LE MATEMATICHE
Vol. LVI (2001) – Fasc. I, pp. 171–181

SPAZI PLANARI METRICI

SANDRO RAJOLA - MARIA SCAFATI TALLINI

We call *planar space* a triple $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$, where $(S, \mathcal{L})$ is a finite linear space not reduced to a line and $\mathcal{P}$ is a family of proper subspaces of $(S, \mathcal{L})$, called *planes*, such that every plane contains three non-collinear points and through three non-collinear points there is a unique plane of $\mathcal{P}$.

In $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ we define a metric which allows us to study the perspectivities between the triangles of $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$.

1. Introduzione.

Uno spazio planare è una terna $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$, dove $(S, \mathcal{L})$ è uno spazio lineare finito non ridotto ad una retta e $\mathcal{P}$ è una famiglia di sottospazi propri di $(S, \mathcal{L})$, chiamati piani, tale che ogni piano contiene tre punti non allineati e per tre punti non allineati passa uno ed un solo piano.

In $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ viene definita una metrica che permette lo studio delle prospettività tra triangoli di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$.

2. Sugli spazi planari.

Uno *spazio planare* è una terna $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$, dove $(S, \mathcal{L})$ è uno spazio lineare finito non ridotto ad una retta e $\mathcal{P}$ è una famiglia di sottospazi propri di $(S, \mathcal{L})$, chiamati *piani*, tali che ogni piano contiene tre punti non allineati e per tre punti

Entrato in redazione il 7 dicembre 2001.

non allineati passa uno ed un solo piano. Si verifica facilmente che l'intersezione di due piani distinti o è vuota, oppure è un punto, oppure è una retta.

Associamo a ciascun piano di $\mathcal{P}$ un numero primo, in modo tale che a piani distinti vengano associati primi distinti. Ad ogni punto $x \in S$ associamo il prodotto X dei primi relativi ai piani per x. Osserviamo che, se $x \neq y$, si ha $X \neq Y$.

Siano infatti x ed y due punti distinti di S e sia r la retta per essi. Poiché $(S, \mathcal{L})$ non si riduce alla retta r, esiste un punto $z \notin r$. Sia π il piano per x, y, z. Poiché π è un sottoinsieme proprio di S, esiste un punto $u \in S - \pi$. Il piano π' per i tre punti non allineati x, z ed u, non contiene y. Dunque π' è un piano per x che non contiene y. Ne segue che $X \neq Y$, in quanto il fattore primo di X relativo al piano π' non è fattore di Y. L'osservazione è così provata. Da quanto appena provato segue anche che $x = y$, se e solo se, $X = Y$.

Siano ora x, y, z tre punti distinti di S allineati su una retta r. Siano $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ i piani di $\mathcal{P}$ contenenti r. È facile verificare che $n > 1$. Sia p_j il primo associato a π_j, per ogni $j = 1, \dots, n$. Evidentemente si ha

$$m = M.C.D.(X, Y) = p_1 p_2 \cdots p_n.$$

È noto che esistono due interi M ed N tali che:

$$m = MX + NY.$$

Per ogni punto z della retta r si ha:

$$Z = k(p_1 p_2 \cdots p_n) = k(MX + NY) = M'X + N'Y,$$

con k, M', N' interi.

Viceversa, siano ora x, y, z tre punti distinti di S tali che:

$$Z = aX + bY, \qquad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Sia r la retta per x ed y e siano $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ i piani per r. Sia inoltre p_j il primo associato al piano π_j, per ogni $j = 1, \dots, n$. Evidentemente si ha:

$$X = kp_1 p_2 \cdots p_n,$$
$$Y = k' p_1 p_2 \cdots p_n.$$

Ne segue che

$$Z = akp_1 p_2 \cdots p_n + bk' p_1 p_2 \cdots p_n = p_1 p_2 \cdots p_n (ak + bk')$$

e dunque che $z \in r$, in quanto Z contiene i primi relativi ai piani per r ed è $n > 1$. Abbiamo così provato il seguente

Teorema 1. *Siano x, y, z tre punti distinti di S e siano X, Y, Z gli interi ad essi associati. Allora x, y, z sono allineati, se e solo se, ciascuno degli interi X, Y, Z è combinazione lineare a coefficienti interi degli altri due.*

Proviamo ora il seguente

Teorema 2. *Siano x, y, z, t quattro punti distinti di S e siano X, Y, Z, T gli interi ad essi associati. Se uno di tali interi è combinazione lineare a coefficienti in $\mathbb{Z}$ degli altri tre, allora x, y, z e t sono complanari.*

Dimostrazione. Se tre dei punti x, y, z, t sono allineati, la tesi è ovvia. Supponiamo allora che tali punti siano a tre a tre non allineati. Sia

$$T = aX + bY + cZ, \text{ con } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Sia π il piano per x, y, z e sia p il primo associato a π. Evidentemente si ha $X \equiv 0 \bmod p$, $Y \equiv 0 \bmod p$, $Z \equiv 0 \bmod p$. Ne segue che $T \equiv 0 \bmod p$ e dunque che $t \in \pi$. Il teorema è così provato.

Il teorema 2 è parzialmente invertibile, come mostra il seguente

Teorema 3. *Siano x, y, z, t quattro punti a tre a tre non allineati di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ giacenti su un piano proiettivo π di $\mathcal{P}$. Siano X, Y, Z, T gli interi ad essi associati. Allora ciascuno di tali interi è combinazione lineare a coefficienti in $\mathbb{Z}$ degli altri tre.*

Dimostrazione. Sia r la retta xy ed r' la retta zt. Si ha $r \cap r' = \{u\}$, con $u \neq x$, $u \neq y$, $u \neq z$, $u \neq t$. Le rette xt ed yz si incontrano in un punto $v \neq u$. Si ha $V = aX + bT$, $Z = a'Y + b'V$, con $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$. Ne segue che $Z = a'Y + b'aX + b'bT$. Analoghi risultati si ottengono con lo stesso procedimento per gli interi X, Y, T. Il teorema è così provato.

Associamo ora a ciascuna retta $r \in \mathcal{L}$ il numero R prodotto dei primi associati ai piani per r. È facile verificare che per ogni retta di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ vi sono almeno due piani distinti, e che a rette distinte sono associati numeri distinti. Siano r_1, r_2, r_3 tre rette di $\mathcal{L}$ con $r_1 \neq r_2$ giacenti su uno stesso piano π e sia p il primo associato a π. Si ha evidentemente $R_1 \equiv 0 \bmod p$, $R_2 \equiv 0 \bmod p$, $R_3 \equiv 0 \bmod p$, dove R_j è il prodotto dei primi associati ai piani per r_j, $j = 1, 2, 3$. Evidentemente $p = M.C.D.(R_1, R_2)$ e quindi si ha

$$p = aR_1 + bR_2 \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{Z},$$
$$R_3 = cp \qquad \text{con } c \in \mathbb{Z}$$

e quindi

$$R_3 = caR_1 + cbR_2 = dR_1 + d'R_2,$$

con d, d' interi.

Viceversa, supponiamo che le rette distinte r_1 ed r_2 giacciano su uno stesso piano π cui è associato il primo p. Inoltre sia r_3 una retta di $\mathcal{L}$ tale che

$$R_3 = aR_1 + bR_2, \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Si ha allora $R_1 \equiv 0 \bmod p$, $R_2 \equiv 0 \bmod p$ e dunque $R_3 \equiv 0 \bmod p$, cioè $r_3 \subset \pi$. Abbiamo così provato il

Teorema 4. *Siano r_1, r_2 due rette distinte di $\mathcal{L}$ contenute in uno stesso piano π. Allora una retta $r_3 \in \mathcal{L}$ giace su π, se e solo se, R_3 è combinazione lineare a coefficienti interi di R_1 ed R_2.*

Il teorema 4 afferma in sostanza che ogni retta di π è generata da due rette distinte di π. Dunque *una coppia di rette distinte di π è un generatore del piano rigato π.*

Siano r ed x rispettivamente una retta ed un punto di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ con $x \notin r$. Sia π il piano contenente r ed x e sia p il primo associato a π. Sia u una retta di π. Si ha:

$$p = M.C.D.(R, X),$$

in quanto è unico il piano per x ed r, e dunque

$$p = aR + bX, \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre si ha

$$U = kp, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

perché $\pi \supset u$. Ne segue

$$U = kaR + kbX = k'R + k''X, \quad \text{con } k', k'' \in \mathbb{Z}.$$

Sia ora u una retta di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ tale che

$$U = aX + bR, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Dalla ultima relazione scritta, da $X \equiv 0 \bmod p$ ed $R \equiv 0 \bmod p$ segue $U \equiv 0 \bmod p$ e dunque $u \subset \pi$. Abbiamo così provato il seguente

Teorema 5. *Siano x ed r rispettivamente un punto ed una retta di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ con $x \notin r$ e sia π il piano per x ed r. Allora una retta u di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ è contenuta in π, se e solo se, U è combinazione lineare a coefficienti in $\mathbb{Z}$ di X ed R.*

Dal teorema 5 segue che la coppia (x, r), con $x \notin r$, è un *generatore* del piano rigato π.

Sia ora x un punto di S e sia r una retta di $\mathcal{L}$ tali che $x \notin r$. Sia y un punto del piano π contenente x ed r e sia p il primo associato a π. Si ha:

$$p = aX + bR, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{Z},$$

in quanto $p = M.C.D.(X, R)$, ed anche

$$Y = kp, \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z},$$

in quanto $y \in \pi$. Ne segue che

$$Y = kaX + kbR = k'X + k''R, \quad \text{con } k', k'' \in \mathbb{Z}.$$

Sia ora y un punto di S tale che

$$Y = aX + bR, \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Da $X \equiv 0 \bmod p$, $R \equiv 0 \bmod p$ e dalla precedente relazione segue $Y \equiv 0 \bmod p$ e dunque $y \in \pi$. Abbiamo così provato il seguente

Teorema 6. *Siano x ed r rispettivamente un punto ed una retta di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ con $x \notin r$, e sia π il piano per x ed r. Allora un punto y di S appartiene a π, se e solo se, Y è combinazione lineare a coefficienti in $\mathbb{Z}$ di X ed R.*

Il teorema 6 afferma che *la coppia (x, r), con $x \notin r$, è un generatore del piano punteggiato π.*

3. Una metrica su $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$.

Consideriamo la seguente applicazione

$$d : (x, y) \in S \times S \to |X - Y| \in \mathbb{Z}^+.$$

Teorema 7. *L'applicazione d è una metrica su $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$.*

Dimostrazione. Si ha evidentemente $d(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in S \times S$. Inoltre risulta

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |X - Y| = 0 \Leftrightarrow X = Y \Leftrightarrow x = y.$$

La proprietà simmetrica e la diseguaglianza triangolare sono ovvie. Il teorema è così provato.

Definiamo *segmento* di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ una coppia non ordinata $s = \{x, y\}$ di punti di S. I punti x, y saranno detti *estremi* di s. Chiameremo *lunghezza* di s il numero intero $d(x, y)$. Chiameremo *segmento nullo* un segmento di lunghezza zero.

Teorema 8. *Siano s_1, s_2 due segmenti di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ e siano ℓ_1, ℓ_2 rispettivamente le lunghezze di s_1 ed s_2. Allora, se $\ell_1 \equiv 0 \bmod \ell_2$, oppure $\ell_2 \equiv 0 \bmod \ell_1$, i segmenti s_1 ed s_2 sono complanari.*

Dimostrazione. Sia $s_1 = \{x_1, y_1\}$, $s_2 = \{x_2, y_2\}$, $\ell_1 \equiv 0 \bmod \ell_2$. Se tre dei quattro punti x_1, y_1, x_2, y_2 sono allineati su una retta, la tesi è ovvia.

Supponiamo dunque che gli estremi di s_1 ed s_2 siano a tre a tre non allineati (e dunque tutti distinti). Dalla condizione $\ell_1 \equiv 0 \bmod \ell_2$ segue

$$|X_1 - Y_1| = k|X_2 - Y_2|, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}^+,$$

cioè

$$X_1 = Y_1 \pm k(X_2 - Y_2).$$

Dunque X_1 è combinazione lineare a coefficienti interi di Y_1, X_2, Y_2. Dal teorema 2 segue che x_1, y_1, x_2, y_2 sono complanari e dunque che tali sono s_1 ed s_2. Analogamente si procede nel caso $\ell_2 \equiv 0 \bmod \ell_1$.

Il teorema è così provato.

Diremo che due segmenti di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ sono *consecutivi* se essi sono distinti ed hanno un estremo in comune.

Teorema 9. *Siano s_1 ed s_2 due segmenti consecutivi di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ di lunghezze rispettivamente ℓ_1 ed ℓ_2 e sia $\ell_1 \equiv 0 \bmod \ell_2$, oppure $\ell_2 \equiv 0 \bmod \ell_1$. Allora s_1 ed s_2 giacciono su una stessa retta.*

Dimostrazione. Sia $s_1 = \{x_1, y_1\}$, $s_2 = \{y_1, y_2\}$. Se $x_1 = y_1$, oppure $y_1 = y_2$ la tesi è ovvia. Sia dunque $x_1 \neq y_1$, $y_1 \neq y_2$ ($x_1 \neq y_2$ perché s_1 ed s_2 sono consecutivi). Si ha:

$$|X_1 - Y_1| = k|Y_2 - Y_1|, \qquad k \in \mathbb{Z}^+,$$

cioè

$$X_1 = (1 \mp k)Y_1 \pm kY_2.$$

Dal teorema 1 segue che i tre punti distinti x_1, y_1, y_2 sono allineati. Ad analoga conclusione si giunge se $\ell_2 \equiv 0 \bmod \ell_1$. Il teorema è così provato.

Dai teoremi 8 e 9 discendono immediatamente i seguenti corollari.

Corollario 10. *Due segmenti di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ di uguale lunghezza sono complanari.*

Corollario 11. *Due segmenti di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ consecutivi e di uguale lunghezza giacciono su una stessa retta.*

Definiamo *triangolo* di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ un insieme T costituito da tre punti x, y, z non allineati. I punti x, y, z saranno detti *vertici* di T e i segmenti $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$ saranno detti *lati* di T. Dal corollario 11 segue che *i lati di uno stesso triangolo hanno lunghezze tutte diverse*. Per esprimere ciò diremo che ogni triangolo di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ è *scaleno*. Diremo che due triangoli T e T' di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ sono *prospettivi* se è possibile far corrispondere a ciascun vertice x di T un vertice x' di T', $x' \neq x$, in modo che le rette congiungenti coppie di vertici corrispondenti passino per uno stesso punto.

Dimostriamo ora il seguente

Teorema 12. *Siano s_1 ed s_2 due segmenti non nulli di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ di lunghezze rispettivamente ℓ_1 ed ℓ_2, $\ell_1 \geq \ell_2$, che giacciono su rette distinte ed incidenti in un punto O. Sia π il piano contenente s_1 ed s_2. Sia s_3 un segmento non nullo di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ di lunghezza ℓ_3 tale che:*

$$s_3 \not\subset \pi, \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \ell_3 \equiv 0 \bmod \ell_1, \quad \ell_3 \equiv 0 \bmod \ell_2, \\ \quad \textit{oppure} \\ \ell_1 \equiv 0 \bmod \ell_3, \quad \ell_2 \equiv 0 \bmod \ell_3, \\ \quad \textit{oppure} \\ \ell_1 \equiv 0 \bmod \ell_3, \quad \ell_3 \equiv 0 \bmod \ell_2. \end{cases} \tag{3.2}$$

Allora la retta contenente s_3 passa per O.

Dimostrazione. Supponiamo che s_3 soddisfi la (3.1) e la prima delle (3.2); sia inoltre r_3 la retta contenente s_3. Per il teorema 8 i segmenti s_1 ed s_3 giacciono su uno stesso piano, che indichiamo con π_{13}. Sempre per il teorema 8 i segmenti s_2 ed s_3 giacciono su uno stesso piano, che indichiamo con π_{23}. I piani π_{13} e π_{23} sono distinti. Infatti, se fosse $\pi_{13} = \pi_{23}$, il piano π_{13} conterrebbe i quattro punti (a tre a tre non allineati) x_1, y_1, x_2, y_2 e quindi coinciderebbe con π. Da ciò seguirebbe $s_3 \subset \pi$, in contrasto con l'ipotesi (3.1). Dal fatto che π_{13} e π_{23} sono distinti e contengono ciascuno il segmento s_3, segue $\pi_{13} \cap \pi_{23} = r_3$. Il punto O appartiene a π_{13}, in quanto O appartiene alla retta contenente s_1, retta a sua volta contenuta in π_{13}. In modo analogo si prova che $O \in \pi_{23}$. Ne segue che $O \in \pi_{13} \cap \pi_{23} = r_3$. Alla stessa conclusione si perviene se s_3 soddisfa la seconda, oppure la terza delle (3.2). Il teorema è così provato.

Corollario 13. *Siano s_1 ed s_2 due segmenti non nulli di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ aventi la stessa lunghezza e giacenti su rette distinte incidenti in un punto O. Sia inoltre π il piano per tali rette. Allora, se s_3 è un segmento di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ non contenuto in π avente la stessa lunghezza di s_1 ed s_2, la retta che contiene s_3 passa per O.*

Sia dato un insieme non vuoto $I = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$. Chiamiamo *angolo solido di vertice* x_j la coppia $\Omega = \{x_j, I - \{x_j\}\}$. Il numero razionale

$$A(\Omega) = \frac{X_j}{\sum_{j=1}^{n} X_j}$$

sarà chiamato *ampiezza* di Ω.

Teorema 14. *La somma delle ampiezze di tutti gli angoli solidi di un qualsiasi insieme di* $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ *è uguale ad 1.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di angolo solido.

Dato un insieme $I = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $n \geq 2$, chiameremo *lato* di I un qualsiasi segmento $\{x_i, x_j\}$ con $i \neq j$.

Diremo che due angoli solidi sono *uguali* se essi hanno la stessa ampiezza. Da questa definizione segue che due angoli solidi distinti di uno stesso insieme hanno ampiezze diverse. Diremo che due lati sono *uguali* se essi hanno la stessa lunghezza.

Teorema 15. *Se due insiemi* $I = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *ed* $I' = \{x'_1, \ldots, x'_n\}$ *di* $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ *hanno angoli solidi e lati ordinatamente uguali, si ha* $I = I'$.

Dimostrazione. Dall'ipotesi segue che

$$\frac{X_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} X_j} = \frac{X'_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} X'_j}, \qquad \forall j = 1, \ldots, n, \tag{3.3}$$

$$|X_j - X_i| = |X'_j - X'_i|, \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n, \quad i \neq j. \tag{3.4}$$

Dalla (3.3) segue, per due indici distinti i, j:

$$\frac{X_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} X_j} = \frac{X'_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} X'_j} \qquad \text{e} \qquad \frac{X_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} X_j} = \frac{X'_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} X'_j}. \tag{3.5}$$

Dalle (3.5) segue

$$\frac{X_j - X_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} X_j} = \frac{X'_j - X'_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} X'_j}, \tag{3.6}$$

da cui

$$\frac{|X_j - X_i|}{\sum_{j=1}^{n} X_j} = \frac{|X'_j - X'_i|}{\sum_{j=1}^{n} X'_j}. \tag{3.7}$$

Dalle (3.4) e (3.7) segue

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n} X'_j. \tag{3.8}$$

Dalle (3.3) e (3.8) segue

$$X_j = X'_j\,, \qquad \forall\, j = 1, \ldots, n,$$

cioè

$$x_j = x'_j\,, \qquad \forall\, j = 1, \ldots, n.$$

Il teorema è così provato.

Diremo *piramide* di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ una coppia P costituita da un punto V ed un insieme di punti $\mathcal{B}$ soddisfacenti le seguenti condizioni:

$\mathcal{B}$ contiene tre punti non allineati ed è contenuto in un piano π,
$V \notin \pi$.

Il punto V sarà detto *vertice* di P e l'insieme $\mathcal{B}$ sarà chiamato *base* di P. I lati $\{V, x_j\}$, con $x_j \in \mathcal{B}$, saranno chiamati *spigoli* di P. Una piramide di base $\mathcal{B}$ e vertice V sarà indicata con il simbolo $(V, \mathcal{B})$.

Teorema 16. *Siano $P = (V, \mathcal{B})$ e $P' = (V', \mathcal{B}')$ due piramidi di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$, con $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathcal{B}' = \{x'_1, \ldots, x'_n\}$. Per ogni $j = 1, \ldots, n$, siano rispettivamente ℓ_j ed ℓ'_j le lunghezze degli spigoli $\{x_j, V\}$ ed $\{x'_j, V'\}$. Siano inoltre soddisfatte le seguenti condizioni:*

$\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono contenute in uno stesso piano π e risulta $x'_j \neq x_j$ per ogni $j = 1, \ldots, n$,
$V \neq V'$,
la retta passante per V e V' incide π in un punto O,

(3.9) *per ogni $j = 1, \ldots, n$ si ha $\ell_j \equiv 0 \bmod \ell'_j$, oppure $\ell'_j \equiv 0 \bmod \ell_j$.*

Allora, per ogni $j = 1, \ldots, n$, la retta congiungente x_j ed x'_j passa per O.

Dimostrazione. Fissiamo j, $1 \leq j \leq n$. Dalla (3.9) e dal teorema 8 segue che gli spigoli $\{x_j, V\}$ ed $\{x'_j, V'\}$ appartengono ad uno stesso piano α. Tale piano α è l'unico piano contenente gli spigoli suddetti, in quanto i punti x_j, x'_j e V sono distinti e non allineati. Il piano α contiene la retta per V e V' e quindi contiene O. Ne segue che $O \in \alpha \cap \pi$. L'insieme $\alpha \cap \pi$ contiene i punti distinti x_j ed x'_j e dunque la retta r per essi. L'insieme $\alpha \cap \pi$ non può contenere un punto non di r, in quanto $\alpha \neq \pi$ ($\alpha \neq \pi$ in quanto $V \in \alpha$, $V \notin \pi$). Ne segue che $\alpha \cap \pi = r$ e dunque che $O \in r$. Il teorema è così provato.

Chiamiamo *tetraedro* di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ una piramide di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ a base triangolare. Evidentemente, i vertici di un tetraedro sono quattro punti a tre a tre non allineati.

Definiamo *primo* di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ un piano di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ avente intersezione non vuota con ciascuna retta di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$.

Corollario 17. (Teorema dei tetraedri). *Siano $P = (V, T)$ e $P' = (V', T')$ due tetraedri di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ con $T = \{x_1, x_2, x_3\}$ e $T' = \{x'_1, x'_2, x'_3\}$. Per ogni $j = 1, 2, 3$ siano rispettivamente ℓ_j ed ℓ'_j le lunghezze degli spigoli $\{x_j, V\}$ e $\{x'_j, V'\}$. Siano inoltre soddisfatte le seguenti condizioni:*

T e T' sono contenuti in uno stesso primo e risulta $x_j \neq x'_j$ per ogni $j = 1, 2, 3$,

$V \neq V'$,

$\ell_j = \ell'_j$ per ogni $j = 1, 2, 3$.

Allora le rette $x_j x'_j$ passano tutte per uno stesso punto e dunque i triangoli T e T' sono prospettivi. Inoltre il triangolo $\{V, x_i, x_j\}$ è prospettivo con il triangolo $\{V', x'_i, x'_j\}$ per ogni $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$.

Corollario 18. (Teorema dei triangoli prospettivi). *Siano $T = \{x_1, x_2, x_3\}$ e $T' = \{x'_1, x'_2, x'_3\}$ due triangoli di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ con $x_j \neq x'_j$ per ogni $j = 1, 2, 3$. Allora, se sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

T e T' sono contenuti in uno stesso primo π,

esistono due punti distinti V e V', $V \notin \pi$ e $V' \notin \pi$, tali che $\{x_j, V\}$ ed $\{x'_j, V'\}$ abbiano la stessa lunghezza per ogni $j = 1, 2, 3$,

allora i triangoli T e T' sono prospettivi.

Definiamo *sfera* di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ di centro a e raggio r, l'insieme dei punti x di $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ tali che $d(x, a) = r$, cioè tali che $|X - A| = r$. Si deduce che $X = A \pm r$. Abbiamo così provato il

Teorema 19. *Ogni sfera di* $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ *ha al più due punti.*

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Rajola-M. Scafati Tallini, *Linear spaces and classical Euclidean Geometry,* Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 4 (1998), pp. 25–32.

Sandro Rajola
Via Acccademia dei Virtuosi, 39
00147 Roma (ITALY)
Maria Scafati Tallini
Dipartimento di Matematica,
Università di Roma "La Sapienza",
Piazzale A. Moro, 2
00185 Roma (ITALY).
e-mail: tallini@mat.uniroma1.it