LE MATEMATICHE
Vol. LVI (2001) – Fasc. I, pp. 77–96

MISURABILITÀ, MISURE E INTEGRALI NEGLI SPAZI DI RIESZ DEDEKIND σ-COMPLETI MUNITI DI UNITÀ DEBOLE PER l'ORDINE

IRENE SISTO

Measurability with respect to a δ-ring of unitary elements of a Dedekind σ-complete Riesz space with a weak order unit and integrability with respect to a positive and finite measure on a δ-ring are investigated here. An approximation theorem for measurable elements by means of simple elements and a rappresentation theorem for Daniell integrals by means of integrals with respect to a measure are also established

Introduzione.

Qui e nel seguito E è uno spazio di Riesz Dedekind σ-completo, non ridotto al solo 0 e munito di *unità debole* $\mathbf{1}$ (*unità* secondo [11], Def. III.12.1) per l'ordine, $U(E) := U(E, \mathbf{1})$ l'insieme degli *elementi unitari* (*componenti* secondo [11], Def. III.12.2) di E e, per ogni $x \in E$, e_x è la *traccia* di x, cioè (cf. [11], Def. IV.8.1)

$$e_x := \sup_n \inf(\mathbf{1}, n|x|),$$

la quale è, a sua volta (cf. [11], Theorem IV.8.1), un elemento di $U(E)$.

Entrato in Redazione il 16 novembre 2000

Lavoro eseguito con il contributo dell'Università di Bari e del M.U.R.S.T.

Assegnato un *anello* A di elementi (unitari) di E, cioè (cf. [1], [3], [10]) un sottoinsieme non vuoto A di $U(E)$ tale che $\sup(x, y) \in A$ e $\inf(y, \mathbf{1} - x) \in A$ quali che siano $x, y \in A$, notoriamente (cf. [1], I, $\oint$ 3) il sottospazio vettoriale $R(A)$ degli elementi *A-semplici* (ovvero il sottospazio vettoriale di E generato da A) risulta un sottospazio di Riesz di E verificante la *proprietà di Stone*, cioè chiuso rispetto all'operazione $x \mapsto \inf(\mathbf{1}, x)$, lo stesso restando canonicamente munito di una norma compatibile con la struttura di spazio di Riesz (cf. [1] e [3]).

Nel n. 1 del presente lavoro, assieme ad alcuni risultati tecnicamente utili, per gli elementi positivi x di E verificanti la condizione $e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \in A$ per ogni $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ si prova un teorema di approssimazione con elementi positivi di $R(A)$.

Nel n. 2 si introduce il concetto di misurabilità rispetto a un *δ-anello A* di elementi di E assumendo che un elemento x di E è *A-misurabile* se e soltanto se $e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \in A$ e $e_{(x+\alpha\cdot\mathbf{1})^-} \in A$ per ogni $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$. Caratterizzata la nozione di misurabilità quando A è un *σ-anello* oppure una *σ-algebra* di elementi di E, si prova che l'insieme $M(A)$ degli elementi A-misurabili è un sottospazio di Riesz di E verificante la proprietà di Stone e chiuso rispetto alla convergenza maggiorata delle successioni nel senso dell'ordine. Lo stesso risulta chiuso rispetto alla convergenza delle successioni nel senso dell'ordine se e soltanto se A è un σ-anello e $\mathbf{1} \in M(A)$ se e soltanto se A è una σ-algebra. In ogni caso ogni elemento A-misurabile è limite per l'ordine di una successione di elementi di $R(A)$.

Poichè quando x è una funzione reale definita in un insieme X e $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, allora $e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1}^+)}$ è la funzione caratteristica di $\overset{-1}{x}(]\alpha, \rightarrow[)$ mentre $e_{(x+\alpha\cdot\mathbf{1})^-}$ è la funzione caratteristica di $\overset{-1}{x}(]\leftarrow, -\alpha[)$, la nozione di misurabilità sopra precisata, riferita al δ-anello (di elementi di $\mathbf{R}^X$) delle funzioni caratteristiche degli elementi di un dato δ-anello $\mathfrak{R}$ di parti di X ($\mathbf{1}$ è ora la funzione reale di costante valore 1), restituisce quella introdotta da W. M. Bogdanowicz (cf. [4] e [5]) e quindi, quando $\mathfrak{R}$ è un σ-anello, quella introdotta da P. R. Halmos (cf. [6]).

Nel n. 3, assegnati un δ-anello A di elementi di E, una *misura* positiva e finita μ su A e considerato su $R(A)$ l'*integrale di Daniell I_μ canonicamente dedotto da μ*, si introduce la nozione di integrabilità rispetto a μ che si studia agevolmente utilizzando quella di misurabilità. Si prova che lo spazio $L^{(1)}(A, \mu)$ degli elementi di E *μ-integrabili* risulta un sottospazio di Riesz di E chiuso rispetto alla convergenza maggiorata delle successioni nel senso dell'ordine includente $R(A)$ pur essendo, in generale, non contenuto in $M(A)$. Lo stesso verifica, inoltre, la proprietà di Stone mentre il *prolungamento lebesguiano* $(I_\mu)^{(1)}$ di I_μ ad $L^{(1)}(A, \mu)$ verifica i classici teoremi di convergenza. L'uso della minima *estensione* di (A, μ) in un'analoga coppia verificante una certa proprietà di *chiusura* consente di chiarire quando $L^{(1)}(A, \mu) \subset M(A)$.

Assegnati un sottospazio di Riesz R di E e un integrale di Daniell I su R, la teoria dell'integrale presentata da G. Aquaro in [2] consente di costruire il sottospazio di Riesz $L^1(R, I)$ degli elementi di E I*-integrabili* e il prolungamento I_1 di I a $L^1(R, I)$ di guisa che anche ora si verifichino i teoremi di convergenza. Posta, allora, in modo naturale la questione di "rappresentare" I_1 quale prolungamento lebesguiano dell'integrale di Daniell canonicamente dedotto da un'opportuna misura μ su un δ-anello di elementi di E, nel n. 4 si risolve la stessa nel modo più prevedibile, cioè a condizione che si verifichi la proprietà di Stone per $L^1(R, I)$. Per questo si utilizza una conseguenza del teorema di approssimazione del n. 1 la quale consente di estendere agli spazi di Riesz qui considerati anche il teorema di rappresentazione di [2], § 8, Teor. 3. Limitatamente alla suddètta misura μ, si deduce, infine, che gli elementi di E integrabili rispetto a μ sono tutti e soli quelli integrabili rispetto all'integrale di Daniell canonicamente dedotto da μ.

1. Premesse.

Assunto $E_+ := \{x \in E : 0 \leq x\}$, si ha $U(E) \subset E_+$ e $0, \mathbf{1} \in U(E)$. Inoltre per ogni $x \in U(E)$ si ha $x \leq \mathbf{1}$ e $\mathbf{1} - x \in U(E)$ mentre (cf. [11], Theorem III.12.1) risulta $\inf_{\iota \in I} x_\iota \in U(E)$ (rispettiv. $\sup_{\iota \in I} x_\iota \in U(E)$) per ogni famiglia $(x_\iota)_{\iota \in I}$ di elementi di $U(E)$ per la quale l'$\inf_{\iota \in I} x_\iota$ (rispettiv. il $\sup_{\iota \in I} x_\iota$) esiste. Si rammenta, inoltre, che (cf. [1], [8])

$$(1.1)\quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+)(\forall x, y \in U(E))(\inf(\alpha \cdot x, \beta \cdot y) = \inf(\alpha, \beta) \cdot \inf(x, y)).$$

Se, poi, $x \in E_+$ e $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, allora essendo (cf. [11], IV. 8, Proposition j) $e_{(x-\alpha \cdot \mathbf{1})^+} \leq \mathbf{1} - e_{(\alpha \cdot \mathbf{1} - x)^+}$, si ha (cf. [11], (12) di pag. 103) $\alpha \cdot e_{(x-\alpha \cdot \mathbf{1})^+} \leq \alpha \cdot (\mathbf{1} - e_{(\alpha \cdot \mathbf{1} - x)^+}) \leq \sup_n \inf(x, \mathbf{1} - e_{(\alpha \cdot \mathbf{1} - x)^+}) \leq x$ e, quindi, $e_{(x-\alpha \cdot \mathbf{1})^+} \leq \alpha^{-1} \cdot x$.

D'altra parte

$$(1.2)\qquad (\forall x \in E)(\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^*)(e_{(x-\alpha \cdot \mathbf{1})^+} = e_{(x^+ - \alpha \cdot \mathbf{1})^+})$$

e quindi, più in generale,

$$(1.3)\qquad (\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^*)(\forall x \in E)(e_{(x-\alpha \cdot \mathbf{1})^+} \leq \alpha^{-1} \cdot x^+).$$

Dopo ciò, considerato il sottospazio di Riesz degli elementi *limitati* di E

$$(1.4)\qquad B(E) := B(E, \mathbf{1}) := \{x \in E : (\exists\, a \in \mathbf{R}_+)(|x| \leq a \cdot \mathbf{1})\}$$

e posto, per ogni $x \in B(E)$,

$$(1.5)\qquad \|x\| := \inf\{a \in \mathbf{R}_+ : |x| \leq a \cdot \mathbf{1}\},$$

dai risultati di [3] si deduce che $B(E)$ contiene $R(U(E))$ mentre l'applicazione $x \mapsto \|x\|$ è una norma su $B(E)$ compatibile con la struttura di spazio di Riesz di $B(E)$ che induce su $R(U(E))$ la norma canonica di $R(U(E))$. Inoltre si ha che (cf. [3])

$$(1.6)\qquad (\forall x \in E_+)(\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^*)(x \leq 2\alpha \cdot \mathbf{1} \Rightarrow \|x - \alpha \cdot e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+}\| \leq \alpha).$$

Proviamo alcuni lemmi:

Lemma 1.1. *Se $x \in E_+$, $y \in U(E)$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$, allora*

i) $e_{(x-\beta\cdot y-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} = \sup\,(\inf\,(y, e_{(x-(\beta+\alpha)\cdot\mathbf{1})^+}), \inf\,(\mathbf{1} - y, e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+}))$;

ii) $e_{(\beta\cdot y-x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} = \inf\,(y, e_{((\beta-\alpha)\cdot\mathbf{1}-x)^+})$.

Dimostrazione. Siano x, y, α e β quelli previsti nell'asserto. Si ha, intanto, $\inf\,((\alpha+\beta)\cdot\mathbf{1}, x) \leq \inf\,(\beta\cdot y + \alpha\cdot\mathbf{1}, x) + \inf\,(\beta\cdot(\mathbf{1}-y), x)$ e, quindi, $x - \inf\,(\beta\cdot y + \alpha\cdot\mathbf{1}, x) \leq \inf\,(\beta\cdot(\mathbf{1}-y), x) + x - \inf\,((\alpha+\beta)\cdot\mathbf{1}, x)$. Pertanto, tenuto conto della (1.1), si ha che

$$(1.7)\qquad (\forall n \in \mathbf{N})(\inf\,(y, n(x - \inf\,(\beta\cdot y + \alpha\cdot\mathbf{1}, x))) = \\ = \inf\,(y, n(x - \inf\,((\alpha+\beta)\cdot\mathbf{1}, x)))).$$

Essendo, poi, $x - \inf\,(\alpha\cdot\mathbf{1}, x) \leq x - \inf\,(\beta\cdot y + \alpha\cdot\mathbf{1}, x) + \inf\,(\beta\cdot y, x)$, per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha $\inf\,(\mathbf{1}-y, n(x - \inf\,(\alpha\cdot\mathbf{1}, x))) \leq \inf\,(\mathbf{1}-y, n(x - \inf\,(\beta\cdot y + \alpha\cdot\mathbf{1}, x))) + \inf\,(\mathbf{1}-y, n\inf\,(\beta\cdot y, x))$ da cui, ancora a causa della (1.1), consegue che

$$(1.8)\qquad (\forall n \in \mathbf{N})(\inf\,(\mathbf{1}-y, n(x - \inf\,(\beta\cdot y + \alpha\cdot\mathbf{1}, x))) = \\ = \inf\,(\mathbf{1}-y, n(x - \inf\,(\alpha\cdot\mathbf{1}, x)))).$$

Applicando la (1.7) e la (1.8) si ha, allora,

$$\begin{aligned} e_{(x-\beta\cdot y-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} &= \sup_n \inf(\mathbf{1}, n(x-\beta\cdot y - \inf(x-\beta\cdot y, \alpha\cdot\mathbf{1}))) \\ &= \sup_n \inf(\mathbf{1}, n(x - \inf(x, \beta\cdot y + \alpha\cdot\mathbf{1}))) \\ &= \sup_n \inf(y, n(x - \inf(x, \beta\cdot y + \alpha\cdot\mathbf{1}))) \\ &+ \sup_n \inf(\mathbf{1}-y, n(x - \inf(x, \beta\cdot y + \alpha\cdot\mathbf{1}))) \\ &= \sup_n \inf(y, n(x - \inf((\alpha+\beta)\cdot\mathbf{1}, x))) \\ &+ \sup_n \inf(\mathbf{1}-y, n(x - \inf(\alpha\cdot\mathbf{1}, x))) \\ &= \inf(y, \sup_n \inf(\mathbf{1}, n(x - \inf((\alpha+\beta)\cdot\mathbf{1}, x)))) \\ &+ \inf(\mathbf{1}-y, \sup_n \inf(\mathbf{1}, n(x - \inf(\alpha\cdot\mathbf{1}, x)))) \\ &= \inf(y, e_{(x-(\alpha+\beta)\cdot\mathbf{1})^+}) + \inf(\mathbf{1}-y, e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+}) \\ &= \sup(\inf(y, e_{(x-(\alpha+\beta)\cdot\mathbf{1})^+}), \inf(\mathbf{1}-y, e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+})). \end{aligned}$$

Riguardo alla ii) si ha, intanto, che

$$\beta\cdot y - \inf(\beta\cdot y, x+\alpha\cdot\mathbf{1}) \leq \beta\cdot y - \inf(\beta\cdot\mathbf{1}, x+\alpha\cdot\mathbf{1}) + \inf(\beta\cdot(\mathbf{1}-y), x+\alpha\cdot\mathbf{1})$$

e da qui, tenuto conto di (1.1), consegue che

$$(1.9) \qquad (\forall n \in \mathbf{N})(\inf(y, n(\beta\cdot y - \inf(\beta\cdot y, x+\alpha\cdot\mathbf{1}))) = \\ = \inf(y, n(\beta\cdot\mathbf{1} - \inf(\beta\cdot\mathbf{1}, x+\alpha\cdot\mathbf{1}))))$$

mentre, ancora per la (1.1), si ha che

$$(1.10) \qquad (\forall n \in \mathbf{N})(\inf(\mathbf{1}-y, n(\beta\cdot y - \inf(\beta\cdot y, x+\alpha\cdot\mathbf{1}))) = 0).$$

Utilizzando la (1.9), la (1.10) e ragionando come sopra, si prova la ii).

Lemma 1.2. *Se A è un anello di elementi di E ed $x \in E_+$ tale che*

$$(1.11) \qquad (\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^*)(e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \in A),$$

allora

i) $(\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^*)(\forall y \in R_+(A))(y \leq x \Rightarrow e_{(x-y-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \in A)$;

ii) $(\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^*)(\forall \beta \in \mathbf{R}_+)(e_{(\inf(\beta\cdot\mathbf{1},x)-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \in A)$.

Dimostrazione. Sia $x \in E_+$ verificante la (1.11) e siano $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, $\beta \in \mathbf{R}_+$ e $y \in A$. A causa di i) del Lemma 1.1 si ha, intanto, che $e_{(x-\beta\cdot y-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \in A$. Se, poi, $y \in R_+(A)$, $y = \sum_{\iota\in I} \beta_\iota \cdot y_\iota$ con $(y_\iota)_{\iota\in I}$ famiglia finita di elementi a due a due estranei di A e $(\beta_\iota)_{\iota\in I}$ famiglia (finita) di elementi di $\mathbf{R}_+$ ed è $y \le x$, allora ragionando per induzione su card (I) si deduce che $e_{(x-y-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \in A$.

Riguardo alla ii), fermi restando $x \in E_+$ e $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, si osservi che per ogni $\beta \in \mathbf{R}_+^*$ si ha

$$e_{(\inf(\beta\cdot\mathbf{1},x)-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} = e_{\inf(((\beta-\alpha)\cdot\mathbf{1})^+,(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+)}\ .$$

Pertanto se $\alpha < \beta$, allora $\mathbf{1} = \sup_n \inf(\mathbf{1}, n(\beta-\alpha)\cdot\mathbf{1})$ e, quindi,

$$\begin{aligned} e_{(\inf(\beta\cdot\mathbf{1},x)-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} &= \sup_n \inf(\mathbf{1}, n\inf((\beta-\alpha)\cdot\mathbf{1}, (x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+)) \\ &= \sup_n \inf(\inf(\mathbf{1}, n(\beta-\alpha)\cdot\mathbf{1}), \inf(\mathbf{1}, n(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+)) \\ &= \inf(\mathbf{1}, e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+}) = e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \end{aligned}$$

mentre se $\beta \le \alpha$, allora $e_{(\inf(\beta\cdot\mathbf{1},x)-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} = 0$.

Teorema 1.1. (di approssimazione) *Sia A un anello di elementi di E e sia $x \in E_+$ verificante la* (1.11). *Allora esiste una successione crescente (x_n) di elementi positivi di $R(A)$ tale che $(o) - \lim_n x_n = x$.*

Dimostrazione. Si supponga dapprima che $x \in B(E)$ e si assuma

$$t(x) := \frac{1}{2}\|x\| \cdot e_{(x-\frac{1}{2}\|x\|\cdot\mathbf{1})^+}. \tag{1.12}$$

A causa della (1.3) dalla (1.12) consegue che $0 \le t(x) \le x$ mentre, tenuto conto della (1.6), si ha che $\|x - t(x)\| \le \frac{1}{2}\|x\|$. Resta allora costruita, per ricorrenza, la successione (x_n) di elementi di $[0, x]$ definita assumendo

$$x_0 := t(x) \text{ e } (\forall n \in \mathbf{N})(x_{n+1} := x_n + t(x - x_n)) \tag{1.13}$$

la quale verifica la seguente condizione:

$$(\forall n \in \mathbf{N})(\|x - x_n\| \le \frac{1}{2^{n+1}}\|x\|). \tag{1.14}$$

Dalla (1.14) posto $y := \sup_n x_n$, essendo per ogni $n \in \mathbf{N}$, $0 \le y - x_n \le x - x_n$ e, quindi, $\|y - x_n\| \le \|x - x_n\|$, consegue, poi, che $\lim_n \|y - x_n\| = 0$ nonchè

$x \geqq y$. Pertanto $(o) - \lim_n x_n = x$ mentre, tenuto conto della (1.11) e di i) del Lemma 1.2, per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha $x_n \in R_+(A)$. Sia, ora, soltanto $x \in E_+$. A causa di [11], Lemma IV. 2.1, posto per ogni $n \in \mathbf{N}$, $y_n := \inf(n\mathbf{1}, x)$, si ha

$$(1.15) \qquad x = (o) - \lim_n y_n.$$

D'altra parte, a causa di ii) del Lemma 1.2, per ogni $n \in \mathbf{N}$ y_n verifica la (1.11) e, quindi, per quanto sopra esiste una successione crescente $(y_{n,p})_{p \in \mathbf{N}}$ di elementi positivi di $R(A)$ tale che $(o) - \lim_p y_{n,p} = y_n$. Posto, allora, per ogni $q \in \mathbf{N}$, $x_q := \sup_{0 \leq k \leq q} y_{k,q}$, risulta $x_q \leq \sup_{0 \leq k \leq q+1} y_{k,q+1} = x_{q+1}$, $0 \leq x_q \in R(A)$ e, inoltre, $x_q \leq \sup_{0 \leq k \leq q} y_k = y_q$ da cui, per la (1.15), $(o) - \lim_q x_q \leq x$. Da ultimo, per ogni $k \in \mathbf{N}$ e per ogni $q \geq k$, si ha $y_{k,q} \leq x_q$ e, quindi, $y_k = (o) - \lim_q y_{k,q} \leq (o) - \lim_q x_q$ da cui, ancora per la (1.15), $x \leq (o) - \lim_q x_q$.

Un δ-*anello* (rispettiv. un σ-*anello*) di elementi di E è un anello A di elementi (unitari) di E tale che $\inf_n x_n \in A$ (rispettiv. $\sup_n x_n \in A$) per ogni successione di elementi di A, mentre una σ-*algebra* di elementi di E è un δ-anello A tale che $\mathbf{1} \in A$. Se, poi, L è un sottospazio di Riesz di E, allora la *traccia di* L si definisce assumendo

$$(1.16) \qquad t(L) := U(E) \cap L.$$

Evidentemente $t(L)$ è un anello di elementi di E e lo stesso è un δ-anello (rispettiv. un σ-anello) se L è chiuso rispetto alla convergenza maggiorata (rispettiv. alla convergenza) delle successioni nel senso dell'ordine e, in questo caso, è una σ-algebra se e soltanto se $\mathbf{1} \in L$. Sussiste il fondamentale.

Corollario. *Se L è un sottospazio di Riesz di E chiuso rispetto alla convergenza maggiorata delle successioni nel senso dell'ordine e verificante la proprietà di Stone, allora ogni elemento positivo di L è il limite per l'ordine di una successione crescente di elementi semplici positivi rispetto al δ-anello $t(L)$.*

Dimostrazione. Sia $0 \leq x \in L$ e sia $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$. A causa delle ipotesi per ogni $n \in \mathbf{N}$ è, allora, $\inf(\mathbf{1}, n(x - \alpha \cdot \mathbf{1})^+) \in L$ e, quindi, essendo per (1.3),

$$\inf(\mathbf{1}, n(x - \alpha \cdot \mathbf{1})^+) \leq e_{(x-\alpha\cdot 1)^+} \leq \alpha^{-1} \cdot x \in L\,,$$

risulta $e_{(x-\alpha\cdot 1)^+} \in L$ cioè $e_{(x-\alpha\cdot 1)^+} \in t(L)$. L'asserto consegue, allora, dal Teorema 1.1.

Sono tecnicamente utili gli ulteriori lemmi:

Lemma 1.3. *Se* $x \in E$ *e* $\alpha \in \mathbf{R}$, *allora*

i) $\mathbf{1} - e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} = \inf_n e_{(x-(\alpha+\frac{1}{n+1})\cdot\mathbf{1})^-}$;

ii) $\mathbf{1} - e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^-} = \inf_n e_{(x-(\alpha-\frac{1}{n+1})\cdot\mathbf{1})^+}$;

iii) $e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} = \sup_n (e_{(x-(\alpha+n)\cdot\mathbf{1})^+} - e_{(x-(\alpha+n+1)\cdot\mathbf{1})^+})$;

iv) $e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^-} = \sup_n (e_{(x-(\alpha-n)\cdot\mathbf{1})^-} - e_{(x-(\alpha-(n+1))\cdot\mathbf{1})^-})$.

Dimostrazione. Per la i) basta osservare che (cf. [11], Chap. IV, 8, Proposition k) $e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} = \sup_n e_{(x-(\alpha+\frac{1}{n+1})\cdot\mathbf{1})^+}$, che (cf. [1], III, 1, Lemma 6) $\inf_n(\mathbf{1} - e_{(x-(\alpha+\frac{1}{n+1})\cdot\mathbf{1})}) = 0$ ed utilizzare [11], Chap. IV, 8, Proposition j. Analogamente si prova la ii) osservando che $e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^-} = \sup_n e_{(x-(\alpha-\frac{1}{n+1})\cdot\mathbf{1})^-}$.

Per la iii) si considerino $h, k \in \mathbf{N}$ con $h < k$. Risulta (¹)

$$\inf(e_{(x-(\alpha+h)\cdot\mathbf{1})^+} - e_{(x-(\alpha+h+1)\cdot\mathbf{1})^+}, e_{(x-(\alpha+k)\cdot\mathbf{1})^+} - e_{(x-(\alpha+k+1)\cdot\mathbf{1})^+}) = 0$$

e, quindi (cf. [11], Theorem III. 6.4),

$$(\forall n \in \mathbf{N})(\sup_{0\leq k\leq n}(e_{(x-(\alpha+k)\cdot\mathbf{1})^+} - e_{(x-(\alpha+k+1)\cdot\mathbf{1})^+} = e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} - e_{(x-(\alpha+n+1)\cdot\mathbf{1})^+}).$$

Consegue che

$$\sup_n(e_{(x-(\alpha+n)\cdot\mathbf{1})^+} - e_{(x-(\alpha+n+1)\cdot\mathbf{1})^+}) = e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} - \inf_n e_{(x-(\alpha+n+1)\cdot\mathbf{1})^+}. \tag{1.17}$$

Inoltre, per n sufficientemente grande, a causa della (1.3) si ha

$$0 \leq e_{(x-(\alpha+n+1)\cdot\mathbf{1})^+} \leq (\alpha+n+1)^{-1}\cdot x^+$$

e, quindi, $\inf_n e_{(x-(\alpha+n+1)\cdot\mathbf{1})^+} = 0$. Dalla (1.17) consegue, allora, la iii).

In modo analogo si prova la iv) utilizzando e) del Lemma IV.10.1 di [11].

Lemma 1.4. *Se* $x \in E$ *e* $\alpha \in \mathbf{R}^*_-$, *allora*

$$\inf(e_x, e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+}) = \sup(e_{x^+}, e_{x^-} - \inf_n e_{(x-(\alpha+\frac{1}{n+1})\cdot\mathbf{1})^-}). \tag{1.18}$$

(¹) Se $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbf{R}$, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \beta_1 \leq \beta_2$ e $x \in E$, allora

$$\inf(e_{(x-\alpha_1\cdot\mathbf{1})^+} - e_{(x-\alpha_2\cdot\mathbf{1})^+}, e_{(x-\beta_1\cdot\mathbf{1})^+} - e_{(x-\beta_2\cdot\mathbf{1})^+}) = 0.$$

Dimostrazione. È, intanto (cf. [11], Chap. IV, 8, Propostions f, j),

$$\inf(e_x, e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+}) = \sup(e_{x^+}, \inf(e_{x^-}, e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+})) \tag{1.19}$$

mentre, tenuto conto di (1.5) di [10] e di i) del Lemma 1.3, si ha

$$\inf(e_{x^-}, e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+}) = e_{x^-} - \inf(e_{x^-}, \inf_n e_{(x-(\alpha+\frac{1}{n+1})\cdot\mathbf{1})^-}) .$$

Da qui essendo, quando n è sufficientemente grande, $e_{(x-(\alpha+\frac{1}{n+1})\cdot\mathbf{1})^-} \leq e_{x^-}$, consegue che

$$\inf(e_{x^-}, e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+}) = e_{x^-} - \inf_n e_{(x-(\alpha+\frac{1}{n+1})\cdot\mathbf{1})^-}$$

e, quindi, per la (1.19), si ha l'asserto.

2. Elementi A-misurabili.

Qui e nel seguito A è un assegnato δ-anello di elementi di E, $\sigma(A)$ è il più piccolo σ-anello di elementi di E contenente A mentre $A^{(l)}$ è la σ-algebra degli elementi y di $U(E)$ tali che per ogni $x \in A$ si abbia $\inf(x, y) \in A$.

Osservazione 1. Si ha $A \subset \sigma(A) \subset A^{(l)}$ e $\sigma(A)$ è costituito dagli $x \in U(E)$ del tipo $\sup_n x_n$ con (x_n) successione di elementi di A. Pertanto A, che è già *solido* in $A^{(l)}$ (cioè se $y \in A^{(l)}$, $x \in A$ e $|y| \leq |x|$, allora $y \in A$), risulta solido in $\sigma(A)$ mentre questo è, a sua volta, solido in $A^{(l)}$. Consegue che $A^{(l)} = (\sigma(A))^{(l)}$. Inoltre $R(A)$ risulta solido in $R(A^{(l)})$ e, quindi, in $R(\sigma(A))$ mentre questo è, a sua volta, solido in $R(A^{(l)})$.

L'insieme $M(A)$ degli elementi A-*misurabili* si definisce assumendo

$$M(A) := \{x \in E : (\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^*)(e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \in A \wedge e_{(x+\alpha\cdot\mathbf{1})^-} \in A)\}. \tag{2.1}$$

Osservazione 2. Se $x \in E_+$, allora $x \in M(A)$ se e soltanto se per ogni $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ si ha $e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \in A$.

Lemma 2.1. *Si ha che*

i) $(\forall a \in \mathbf{R})(\forall x \in M(A))(a \cdot x \in M(A)$;

ii) $(\forall x, y \in M(A))(\sup(x, y), \inf(x, y) \in M(A))$;

Dimostrazione. Si osservi che se $x \in M(A)$, allora $-x \in M(A)$. Per provare la i) siano $a \in \mathbf{R}_+^*$ e $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$. Allora $e_{(a\cdot x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} = e_{(x-\frac{\alpha}{a}\cdot\mathbf{1})^+}$ e $e_{(a\cdot x+\alpha\cdot\mathbf{1})^-} = e_{(x+\frac{\alpha}{a}\cdot\mathbf{1})^-}$. Per provare la ii) si osservi che se $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, allora $e_{(\sup(x,y)-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} = \sup(e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+}, e_{(y-\alpha\cdot\mathbf{1})^+})$ e (cf. [1], I, 5, Prop. 1)

$$e_{(\sup(x,y)+\alpha\cdot\mathbf{1})^-} = \inf(e_{(x+\alpha\cdot\mathbf{1})^-}, e_{(y+\alpha\cdot\mathbf{1})^-}).$$

Osservazione 3. Se $x \in U(E)$ e $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, allora a causa della (1.1) si ha $e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} = 0$ se $1 \leq \alpha$ e $e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} = x$ se $\alpha < 1$. Pertanto è

$$t(M(A)) = A. \tag{2.2}$$

Osservazione 4. Se B è un ulteriore δ-anello di elementi di E, allora $M(A) \subset M(B)$ se e soltanto se $A \subset B$. Pertanto

$$M(A) \subset M(\sigma(A)) \subset M(A^{(l)}). \tag{2.3}$$

Osservazione 5. Si ha che
i) $(\forall x \in U(E))(\forall a \in \mathbf{R}_+^*)(e_{a\cdot x} = x)$;
ii) $(\forall x \in R(A))(e_x \in A)$
iii) $(\forall x \in M(A))(e_x \in \sigma(A))$;
iv) $(\forall x \in M(A^{(l)})(e_x \in \sigma(A) \Leftrightarrow e_{x^+}, e_{x^-} \in \sigma(A))$.

Osservazione 6. Essendo

$$(\forall x \in E)(\forall \alpha \in \mathbf{R}_+)(e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \leq e_x, e_{(x+\alpha\cdot\mathbf{1})^-} \leq e_x), \tag{2.4}$$

se $x \in M(A^{(l)})$ e $e_x \in \sigma(A)$, (rispettiv. $e_x \in A$), allora (cf. Osservazione 1) $x \in M(\sigma(A))$ (rispettiv. $x \in M(A)$). Pertanto (cf. iii) dell'Osservazione 5) se $x \in E$, allora $x \in M(\sigma(A))$ se e soltanto se $x \in M(A^{(l)})$ ed $e_x \in \sigma(A)$.

Lemma 2.2. *Si ha che*

$$R(A) \subset M(A). \tag{2.5}$$

Dimostrazione. Se $x \in R(A)$ e $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, allora $(x - \alpha \cdot \mathbf{1})^+ \in R(A^{(l)})$, $(x+\alpha\cdot\mathbf{1})^- \in R(A^{(l)})$ e, quindi, a causa della ii) dell'Osservazione 5, $e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \in A^{(l)}$ e $e_{(x+\alpha\cdot\mathbf{1})^-} \in A^{(l)}$. Dunque $x \in M(A^{(l)})$ e quindi, essendo $e_x \in A$, tenuto conto dell'Osservazione 6 si ha $x \in M(A)$.

Osservazione 7. Dalle (2.2) e (2.5) consegue che

$$t(R(A)) = A. \tag{2.6}$$

Teorema 2.1. *$M(A)$ è solido in $M(\sigma(A))$ e in $M(A^{(l)})$; $M(\sigma(A))$ è solido in $M(A^{(l)})$.*

Dimostrazione. Basta tenere presente l'Osservazione 1 e notare che se $x, y \in E$ e $|x| \leq |y|$, allora per ogni $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ si ha $e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \leq e_{(|y|-\alpha\cdot\mathbf{1})^+}$ e $e_{(x+\alpha\cdot\mathbf{1})^-} \leq e_{(|y|-\alpha\cdot\mathbf{1})^+}$.

Dal Teorema 1.1 consegue il

Lemma 2.3. *Se x è un elemento positivo di $M(A)$, allora esiste una successione crescente (x_n) di elementi positivi di $R(A)$ tale che $(o) - \lim\limits_n x_n = x$.*

Osservazione 8. Se x è un elemento positivo di $M(\sigma(A))$, allora (cf. Osservazione 1 e Lemma 2.3) esiste una successione crescente (x_n) di elementi positivi di $R(A)$ tale che $x = (o) - \lim\limits_n x_n$.

Dal Lemma 1.2 consegue il

Lemma 2.4. *Se x è un elemento positivo di $M(A)$ e $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, allora $\inf(\varepsilon \cdot \mathbf{1}, x) \in M(A)$.*

Si passa a caratterizzare la misurabilità nel caso in cui A è un σ*-anello* oppure una σ*-algebra* di elementi di E.

Teorema 2.2. *Se A è un σ-anello di elementi di E e $x \in E$, allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

i) $x \in M(A)$;
ii) $(\forall \alpha \in \mathbf{R})(\inf(e_x, e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+}) \in A)$;
iii) $(\forall \alpha \in \mathbf{R})(\inf(e_x, \mathbf{1} - e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^-}) \in A)$;
iv) $(\forall \alpha \in \mathbf{R})(\inf(e_x, e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^-}) \in A)$;
v) $(\forall \alpha \in \mathbf{R})(\inf(e_x, \mathbf{1} - e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+}) \in A)$.

Dimostrazione. i)$\Rightarrow$ ii): Sia $x \in M(A)$ e sia $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$. Per la (2.4) si ha

$$\inf(e_x, e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+}) = e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \in A .$$

Essendo, per iii) e iv) dell'Osservazione 5, $e_x, e_{x^+}, e_{x^-} \in A$ e, se $\alpha \in \mathbf{R}_-^*$, $\inf\limits_n e_{(x-(\alpha+\frac{1}{n+1})\cdot\mathbf{1})^-} \leq e_{x^-}$ e, inoltre, $\inf\limits_n e_{(x-(\alpha+\frac{1}{n+1})\cdot\mathbf{1})^-} \in A$, per il Lemma 1.4 si ha $\inf(e_x, e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+}) \in A$. Questa è, poi, ovvia se $\alpha = 0$.

ii)$\Rightarrow$iii): Consegue da ii) del Lemma 1.3.

iii)$\Rightarrow$iv): Essendo, per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$,

$$\inf\left((\mathbf{1} - e_{(x-(\alpha-(n+1))\cdot\mathbf{1})^-}) - (\mathbf{1} - e_{(x-(\alpha-n)\cdot\mathbf{1})^-}), \mathbf{1} - e_{(x-(\alpha-n)\cdot\mathbf{1})^-}\right) = 0,$$

per iv) del Lemma 1.3 si ha (2)

$$\begin{aligned}\inf(e_x, e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^-}) &= \sup_n \inf(e_x, (\mathbf{1} - e_{(x-(\alpha-(n+1))\cdot\mathbf{1})^-}) - (\mathbf{1} - e_{(x-(\alpha-n)\cdot\mathbf{1})^-}) \\ &= \sup_n (\inf(e_x, \mathbf{1} - e_{(x-(\alpha-(n+1))\cdot\mathbf{1})^-}) - \inf(e_x, \mathbf{1} - e_{(x-(\alpha-n)\cdot\mathbf{1})^-}))\end{aligned}$$

e da qui consegue l'asserto.

iv)$\Rightarrow$v): Consegue da i) del Lemma 1.3.

v)$\Rightarrow$ii): Con ragionamento analogo a quello che si è fatto per provare che iii)$\Rightarrow$iv), utilizzando iii) del Lemma 1.3 per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ si ha

$$\inf(e_x, e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+}) = \sup_n (\inf(e_x, \mathbf{1} - e_{(x-(\alpha+n+1)\cdot\mathbf{1})^+}) - \inf(e_x, \mathbf{1} - e_{(x-(\alpha+n)\cdot\mathbf{1})^+}))$$

e da qui consegue l'asserto.

ii)$\Rightarrow$i): Se è vera la ii) e, quindi, la iv), allora la i) consegue dalla (2.4).

Teorema 2.3. *Se A è una σ-algebra di elementi di E e $x \in E$, allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

i) $x \in M(A)$;
ii) $(\forall \alpha \in \mathbf{R})(e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \in A)$;
iii) $(\forall \alpha \in \mathbf{R})(\mathbf{1} - e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^-} \in A)$;
iv) $(\forall \alpha \in \mathbf{R})(e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^-} \in A)$;
v) $(\forall \alpha \in \mathbf{R})(\mathbf{1} - e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \in A)$.

Dimostrazione. Con ragionamento analogo a quello del Teorema 2.2 si prova che ii), iii), iv), e v) sono equivalenti. Basta, allora, provare che i) $\Rightarrow$ii). A questo scopo siano $x \in M(A)$ e $\alpha \in \mathbf{R}^*_-$. A causa del Teorema 2.2 è $\inf(e_x, e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+}) \in A$. D'altra parte, a causa di ii) del Lemma 1.3 si ha $\mathbf{1} - e_x \leq \mathbf{1} - e_{x^-} = \inf_n e_{(x+\frac{1}{n+1}\cdot\mathbf{1})^+}$. Consegue che $\mathbf{1} - e_x \leq e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+}$ e, quindi, $e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} = \sup(\inf(e_x, e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+}), \mathbf{1} - e_x)$ da cui $e_{(x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \in A$.

Le proprietà di $M(A)$ vengono descritte nel successivo

(2) Se $x, y, z \in E_+$, $z \leq y$ e $\inf(y - z, z) = 0$, allora $\inf(x, y - z) = \inf(x, y) - \inf(x, z)$.

Teorema 2.4. *$M(A)$ è un sottospazio di Riesz di E, verifica la proprietà di Stone ed è chiuso rispetto alla convergenza maggiorata delle successioni nel senso dell'ordine. Inoltre esso è chiuso rispetto alla convergenza delle successioni nel senso dell'ordine se e soltanto se A è un σ-anello di elementi di E e si ha $\mathbf{1} \in M(A)$ se e soltanto se A è una σ-algebra di elementi di E.*

Dimostrazione. Si supponga che A sia una *σ-algebra* di elementi di E e si osservi che in questo caso, a causa del Teorema 2.3, per ogni successione maggiorata (x_n) di elementi di $M(A)$ si ha $\sup\limits_n x_n \in M(A)$. Proviamo, ora, che

$$(\forall x, y \in M(A))(x + y \in M(A)). \tag{2.7}$$

Verifichiamo preliminarmente che se x e y sono elementi positivi di $M(A)$, allora $x + y \in M(A)$ e $y - x \in M(A)$. Per quanto si è osservato sopra, la prima parte dell'asserto è vera a causa del Lemma 2.3. Riguardo alla seconda si supponga, dapprima, che $y \in R(A)$ e (cf. [3], Lemma 2.6) siano $(\beta_\iota)_{\iota \in I}$ una famiglia finita di elementi di $\mathbf{R}_+$ e $(y_\iota)_{\iota \in I}$ una famiglia finita di elementi di A tali che $y = \sup\limits_{\iota \in I} \beta_\iota \cdot y_\iota$. A causa di ii) del Lemma 1.1, per ogni $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ si ha, allora, $e_{(y-x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} = \sup\limits_{\iota \in I} \inf(y_\iota, e_{(x+(\alpha-\beta_\iota)\cdot\mathbf{1})^-})$ e, quindi, per il Teorema 2.3, $e_{(y-x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \in A$. Se, poi, $y \in M(A)$ e, ancora per il Lemma 2.3, (y_n) è una successione crescente di elementi positivi di $R(A)$ tale che $y = \sup\limits_n y_n$, allora per ogni $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ si ha $e_{(y-x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} = \sup\limits_n e_{(y_n-x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+}$ e, quindi, $e_{(y-x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \in A$ essendo, per quanto sopra, $e_{(y_n-x-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \in A$ per ogni n. Simmetricamente è $e_{(x-y-\alpha\cdot\mathbf{1})^+} \in A$ cioè $e_{(y-x+\alpha\cdot\mathbf{1})^-} \in A$ e, quindi, $y - x \in M(A)$. Ciò premesso, si deduce la (2.7) grazie all'identità $x + y = (x^+ + y^+) - (x^- + y^-)$.

Se, poi, A è un *σ-anello* e $x, y \in M(A)$, essendo $2\sup(|x|, |y|) \in M(A)$, $M(A)$ solido in $M(A^{(l)})$ e, per quanto sopra, $x + y \in M(A^{(l)})$, si ha ancora $x + y \in M(A)$ grazie alla disuguaglianza $|x + y| \leq 2\sup(|x|, |y|)$. Per il Lemma 2.1 $M(A)$ è, dunque, un sottospazio di Riesz di E. Per dimostrare che lo stesso è chiuso rispetto alla convergenza delle successioni nel senso dell'ordine è sufficiente verificare che se (x_n) è una successione crescente maggiorata di elementi *positivi* di $M(A)$, allora $\sup\limits_n x_n \in M(A)$. Ciò è ovvio in quanto A è un σ-anello. Viceversa se $M(A)$ è chiuso rispetto alla convergenza delle successioni nel senso dell'ordine, allora a causa di (2.2) A risulta un σ-anello.

Se, infine, A è un *δ-anello*, ragionando come sopra anche in questo caso $M(A)$ è un sottospazio di Riesz di E. Lo stesso, essendo solido in $M(\sigma(A))$, risulta chiuso rispetto alla convergenza maggiorata delle successioni nel senso dell'ordine mentre, per il Lemma 2.2, verifica la proprietà di Stone. L'ultima parte dell'asserto consegue ancora per la (2.2).

A causa del Lemma 2.3 si ha, allora, il

Corollario. *Ogni elemento di $M(A)$ è limite per l'ordine di una successione di elementi di $R(A)$.*

3. Elementi μ-integrabili.

Sia A un assegnato *δ-anello* di elementi unitari di E, sia μ una *misura* positiva e finita su A cioè una funzione reale definita in A verificante le seguenti condizioni:

i) $(\forall x, y \in A)(\inf(x, y) = 0 \Rightarrow \mu(x + y) = \mu(x) + \mu(y))$;

ii) $(\forall x \in A)(0 \leq \mu(x))$;

iii) $(\forall (x_n) \in A^{\mathbf{N}})(\inf\limits_n x_n = 0 \Rightarrow \inf\limits_n \mu(x_n) = 0)$

e sia I_μ *l'integrale di Daniell canonicamente dedotto da* μ, cioè (cf. [1], Parte II, 1, Teor. 1) l'unica forma lineare (positiva) I_μ su $R(A)$ verificante la condizione $I_\mu(x) = \mu(x)$ per ogni $x \in A$.

Si dice che $x \in E_+$ è *integrabile* rispetto a μ se e soltanto se esiste una successione crescente (x_n) di elementi positivi di $R(A)$ tale che $(o)-\lim\limits_n x_n = x$ e $(I_\mu(x_n))$ sia maggiorata. Il numero reale $\sup\limits_n I_\mu(x_n)$, che non dipende da (x_n), si denota con $(I_\mu)^{(1)}(x)$ mentre $L_+^{(1)}(A, \mu)$ è l'insieme degli $x \in E_+$ integrabili rispetto a μ. L'insieme $L^{(1)}(A, \mu)$ degli elementi di E integrabili rispetto a μ si definisce assumendo

$$L^{(1)}(A, \mu) := L_+^{(1)}(A, \mu) - L_+^{(1)}(A, \mu) \tag{3.1}$$

mentre se $x \in L^{(1)}(A, \mu)$ e $x', x'' \in L_+^{(1)}(A, \mu)$ con $x = x' - x''$, allora $(I_\mu)^{(1)}(x') - (I_\mu)^{(1)}(x'')$, che non dipende da x' e x'', si denota ancora con $(I_\mu)^{(1)}(x)$.

Osservazione 1. Evidentemente

$$L^{(1)}(A, \mu) \subset M(\sigma(A)) \subset M(A^{(l)}). \tag{3.2}$$

Tenendo conto dell'Osservazione 8 del n. 2 e del Teorema 2.1, si prova il

Lemma 3.1. *Se $0 \leq y \in M(A^{(l)})$, $x \in L_+^{(1)}(A, \mu)$ e $y \leq x$, allora $y \in L_+^{(1)}(A, \mu)$ e $(I_\mu)^{(1)}(y) \leq (I_\mu)^{(1)}(x)$.*

Osservazione 2. Dunque se $0 \leq y \in M(A^{(l)})$ e $x \in L_+^{(1)}(A, \mu)$, allora $\inf(y, x) \in L_+^{(1)}(A, \mu)$ e, in particolare, $\inf(\mathbf{1}, x) \in L_+^{(1)}(A, \mu)$.

Lemma 3.2. *Si ha che*

$$L_+^{(1)}(A, \mu) = \{x \in L^{(1)}(A, \mu) : 0 \leq x\}. \tag{3.3}$$

Dimostrazione. Invero se $0 \leq x \in L^{(1)}(A, \mu)$, se $x', x'' \in L_+^{(1)}(A, \mu)$ e $x = x' - x''$, allora $0 \leq x \in M(A^{(l)})$, $x \leq x'$ e, quindi, per il Lemma 3.1, $x \in L_+^{(1)}(A, \mu)$.

Teorema 3.1. *$L^{(1)}(A, \mu)$ è un sottospazio di Riesz di E verificante la proprietà di Stone e $(I_\mu)^{(1)}$ è una forma lineare positiva su $L^{(1)}(A, \mu)$.*

Teorema 3.2. *Se $x \in M(A^{(l)})$, allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*
i) *$x \in L^{(1)}(A, \mu)$;*
ii) *$|x| \in L^{(1)}(A, \mu)$;*
iii) *$x^+, x^- \in L^{(1)}(A, \mu)$.*
Inoltre, in questo caso, si ha $|(I_\mu)^{(1)}(x)| \leq (I_\mu)^{(1)}(|x|)$.

Corollario. *$L^{(1)}(A, \mu)$ è un sottoinsieme solido in $M(A^{(l)})$.*

Teorema 3.3. (della Convergenza Monòtona) *Se (x_n) è una successione crescente di elementi di $L^{(1)}(A, \mu)$, se $x \in E$, $(o) - \lim_n x_n = x$ e $((I_\mu)^{(1)}(x_n))$ è maggiorata, allora $x \in L^{(1)}(A, \mu)$ e $\lim_n (I_\mu)^{(1)}(x_n) = (I_\mu)^{(1)}(x)$.*

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ si può supporre $0 \leq x_n$ e, quindi, esiste una successione crescente $(x_{n,m})$ di elementi positivi di $R(A)$ tale che $(o) - \lim_m x_{n,m} = x_n$ (e la successione $(I_\mu(x_{n,m}))$ sia maggiorata). Posto, per ogni $m \in \mathbf{N}$, $y_m := \sup_{0 \leq i \leq m} x_{i,m}$, la (y_m) risulta una successione crescente di elementi positivi di $R(A)$. Inoltre per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $m \geq n$ si ha $x_{n,m} \leq y_m \leq \sup_{0 \leq i \leq m} x_i = x_m \leq x$ e, conseguentemente, $x_n \leq (o) - \lim_m y_m \leq x$ nonchè $\sup_m I_\mu(y_m) \leq \sup_m (I_\mu)^{(1)}(x_m) < +\infty$. Consegue che $(o) - \lim_m y_m = x$ e, quindi, $x \in L_+^{(1)}(R, \mu)$ e, inoltre, $(I_\mu)^{(1)}(x) = \sup_m I_\mu(y_m) \leq \sup_m (I_\mu)^{(1)}(x_m)$.

Le tecniche consuete consentono di provare l'ulteriore

Teorema 3.4. (della Convergenza Maggiorata) *Se (x_n) è una successione di elementi di $L^{(1)}(A,\mu)$, $x \in E$, $(o)-\lim_n x_n = x$ ed esiste $y \in L^{(1)}(A,\mu)$ tale che per ogni n si abbia $|x_n| \leq y$, allora $x \in L^{(1)}(A,\mu)$ e $\lim_n (I_\mu)^{(1)}(x_n) = (I_\mu)^{(1)}(x)$.*

Corollario. *$L^{(1)}(A,\mu)$ è chiuso rispetto alla convergenza maggiorata delle successioni nel senso dell'ordine ed $(I_\mu)^{(1)}$ è un integrale di Daniell su $L^{(1)}(A,\mu)$.*

Si definiscono, ora,

$$\overline{A}_\mu := t(L^{(1)}(A,\mu)) \quad \text{e} \quad \overline{\mu} := (I_\mu)^{(1)}|_{\overline{A}_\mu}. \tag{3.5}$$

Lemma 3.3. *$\overline{A}_\mu$ è un δ-anello di elementi di E includente A e $\overline{\mu}$ è l'unica misura positiva e finita su $\overline{A}_\mu$ la cui restrizione ad A coincide con μ.*

Lemma 3.4. *$\overline{A}_\mu$ è costituito da tutti e soli gli $x \in U(E)$ tali che $x = (o)-\lim_n x_n$ con (x_n) successione crescente di elementi di A tale che $\mu(x_n)$ sia maggiorata.*

Dimostrazione. Se $x \in \overline{A}_\mu$ e (x_n) è una successione crescente di elementi positivi di $R(A)$ tale che $x = (o)-\lim_n x_n$, risulta (cf. n. 2, Osservazione 5) $x = (o)-\lim_n e_{x_n}$ con (e_{x_n}) successione crescente di elementi di A e $\mu(e_{x_n}) \leq \overline{\mu}(x)$ per ogni n.

Siano, ora, $A_\uparrow^{\mathbf{N}}$ (rispettiv. $(\overline{A}_\mu)_\uparrow^{\mathbf{N}}$) l'insieme delle successioni crescenti di elementi di A (rispettiv. di $\overline{A}_\mu$). Con il significato naturale che la parola *estensione* viene ad assumere in questo contesto si ha, allora, il

Teorema 3.6. *$(\overline{A}_\mu, \overline{\mu})$ è la minima estensione di (A,μ) verificante la seguente condizione:*

$$(\forall (x_n) \in \overline{A}_{\mu\uparrow}^{\mathbf{N}})(\sup_n \overline{\mu}(x_n) < +\infty \Rightarrow (o)-\lim_n x_n \in \overline{A}_\mu). \tag{3.6}$$

Osservazione 4. Dunque $A = \overline{A}_\mu$ (e, quindi, $\mu = \overline{\mu}$) se e soltanto se

$$(\forall (x_n) \in A_\uparrow^{\mathbf{N}})(\sup_n \mu(x_n) < +\infty \Rightarrow (o)-\lim_n x_n \in A). \tag{3.7}$$

Osservazione 5. Essendo A un δ-anello e $\overline{A}_\mu \subset A^{(l)}$, risulta $A^{(l)} = (\overline{A}_\mu)^{(l)}$ e, quindi, $M(A^{(l)}) = M((\overline{A}_\mu)^{(l)})$. Consegue che $M(A) \subset M(\overline{A}_\mu) \subset M(A^{(l)})$ e, quindi (cf. Teorema 2.1), $M(A)$ è un sottoinsieme solido in $M(\overline{A}_\mu)$.

Sussiste l'ulteriore

Lemma 3.5. *$L^{(1)}(A,\mu)$ è un sottoinsieme solido in $M(\overline{A}_\mu)$.*

Dimostrazione. Tenuto conto del Corollario del Teorema 1.1, è intanto

$$L^{(1)}(A,\mu) \subset M(\overline{A}_\mu)$$

in quanto $L^{(1)}(A,\mu)$ verifica la proprietà di Stone. D'altra parte se $0 \leq y \in M(\overline{A}_\mu)$, $0 \leq x \in L^{(1)}(A,\mu)$ e $y \leq x$, utilizzando il Lemma 2.3 e le proprietà di $L^{(1)}(A,\mu)$, risulta $y \in L^{(1)}(A,\mu)$.

Essendo (cf. (2.2)) $A = t(M(A))$, consegue il

Teorema 3.7. *Si ha $L^{(1)}(A,\mu) \subset M(A)$ se e soltanto se $A = \overline{A}_\mu$.*

Dal Teorema 3.3 si deduce l'ulteriore

Teorema 3.8. (di unicità) *Se A e B sono δ-anelli di elementi di E e se μ e ν sono misure positive e finite rispettivamente su A e su B, allora $B \subset \overline{A}_\mu$, $\overline{\mu}|_B = \nu$, $A \subset \overline{B}_\nu$ e $\overline{\nu}|_A = \mu$ se e soltanto se $L^{(1)}(A,\mu) = L^{(1)}(B,\nu)$ e $(I_\mu)^{(1)} = (I_\nu)^{(1)}$.*

Corollario 1. *Se A è un δ-anello di elementi di E e μ e ν sono misure positive e finite su A tali che $L^{(1)}(A,\mu) = L^{(1)}(A,\nu)$ e $(I_\mu)^{(1)} = (I_\nu)^{(1)}$, allora $\mu = \nu$.*

Corollario 2. *Se A è un δ-anello di elementi di E e μ è una misura positiva e finita su A, allora*

$$L^{(1)}(A,\mu) = L^{(1)}(\overline{A}_\mu, \overline{\mu}) \quad e \quad (I_\mu)^{(1)} = (I_{\overline{\mu}})^{(1)}. \tag{3.8}$$

4. Elementi I-integrabili: teorema di rappresentazione.

Sia, ora, R un sottospazio di Riesz di un arbitrario spazio di Riesz Dedekind σ-completo E e sia I un integrale di Daniell su R. Gli accorgimenti metodologici introdotti in [2], riproducendo il processo costruttivo ivi indicato, consentono di costruire un sottospazio di Riesz $L^1(R,I)$ di E chiuso rispetto alla convergenza maggiorata delle successioni nel senso dell'ordine ed un prolungamento I_1 di I a $L^1(R, I)$ di guisa che I_1 verifichi un teorema della convergenza monotòna ed un teorema della convergenza maggiorata analoghi, nella formulazione, ai precedenti teoremi 3.3 e 3.4.

Tutto ciò si realizza mediante la costruzione di un integrale superiore I^* e di un conseguente integrale inferiore I_* su un opportuno sottospazio di Riesz $R^*(I)$ di E. Lo spazio $L^1(R, I)$ degli elementi I-*integrabili* si costruisce, quindi, assumendo che $x \in L^1(R, I)$ se e soltanto se $x \in R^*(I)$ e $I^*(x) = I_*(x)$. Si definisce, in questo caso, $I_1(x) := I^*(x) = I_*(x)$. I teoremi di convergena ai quali si è sopra accennato si ottengono quale conseguenza di un teorema di convergenza di I^* in $R^*(I)$.

Dopo ciò, supposto che **1** sia l'unità debole di E sopra utilizzata, si assuma

$$A := t(L^1(R, I)) \quad \text{e} \quad \mu := (I_1)|_A, \tag{4.1}$$

Evidentemente A risulta un δ-anello di elementi di E e μ risulta una misura positiva e finita su A. Inoltre si ha

$$R(A) \subset L^1(R, I) \quad \text{e} \quad I_\mu = (I_1)|_{R(A)}. \tag{4.2}$$

Sussiste il

Teorema 4.1. (di rappresentazione) *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*
i) $L^1(R, I)$ *verifica la proprietà di Stone;*
ii) $L^1(R, I) = L^{(1)}(A, \mu)$ *e* $I_1 = (I_\mu)^{(1)}$*;*
iii) $L^1(R, I) = L^1(R(A), I_\mu)$ *e* $I_1 = (I_\mu)_1$.

Dimostrazione. Riguardo all'equivalenza i)$\Leftrightarrow$ iii) basta riprodurre il Corollario 1 del Teorema 1 del par. 5 di [2], il Lemma 2 del par. 8 di [2] ed il Teorema 3 del par. 8 di [2] ricordando la (4.2) ed utilizzando, quando è vera i), il Corollario del Teorema 1.1 per verificare che se $0 \leq x \in L^1(R, I)$, allora x risulta limite per l'ordine di una successione crescente di elementi positivi di $R(A)$.

Poichè ii)$\Rightarrow$ i) in quanto (cf. Teorema 3.1) $L^{(1)}(A, \mu)$ verifica la proprietà di Stone, basta provare che i) $\Rightarrow$ ii). A questo scopo sia vera i) e sia $0 \leq x \in L^1(R, I)$. Come sopra esiste, allora, una successione crescente (x_n) di elementi positivi di $R(A)$ tale che $x = (o) - \lim\limits_n x_n$. Inoltre (cf. (4.2)), $(I_1(x_n))$ e, quindi, $(I_\mu(x_n))$ è maggiorata e, quindi, $x \in L^{(1)}(A, \mu)$ e

$$(I_\mu)^{(1)}(x) = \lim_n I_\mu(x_n) = \lim_n I_1(x_n) = I_1(x).$$

Se, infine, è $0 \leq x \in L^{(1)}(A, \mu)$ e (x_n) è una successione crescente di elementi positivi di $R(A)$ tale che

$$(o) - \lim_n x_n = x \tag{4.3}$$

e $(I_\mu(x_n))$ sia maggiorata, allora (cf. (4.2)) (x_n) è anche una successione crescente di elementi (positivi) di $L^1(R, I)$ tale che $(I_1(x_n))$ sia maggiorata e ciò, a causa di (4.3), ancora per il teorema della Convergenza Monotòna in $L^1(R, I)$, prova che $x \in L^1(R, I)$.

Corollario. *Se A e μ sono quelli definiti in* (4.1), *allora*

$$L^{(1)}(A, \mu) = L^1(R(A), I_\mu) \quad e \quad (I_\mu)^{(1)} = (I_\mu)_1.$$

Osservazione. Prima di concludere si osservi che in [9] a partire dai medesimi R e I ed utilizzando il solo integrale superiore I^*, in uno spazio di Riesz Dedekind σ-completo E si dimostrano i teoremi di convergenza, nella forma più generale che essi assumono nella teoria dell'integrale di Lebesgue, in relazione ad un'arbitraria *coppia di Daniell I-completa.* Non appena si munisca E di un'unità debole per l'ordine, facendo ancora uso del Corollario del Teorema 1.1 e riproducendo l'equivalenza i)$\Leftrightarrow$ii) del teorema precedente, con le modalità di sopra si può provare un teorema di rappresentazione nell'ambito della teoria delineata in [9].

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Ambrosetti, *Rappresentazioni definite da integrali di Daniell,* Rend. di Matem., (VI), 8 - 4 (1975), pp. 857–909.

[2] G. Aquaro, *Alcuni aspetti della teoria dell'integrale di Daniell-Stone,* Conf. del Sem. di Mat. dell'Univ. di Bari, 100, 101, 102 (1972).

[3] G. Aquaro - M.A. Puglisi, *Spazi di Riesz e Algebre di Banach,* "Rapporti" del Dipartimento Interuniversitario di Matematica, Università e Politecnico di Bari, 60, (2000).

[4] W.M. Bogdanowicz, *Measurability and Linear Lattices of Functions Closed under Convergence Everywhere,* Bull. Acad. Pol. Sc., Sèr. Sci. Math. Astr. e Phys., 21 - 1 (1972), pp. 981–986.

[5] W.M. Bogdanowicz, *Characterization of Linear Lattices of Functions closed under Dominated Convergence,* Bull. Acad. Pol. Sc., Sèr. Sci. Math. Astr. e Phys., 23 - 5 (1975), pp. 525–530.

[6] P.R. Halmos, *Measure Theory,* D. Van Nostrand Co., New York, 1950.

[7] W.A.J. Luxemburg - A.C. Zaanen, *Riesz Spaces I,* North Holland Company, 1971.

[8] N.M. Rice, *Multiplication in Vector Lattices,* Canad. J. Math., 20 (1968), pp. 1136–1149.

[9] I. Sisto, *Integrazione negli spazi di Riesz Dedekind σ-completi,* Atti della Accad. delle Sc. di Torino, 127 - 5-6 (1993), pp. 199–213.

[10] I. Sisto, *Reticoli di elementi unitari di uno spazio di Riesz con unità debole per l'ordine: prolungamento di funzioni modulari,* Atti della Accad. delle Sc. di Torino, 134 (2000) (in corso di stampa).

[11] B.Z. Vulikh, *Introduction to the Theory of Partially Ordered Space,* (English translation) Wolters-Noordhoff, Ltd., Groningen 1967.

Dipartimento Interuniversitario di Matematica,
Università degli Studi e Politecnico di Bari.
Via E. Orabona 4,
70125 Bari (ITALIA)