. La distribuzione di forme quadratiche (sia omogenee che non omogenee) è stata studiata da Ruben [16], [17] in relazione al contenuto volumetrico di probabilità per insiemi convessi in $\mathbb{R}^n$. Per una trattazione sistematica e moderna sulle forme quadratiche di variabili aleatorie si consulti il volume di Mathai and

Entrato in Redazione il 4 settembre 2000

Classificazione AMS: 62H10, 62H99

Parole chiave: Variabili normali multivariate, Distribuzioni sferiche, Forme quadratiche.

Provost [8]. Ulteriori risultati sull'indipendenza delle forme bilineari sono stati ottenuti da Pederzoli [10], mentre il contributo di Provost [14] riguarda la distribuzione volumetrica di coni definiti in campi aleatori sferici.

Indipendentemente dai lavori di von Neumann [10], [11], [12] e quello di Koopmans [5], per questa particolare forma quadrata viene derivata una decomposizione in un numero finito di componenti vettoriali di tipo sferico. i risultati ottenuti consentono di calcolare il contenuto probabilistico di alcuni corpi convessi nel caso isotropico.

2. Distribuzione sferiche.

Definizione 2.1. Un vettore p-dimensionale $\mathbf{X}$ ha una distribuzione a contorno ellittico se la sua funzione caratteristica $\mathbf{\Phi}(\mathbf{t})$ può scriversi come

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}_{\mu}}\zeta\left(\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t}\right) \tag{2.1}$$

dove μ è un vettore p-dimensionale, Σ è una matrice $p \times p$ definita non negativa, e $\zeta(\cdot)$ denota una funzione non negativa. Ovviamente, anche, un qualsiasi sottovettore $\mathbf{X}$ avrà una distribuzione a contorno ellittico.

Definizione 2.2. Se μ è il vettore nullo e Σ la matrice identità di ordine p, allora si dice che $\mathbf{X}$ ha una sua distribuzione sferica che sarà indicata con

$$\mathbf{X} \sim \mathbf{S}_p(\zeta') \tag{2.2}$$

dove $\zeta(\mathbf{t}'t) = \mathbf{\Phi}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ è la funzione caratteristica di $\mathbf{X}$. Se $\mathbf{X}$ ha una distribuzione ellittica la cui funzione caratteristica è specificata da (2.1) allora $\Sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{X}-\mu) \sim \mathbf{S}_p(\zeta)$ dove $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ denota l'inverso della radice quadrata simmetrica di Σ.

Si constata immediatamente che le distribuzioni sferiche sono casi particolari di distribuzioni a contorno ellittico (per le quali i contorni di densità costante sono degli ellissoidi anziché delle sfere). Una classe più generale di distribuzioni, dette v-sferiche, è stata definita da Fernandez, Osiewalski and Steel [2] al fine di consentire una maggiore flessibilità nei modelli di analisi multivariata.

Esempio 1. Distribuzione normale multivariata $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_p(0, I)$ con

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \exp\left\{-\frac{\mathbf{x}'\mathbf{x}}{2}\right\}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$$

Esempio 2. Distribuzione normale multivariata $\mathbf{X} \simeq \frac{\mathbf{U}}{\sqrt{\frac{Y}{m}}}$ dove $\mathbf{U} \sim Np(0, I)$ e $\mathbf{Y}$ è una variabile chi-quadrato con

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{p+m}{2})}{(\pi m)^{\frac{p}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}\left(1 + \frac{\mathbf{x}'\mathbf{x}}{m}\right)^{-\frac{p+m}{2}}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$$

Esempio 3. Distribuzione uniforme nella ipersfera di raggio r

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_p(r)} I_{\{\mathbf{x}'\mathbf{x} \leq r\}}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$$

dove $V_p(r) = \frac{\pi^{\frac{p}{2}} r^p}{\Gamma(1+\frac{p}{2})}$ è il contenuto volumetrico della ipersfera p-dimensionale di raggio r.

Esempio 4. Distribuzione uniforme sulla ipersfera di raggio r

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{S_p(r)} I_{\{\mathbf{x}'\mathbf{x} = r\}}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$$

dove $S_p(r) = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})} r^{p-1}$ è la superfice della ipersfera p-dimensionale di raggio r.

Tra le proprietà delle distribuzioni sferiche ricordiamo che le densità sono della forma $g(\mathbf{x}'\mathbf{x})$, e che i contorni di densità costante sono delle ipersfere con centri nell'origine. Inoltre queste distribuzioni sono invarianti rispetto alle trasformazioni ortogonali, vale a dire $\mathbf{X} \simeq O\mathbf{X}$ dove O indica una matrice ortogonale di dimensione compatibile. In particolare, si veda Fang, Kotz and Ng [1], $\mathbf{X}$ ammette la rappresentazione stocastica $\mathbf{X} = W\mathbf{U}$ dove $\mathbf{U}$ ha una distribuzione uniforme sulla ipersfera unitaria di dimensione p e W è la distanza dall'origine. $\mathbf{U}$ e W sono distribuite in modo indipendente. La densità di $W = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{X}\|$ è data da

$$k_W(w) = \begin{cases} \dfrac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})} w^{p-1} g(w^2), & 0 < w < \infty \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \tag{2.3}$$

e la si può valutare passando alle coordinate polari, come indicato in Mathai, Provost and Hayakawa [8]:

$$\begin{aligned} x_1 &= w \sin\theta_1 \\ x_j &= w \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{j-1} \sin\theta_j, \quad j = 2, 3, \ldots, p-1 \\ x_p &= w \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{p-1} \end{aligned} \tag{2.4}$$

dove $0 < \theta_j \leq \pi$ per $j = 1, 2, \ldots, p-2$, e $0 < \theta_{p-1} \leq 2\pi$.
D'altro canto la densità di $V = \mathbf{X}'\mathbf{X} = W^2$ 'e data da

$$
(2.5) \qquad k_V(v) = \begin{cases} \dfrac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})} v^{\frac{p}{2}-1} g(v)\,, & 0 < v < \infty \\ 0\,, & \text{altrove} \end{cases}
$$

3. Distribuzioni di Dirichlet.

Definizione 3.1. Una variabile aleatoria univariata X è distribuita secondo una Beta di parametri α_1 e α_2 se la sua densità è della forma

$$
(3.1) \qquad f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha_1 - 1}(1-x)^{\alpha_2 - 1}}{B(x_1, x_2)}\,, & 0 < x < 1 \\ 0\,, & \text{altrove} \end{cases}
$$

dove $B(\alpha_1\alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$ è la funzione beta, con $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$.

Definizione 3.2. Un vettore aleatorio $\mathbf{D} = (D_1, D_2, \ldots, D_k)'$ ha una distribuzione di Dirichlet del primo tipo con parametri $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ se la sua densità è data da

$$
(3.2) \quad p(d_1, d_2, \ldots, d_k) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i\right)}{\prod\limits_{i=1}^{k} \Gamma(\alpha_i)} d_1^{\alpha_1 - 1} d_2^{\alpha_2 - 1} \ldots d_k^{\alpha_k - 1}\,, & \\ 0\,, & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

dove $d_k = 1 - \sum\limits_{i=1}^{k-1} d_i$ per $0 \leq d_i \leq 1$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Come si vede facilmente, questa non è che la distribuzione Beta multivariata e scriveremo

$$
(3.3) \qquad (D_1, D_2, \ldots, D_k)' \sim D_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)
$$

Esempio. Se il vettore $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ è distribuito uniformemente nel simplesso $S = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots n\right\}$ allora la densità di $\mathbf{X}$ è data da $[Vol(S)]^{-1} = n!$ e le relative distribuzioni marginali di dimensione $(n-1)$, vale a dire $f(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n)$ sono delle distribuzioni di Dirichlet.

Ricordiamo il risultato seguente:

Proposizione. *Sia $Y_j \sim Gamma(\alpha_j, \beta)$, $j = 1, 2, \dots, k$ e si supponga che le Y_j siano mutuamente e indipendentemente distribuite. Se $Y = \sum_{i=1}^{k} Y_j$ allora*

$$\left(\frac{Y_1}{Y}, \frac{Y_2}{Y}, \dots, \frac{Y_k}{Y}\right)' \sim D_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k) \tag{3.4}$$

In particolare, qualora la Y_j, fossero delle chi-quadrato indipendenti allora si avrebbe che

$$\left(\frac{Y_1}{Y}, \frac{Y_2}{Y}, \dots, \frac{Y_k}{Y}\right)' \sim D_k\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) \tag{3.5}$$

Estensioni delle distribuzioni di Dirichlet al caso in cui l'argomento è una matrice reale $p \times p$ definita positiva sono trattate in Mathai [6].

4. Distribuzione di una Forma Quadratica sulla Ipersfera.

Si considerino due forme quadratiche in p variabili normali indipendenti con media nulla e varianza unitaria

$$P = \sum_{i=1}^{p} X_i^2 \quad \text{e} \quad Q = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i^2 . \tag{4.1}$$

Mentre tutti i valori caratteristici di P sono uguali ad uno, quelli di Q si suppongono diversi l'uno dall'altro in modo da consentire il loro ordinamento crescente $\lambda_i < \lambda_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, p-1$. La densità di probabilità di P

$$(2\pi)^{-\frac{p}{2}} e^{-\frac{1}{2}P} = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} X_i^2} \tag{4.2}$$

è costante sulla ipersfera $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_p^2 = c$; la corrispondente funzione di densità

$$\frac{P^{\frac{p}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}P}}{2^{\frac{p}{2}} \Gamma(\frac{p}{2})} \tag{4.3}$$

è una chi-quadrato con p gradi di libertà. Le ipersuperfici sulle quali il rapporto

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i^2}{\sum_{i=1}^{p} X_i^2} = \frac{Q}{P} \tag{4.4}$$

è costante non sono altro che dei coni con il vertice nell'origine che sezionano la medesima porzione della superfice di ogni ipersfera $P = c$. Ne segue che la distribuzione condizionata di Z per un dato valore di P è indipendente dal valore della costante c e sarà quindi uguale alla sua funzione di distribuzione. In altre parole, le variabili aleatorie P e Z risultano distribuite in modo indipendente e di conseguenza la funzione di ripartizione per Z potrà descriversi come quella condizionata di Q sulla ipersfera unitaria $X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_p^2 = 1$. Impiegando il teorema d'inversione per le funzioni caratteristiche, Koopmans [5] ha trovato l'esprressione esatta della funzione di ripartizione per Z. Questa funzione è stata studiata per il caso in cui p è pari da von Neumann [10], [12], ma soltanto per particolari valori dei valori caratteristici. Riportiamo l'espressione per la derivata di ordine $\frac{p}{2} - 1$ della densità per Z in una forma leggermente diversa da quella originale.

$$\begin{array}{lll}
\text{(i)} & \dfrac{\left(\frac{p}{2}-1\right)!}{\pi} \dfrac{(-1)^{\frac{p-t-1}{2}}}{\prod_{s=1}^{p} |z-\lambda_s|^{\frac{1}{2}}}, & \text{per } \lambda_t < z < \lambda_{t+1} \text{ e } t \text{ dispari} \\
\text{(ii)} & \text{non esiste}, & \text{per } z = \lambda_t,\ t = 1, 2, \ldots, p \\
\text{(iii)} & \text{nulla}, & \text{per tutti gli altri valori di } z
\end{array} \tag{4.5}$$

I risultati disponibili in letteratura riguardanti la decomposizione di forme quadratiche in vettori sferici o ellittici si riferiscono soltanto a certi casi particolari come quello in cui la matrice della funzione quadratica indipendente. Nel lavoro di Provost and Young-Ho Cheong [15] vengono prese in esame forme quadratiche della forma $Q = \mathbf{X}^t A \mathbf{X}$ dove $\mathbf{X}$ può essere un qualsiasi vettore ellittico e A una matrice simmetrica.

5. Decomposizione di una Forma Quadratica in Vettori Sferici.

Sia $\mathbf{Y} \sim Sp(\zeta)$ con densità di probabilità $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = g(\mathbf{y}`\mathbf{y})$. Allora, ponendo $\mathbf{X} = O\ \mathbf{Y}$ dove O è una matrice ortogonale, per l'invarianza delle distribuzioni sferiche si ha che $\mathbf{X} \simeq \mathbf{Y}$ e $\mathbf{Y} \simeq W\,\mathbf{U}$ dove $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2 \ldots, Y_P)'$, $\mathbf{U} = (U_1, U_2 \ldots, U_P)'$, W rappresenta la distribuzione del raggio e $\mathbf{U}$ è uniformemente distribuita sulla sfera unitaria p-dimensionale. W e $\mathbf{U}$ sono distribuite in modo indipendente.

Se A è una matrice simmetrica e $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ indicano le radici caratteristiche di A, allora la forma quadratica $\mathbf{Y}'A\mathbf{Y}$ ammette la decomposizione seguente

$$
\begin{aligned}
(5.1) \qquad \mathbf{Y}'A\mathbf{Y} &= \mathbf{Y}'O'O'AO'O\mathbf{Y} \\
&\simeq \mathbf{X}'\Lambda\mathbf{X} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i^2 \\
&= \|\mathbf{X}\|^2 \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{X_i^2}{\|\mathbf{X}\|^2} \right)
\end{aligned}
$$

dove O è una matrice ortogonale che diagonalizza la matrice A e $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)' = O\mathbf{Y} \sim Sp(\zeta)$.
D'altro canto,

$$
\begin{aligned}
(5.2) \qquad \mathbf{X}'A\mathbf{X} &\simeq \mathbf{W}^2(\mathbf{U}'\Lambda\mathbf{U}) \\
&= \mathbf{W}^2 \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i^2 \right) \\
&= \|\mathbf{X}\|^2 \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i^2 \right)
\end{aligned}
$$

dove le U_i, $i = 1, \ldots, p$ sono le componenti di una distribuzione uniforme sulla ipersfera unitaria in $\mathbb{R}^p$ e $\mathbf{W}$ è la norma euclidea di $\mathbf{X}$ la cui densità, data da (2.3) è positiva solo nell'intervallo aperto $(0, \infty)$ e pertanto

$$
(5.3) \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{X_i^2}{\|\mathbf{X}\|^2} \simeq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i^2, \forall \mathbf{X} \in Sp(\cdot), -\infty < \lambda_i < \infty, \; i = 1, 2, \ldots, p
$$

In particolare, prendendo $\mathbf{X} \sim Np(0, I)$, dalla (3.5) segue che

$$
\left(\frac{X_i^2}{\|\mathbf{X}\|^2}, \frac{X_2^2}{\|\mathbf{X}\|^2}, \ldots, \frac{X_p^2}{\|\mathbf{X}\|^2} \right) = (D_1, D_2, \ldots, D_p) \sim D_p\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)
$$

che è anche la distribuzione di $(U_1^2, \ldots, U_p^2)$ e quindi

$$
(5.4) \qquad Z \equiv \sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i^2 \simeq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{X_i^2}{\|\mathbf{X}\|^2}, \simeq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i D_i; \quad \forall \mathbf{X} \in Sp(\cdot)
$$

con $\lambda_p \leq Z \leq \lambda_1$.

Tenendo conto delle possibili molteplicità delle radici caratteristiche, il risultato centrale sulla decomposizione di forme quadratiche in vettori aleatori sferici può enunciarsi come segue:

Teorema. *Sia* $\mathbf{Y} \sim Sp(\zeta)$ *e* A *una matrice reale* $p \times p$ *simmetrica. Allora la forma quadratica*

$$Q = \mathbf{Y}^t A \mathbf{Y}$$

ammette la rappresentazione stocastica

$$\mathbf{Y}^t A \mathbf{Y} \simeq VZ$$

dove $V = \|\mathbf{Y}\|^2$; Z *è distribuito indipendentemente da* V *come la seguente combinazione lineare delle componenti di una distribuzione di Dirichlet*

$$Z \sim \sum_{j=1}^{S} l_j D_j\,, \qquad l_{S<Z<l_i}$$

dove $(D_1, \ldots, D_S) \sim D_S(\frac{r_1}{2}, \ldots, \frac{r_S}{2})$ *e* $l_1, \ldots, l_S$ *sono gli autovalori non nulli di* A *con molteplicità* $r_1, \ldots, r_S$ *rispettivamente.*

Osservazione. Questa decomposizione è applicabile anche a vettori casuali centrali ellittici $\mathbf{T}$ nel modo seguente

$$\mathbf{T}'A\mathbf{T} = \mathbf{T}'\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}A\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{T} \simeq \mathbf{Y}'B\mathbf{Y}$$

dove $\mathbf{Y} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{T} \sim Sp(\cdot)$ e $B = \Sigma^{-\frac{1}{2}}A\Sigma^{-\frac{1}{2}} = B'$.

Dato che $\mathbf{Y}'A\mathbf{Y} \simeq VZ$ dove $V = \mathbf{W}^2 = \|\mathbf{X}\|^2 = \|\mathbf{Y}\|^2$, Z risulta distribuita come sopra e indipendentemente da V; infatti,

$$Z \simeq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{X_i^2}{\|\mathbf{X}\|^2} \simeq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i^2$$

Dove $U_1, U_2, \ldots, U_p$ sono le componenti di una distribuzione uniforme sulla sfera in $\mathbb{R}^p$.

La densità di $V = \mathbf{Y}'\mathbf{Y}$ è data da

$$h_V(v) = \begin{cases} \dfrac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})}\, v^{\frac{p}{2}-1} g(v)\,, & 0 < v < \infty \\ 0\,, & \text{altrove} \end{cases} \tag{5.5}$$

dove $g(\cdot)$ è tale che $g(\mathbf{y}'\mathbf{y}) = f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$, la densità di $\mathbf{Y}$.
Infine, siccome $L = \mathbf{Y}'A\mathbf{Y} \sim VZ$, si avrà che

$$f_L(l) = \int_0^\infty \frac{1}{v} k_Z\Big(\frac{l}{v}\Big) h_V(v)\, dv \tag{5.6}$$

dove $k_Z(\cdot)$ denota la densità di Z e

$$F_L(l) = \int_0^\infty K_Z\Big(\frac{l}{v}\Big) h_V(v)\, dv \tag{5.7}$$

dove $K_Z(\cdot)$ è la funzione di ripartizione di Z.

Esaminiamo per concludere qualche caso particolare. Sia $\mathbf{X} \sim Sp(\cdot)$ con $\mathbf{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ e si consideri la variabile $Z = \frac{\sum_{i=1}^p \lambda_i X_i^2}{\sum_{i=1}^p X_i^2}$ con $\lambda_i < \lambda_{i+1}$ per $i = 1, 2, \dots, p-1$. Come abbiamo visto Z è indipendente da $\|\mathbf{X}\|^2 = \mathbf{X}'\mathbf{X} = \sum_{i=1}^p X_i^2$. Senza perdere in generalità, si supponga $\mathbf{X} \sim Np(0, 1)$. Allora, per $p = 2$ si ottiene

$$Z = \frac{\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2}{X_1^2 + X_2^2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \frac{X_2^2}{X_1^2}}{1 + \frac{X_2^2}{X_1^2}} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{1 + \frac{X_2^2}{X_1^2}} + \lambda_2$$

dove $\frac{X_2^2}{X_1^2} \sim F_{1,1}$. La densità di probabilità si riduce a

$$k_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{(z-\lambda_1)(\lambda_2 - z)}} & , \lambda_1 < z < \lambda_2 \\ 0 & , \quad \text{altrove.} \end{cases}$$

Per $p = 4$, si ottiene che

$$\frac{dk_Z(z)}{dz} = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{(z-\lambda_1)(\lambda_2 - z)(\lambda_3 - z)(\lambda_4 - z)}} & , \quad \lambda_1 < z < \lambda_2 \\ 0 & , \quad \lambda_2 < z < \lambda_3 \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)(\lambda_4 - z)}} & , \quad \lambda_3 < z < \lambda_4 \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] K.T. Fang - S. Kotz - K.W. Ng, *Symmetric Multivariate and related distributions,* Chapman and Hall, London, 1990.

[2] C. Fernandez - J. Osiewalski - M.F.J. Steel, *Modelling and inference with v-spherical distribution,* Jour. of the American Statistical Association, 90 - 432 (1995) pp. 1331–1340.

[3] A.R. Kamat, *Distribution theory of two estimates for standard deviation based on second variate differences,* Biomatrika, 41 (1954), pp. 1–11.

[4] D. Kelker, *Distribution theory of spherical distributions and a location-scale generalization,* Sankhyā, ser. A, 32 (1970), pp. 419–430.

[5] T. Koopmans, *Serial correlation and quadratic forms in normal variables,* Ann. of Mathematical Statistics, 13 (1942), pp. 14–33.

[6] A.M. Mathai, *Jacobians of Matrix Transformations and Functions of Matrix Argument,* (1997) In corso di stampa.

[7] A.M. Mathai - S.B. Provost, *Quadratic Forms in Random Variables: Theory and applications,* Marcel Dekker, New York, 1992.

[8] A.M. Mathai - S.B. Provost - T. Hayakawa, *Bilinear forms and Zonal Polynomials,* Springer-Verlag, Lecture Notes in statistics, 102, 1995, New York.

[9] A.P. Morse - F.E. Grubbs, *The estimation of dispersion from differences,* Annals of Mathematical Statistic, 18 (1947), pp. 194–214.

[10] J. von Neumann, *Distribution of the ratio of the mean square successive difference to the variance,* Annals of Mathematical Statistics, 12 (1941), pp. 367–395.

[11] J. von Neumann - R.H. Kent - H.R. Bellison - B.I. Hart, *The mean square successive diference,* Annals of Mathematical Statistic, 12 (1941), pp. 153–162.

[12] J. von Neumann, *A further remark concerning the distribution of the ratio of the mean square successive difference to the variance,* Annals of Mathematical Statistics, 13 (1942), pp. 86–88.

[13] G. Pederzoli, *On the independence of bilinear forms in normal variables,* (1996) In preparazione.

[14] S.B. Provost, *Probability content of cones in spherically symmetric random fields,* (1996) Comunicazione privata.

[15] S.B. Provost - Young-Ho Cheong, *The probability content of cones in isotropic random fields,* (1997) Comunicazione privata.

[16] H. Ruben, *Probability content of regions under spherical normal distributions,* Annals of Mathematical Statistics, 31 (1960), pp. 598–618.

[17] H. Ruben, *Probability content of regions under spherical normal distributions, IV: The distribution of homogeneous and nonhomogeneous quadratic functions of normal variables,* Annals of Mathematical Statistics, 33 (1962), pp. 542–570.

[18] G. Tintner, *The variate-difference method,* Cowles Commission Monograph, 5 (1940), Principia Press, Bloomington.

Istituto di Metodi Quantitativi,
Università Cattaneo,
21053 Castellanza (Varese)