LE MATEMATICHE
Vol. LXIV (2009) – Fasc. I, pp. 47–56

RELAZIONE D'ORDINE IN UN CORPIDE

MARIA SCAFATI TALLINI - MAURIZIO IURLO

A corpid is a ring $(K,+,\cdot)$, different from zero, such that $(K,\cdot)$ is an inverse semigroup. We define an order relation and the notion of simple element. By this we prove several results and a characterization of corpids.

Sommario

Definito un corpide K come un anello, non ridotto al solo 0, $(K,+,\cdot)$, tale che $(K,\cdot)$ risulti essere un semigruppo inverso (o gruppide, secondo la denoninazione di G. Tallini in [3]), si introduce ivi una relazione d'ordine e il concetto di elemento semplice, basato sulla relazione d'ordine introdotta. Si trovano vari risultati sui corpidi e caratterizzazioni dei corpidi stessi.

1. Richiami sui semigruppi inversi

Si richiamano la definizione e alcune propriet dei semigruppi inversi (cfr [2] e [3]).
Si definisce *semigruppo inverso* un gruppoide $(\mathscr{G},\cdot)$ soddisfacente alle seguenti

Entrato in redazione: 25 novembre 2008

AMS 2000 Subject Classification: 16E50.
Keywords: ring, inverse semigroup.

proprietà:

$$\begin{aligned}
\forall a,b,c &\in \mathscr{G}, \quad (ab)\,c = a\,(bc) \quad \text{(proprietà associativa);} && (1)\\
e_1,e_2 &\in \mathscr{G} : e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2 \Longrightarrow e_1e_2 = e_2e_1; && (2)\\
\forall a &\in \mathscr{G} \quad \exists a^{-1} \in \mathscr{G} : aa^{-1}a = a,\ a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}. && (3)
\end{aligned}$$

L'elemento a^{-1} si dice *inverside* (o *inverso generalizzato* o, semplicemente, *inverso*) di a.
Un elemento u di $\mathscr{G}$ tale che $u^2 = u$ si dice *idempotente.* L'insieme degli elementi idempotenti u sarà indicato con $\mathscr{U}$.

Teorema 1.1. *Per ogni a di $\mathscr{G}$, aa^{-1} e $a^{-1}a$ risultano idempotenti. L'inverside di a è unico. Si ha poi*

$$a^3 = a \Longleftrightarrow a = a^{-1},$$

e, quindi, per ogni $u \in \mathscr{U}$, si ha

$$u = u^{-1}.$$

Teorema 1.2. *Per ogni a di $\mathscr{G}$ risulta $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$. Per ogni $a,b \in \mathscr{G}$ risulta $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.*

Teorema 1.3. *In un semigruppo inverso G si ha, per $a,b \in G$:*

$$ab^{-1}a = a \Longrightarrow ab^{-1},\ b^{-1}a \in \mathscr{U};\ ab^{-1} = ba^{-1};\ b^{-1}a = a^{-1}b, \tag{4}$$

$$ab^{-1}a = a \Longleftrightarrow aa^{-1}b = a \Longleftrightarrow ba^{-1}a = a. \tag{5}$$

Dimostrazione. Risulta:

$$ab^{-1}a = a \Longrightarrow \left(ab^{-1}\right)\left(ab^{-1}\right) = ab^{-1},$$

onde ab^{-1} è un idempotente e quindi $\left(ab^{-1}\right) = \left(ab^{-1}\right)^{-1} = ba^{-1}$. In modo analogo si prova che, se $ab^{-1}a = a$, risulta $b^{-1}a$ un idempotente e quindi $b^{-1}a = a^{-1}b$. Ne segue la (4).
Dalla (4) si ha:

$$ab^{-1}a = a \Longrightarrow aa^{-1}b = a,\ ba^{-1}a = a. \tag{6}$$

Inoltre, si ha:

$$\begin{aligned}
aa^{-1}b = a \quad &\Longrightarrow \quad b^{-1}aa^{-1}b = b^{-1}a \Longrightarrow \left(b^{-1}a\right)\left(b^{-1}a\right)^{-1} = b^{-1}a\\
&\Longrightarrow \quad \left(b^{-1}a\right) = \left(b^{-1}a\right)\left(b^{-1}a\right)^{-1}\left(b^{-1}a\right) = \left(b^{-1}a\right)^2\\
&\Longrightarrow \quad b^{-1}a \in \mathscr{U} \Longrightarrow b^{-1}a = a^{-1}b,
\end{aligned}$$

da cui:

$$aa^{-1}b = a \Longrightarrow ab^{-1}a = a. \tag{7}$$

In modo analogo si prova che:

$$ba^{-1}a = a \Longrightarrow ab^{-1}a = a. \tag{8}$$

Le (6), (7) e (8) equivalgono alla (5). $\square$

2. Relazione d'ordine in un corpide

Sia K un corpide e $\mathscr{U}$ l'insieme dei suoi idempotenti. Poniamo $\mathscr{U}' = \mathscr{U} - \{0\}$. In K è definita la relazione $\leq$

$$a \leq b \Longleftrightarrow ab^{-1}a = a, \tag{9}$$

la quale dimostreremo essere una relazione d'ordine.

Teorema 2.1. *Sia K un corpide. La relazione $\leq$ in K, definita da*

$$a \leq b \Longleftrightarrow ab^{-1}a = a,$$

è una relazione d'ordine.

Dimostrazione. Dimostriamo che la relazione data gode delle proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Proprietà riflessiva: per ogni $a \in K$ si ha

$$aa^{-1}a = a \Longleftrightarrow a \leq a,$$

Proprietà antisimmetrica: per ogni $a, b \in K$ si ha

$$\begin{aligned}[a \leq b,\ b \leq a] &\Longleftrightarrow \left[ab^{-1}a = a,\ ba^{-1}b = b\right] \\ &\Longleftrightarrow \left[ab^{-1}a = a,\ b^{-1}ab^{-1} = b^{-1}\right] \Longleftrightarrow a = b\end{aligned}$$

per l'unicità dell'inverso.

Proprietà transitiva: per ogni $a, b, c \in K$ si ha

$$\begin{aligned}[a \leq b,\ b \leq c] &\Longleftrightarrow \left[ab^{-1}a = a,\ bc^{-1}b = b\right] \\ &\overset{(5)}{\Longrightarrow} ac^{-1}a = \left(aa^{-1}b\right)c^{-1}\left(ba^{-1}a\right) = a\left(a^{-1}ba^{-1}\right)a \\ &= aa^{-1}a = a \Longleftrightarrow a \leq c.\end{aligned}$$

□

Osserviamo che se K è un corpo la relazione $\leq$ si riduce all'identità. In tal caso infatti si ha:

$$a \leq b \Longleftrightarrow ab^{-1}a = a \Longleftrightarrow a = b.$$

Si ha:

$$e, \eta \in \mathscr{U}, \qquad e \leq \eta \Longleftrightarrow e\eta = e \tag{10}$$

Infatti: [$\Longrightarrow$] Se $e \leq \eta$, si ha

$$e\eta^{-1}e = e \Longrightarrow ee\eta^{-1} = e \Longrightarrow e^2\eta = e \Longrightarrow e\eta = e.$$

[$\Longleftarrow$] Da $e\eta = e$ segue:

$$e^2\eta\eta^{-1}\eta = e \Longrightarrow e\eta\eta^{-1}e\eta = e \Longrightarrow e\eta^{-1}e = e \Longleftrightarrow e \leq \eta.$$

Si ha inoltre:

$$\forall a \in K, \qquad 0 \leq a \tag{11}$$

e, se K è unitario:

$$a \leq u \Longleftrightarrow a^2 = a \Longleftrightarrow a \in \mathscr{U}, \tag{12}$$

$$u \leq a \Longleftrightarrow a^{-1} = u \Longleftrightarrow a = u, \tag{13}$$

$$a \leq a^{-1} \Longleftrightarrow a = a^3 \tag{14}$$

(cfr [3]). Dalle (12) e (13) si ha che se è $a \in K - \mathscr{U}$, allora a non è in relazione con u.

3. Idempotenti semplici

Un elemento α non nullo di K si dirà *semplice* se:

$$x \in K, \quad x \leq \alpha \Longrightarrow [x = 0, \quad \text{ovvero} \quad x = \alpha]. \tag{15}$$

Teorema 3.1. *Se u è semplice, K è un corpo e viceversa.*

Dimostrazione. Sia u semplice. Se $x \in K$ è un idempotente, dalla (12) segue $x \leq u$. Ma allora $x = 0$, ovvero $x = u$. L'unico idempotente non nullo è quindi u, cio K è un corpo (vedi [2], Teorema 2.1). Viceversa, se K è un corpo, cioè se u è l'unico idempotente non nullo (vedi [2], Teorema 2.1), da $x \leq u$ si ha $x \in \mathscr{U}$ (vedi (12)), e quindi $x = u$. Quindi è verificata la condizione

$$x \leq u \Longrightarrow x = 0, \text{ ovvero } x = u.$$

□

Si ha:

$$\forall e \in \mathscr{U}, \forall a \in K, \quad ea \leq a, \quad ae \leq a. \tag{16}$$

Infatti:

$$ea = e^2aa^{-1}a = eeaa^{-1}a = eaa^{-1}ea \Longleftrightarrow ea \leq a.$$

Analogamente si dimostra $ae \leq a$.

Supponiamo $\alpha \in K$ semplice. Si ha:

$$\begin{aligned} &\forall e \in \mathscr{U}, \quad e\alpha \leq \alpha \Longrightarrow e\alpha = 0, \quad \text{ovvero} \quad e\alpha = \alpha, \\ &\forall e \in \mathscr{U}, \quad \alpha e \leq \alpha \Longrightarrow \alpha e = 0, \quad \text{ovvero} \quad \alpha e = \alpha. \end{aligned} \tag{17}$$

Inoltre:

$$ea = 0, ae = a \Longrightarrow a = 0, \quad e \in \mathscr{U}, \ a \in K, \tag{18}$$

$$e \in \mathscr{U}, \ a \in K, \quad ea = a, ae = 0 \Longrightarrow a = 0. \tag{19}$$

Infatti:

$$(ea = 0, \ ae = a) \Longrightarrow a(ea) = a^2 \Longrightarrow a^2 = 0 \Longrightarrow (e+a)^2 = e+a,$$

onde $e+a$ è un idempotente e quindi

$$(e+a)^{-1} = e+a;$$

$$[(e+a)e(e+a) = e+a, e(e+a) = e] \Longrightarrow (e+a)^{-1} = e \Longrightarrow a = 0.$$

Analogamente si ha la (19). Dalle (16), (17), (18) e (19) si ha (essendo α semplice):

$$\forall e \in \mathscr{U}, \quad e\alpha = \alpha e = 0, \quad \text{ovvero} \quad e\alpha = \alpha e = \alpha. \tag{20}$$

Sia $\{\theta_i\}_{i \in I} = \Theta$ l'insieme degli idempotenti semplici (e quindi non nulli) di K. Supponiamo Θ non vuoto, come accade per esempio se K è finito (vedi [2], Teorema 6.5). Da (20), si ha

$$\forall \theta \in \Theta, \forall e \in \mathscr{U}, \quad e\theta = \theta, \quad \text{ovvero} \quad e\theta = 0. \tag{21}$$

Proviamo che

Teorema 3.2. *Sia $t \in K - \{0\}$. Allora*

$$\forall e \in \mathscr{U}, \quad [et = t, \quad \textit{ovvero} \quad et = 0] \Longrightarrow t \textit{ semplice.} \tag{22}$$

Dimostrazione. Infatti, se $\forall e \in \mathscr{U}$ si ha $et = t$, ovvero $et = 0$, allora per ogni $x \in K$ tale che $x \leq t$ si ha:

$$x \leq t \Longrightarrow x = xtx \Longrightarrow x^{-1} = x^{-1}xx^{-1} = (x^{-1}x)t(xx^{-1}) \Longrightarrow x^{-1} = t$$

cioè $x = t$, ovvero $x = 0$. Ne segue che t è semplice. □

Da (21) e (22), si ha:

$$\theta \in \mathscr{U}', \quad \theta \text{ semplice } \iff [\forall e \in \mathscr{U}, \quad e\theta = \theta \quad \text{ovvero} \quad e\theta = 0.] \tag{23}$$

Proviamo che:

Teorema 3.3. *Sia $\theta \in \mathscr{U}'$. Allora*

$$\theta \textit{ semplice} \iff [\forall e \in \mathscr{U}, \ e\theta \leq \theta \Longrightarrow e = \theta, \quad \textit{ovvero} \quad e = 0]. \tag{24}$$

Dimostrazione. $[\Longrightarrow]$ Segue da (15).
$[\Longleftarrow]$ Si ha

$$\forall e \in \mathscr{U}, \quad e\theta \leq \theta \overset{(24)}{\Longrightarrow} [e = \theta, \quad \text{ovvero} \quad e\theta = 0] \overset{(23)}{\Longrightarrow} \theta \text{ semplice.}$$

□

Dalla (24) si ha che

Teorema 3.4. *Se K ha un numero finito di idempotenti allora $\Theta \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Se K ha un numero finito di idempotenti allora K è unitario (cfr [2], Teorema 6.4). Allora $u \in \Theta$, $\Theta \neq \emptyset$. Infatti se $x \leq u$ allora $x = u$ oppure $x = 0$. Infatti

$$\begin{aligned} xu^{-1}x = x \quad &\Longrightarrow \quad u^{-1} = x^{-1}, \text{ ovvero } x = 0 \\ &\Longrightarrow \quad u = x, \text{ ovvero } x = 0. \end{aligned}$$

Dalla (24) segue quindi che u è semplice. □

Teorema 3.5. *Si ha*

$$\alpha \textit{ semplice} \iff \alpha^{-1} \textit{ semplice.} \tag{25}$$

Dimostrazione. Sia α semplice:

$$\begin{aligned} x \leq \alpha^{-1} \quad &\Longrightarrow \quad x^{-1} \leq \alpha \Longrightarrow \left[x^{-1} = 0, \quad \text{ovvero} \quad x^{-1} = \alpha\right] \\ &\Longrightarrow \quad \left[x = 0, \quad \text{ovvero} \quad x = \alpha^{-1}\right] \end{aligned}$$

e quindi α^{-1} è semplice. □

Proviamo che:

Teorema 3.6. *Sia $\alpha \in K'$. Si ha:*

$$\alpha \textit{ semplice} \iff [\forall e \in \mathscr{U}, \ e\alpha = \alpha e = \alpha, \quad \textit{ovvero} \quad e\alpha = \alpha e = 0]. \tag{26}$$

Dimostrazione. $[\Longrightarrow]$ La condizione necessaria equivale alla (20).

$[\Longleftarrow]$ Proviamo la condizione sufficiente. Si ha, dalla (26):

$$\begin{aligned} x \leq \alpha &\Longrightarrow x^{-1}x \leq x^{-1}\alpha \Longrightarrow x^{-1}x\alpha^{-1}xx^{-1}x = x^{-1}x\alpha^{-1}x \\ &\Longrightarrow \left[x^{-1}x = \alpha^{-1}x, \quad \text{ovvero} \quad x^{-1}x = 0\right] \\ &\Longrightarrow \left[x^{-1}xx^{-1} = \alpha^{-1}xx^{-1}, \quad \text{ovvero} \quad x = 0\right] \\ &\Longrightarrow \left[x^{-1} = \alpha^{-1}, \quad \text{ovvero} \quad x = 0\right] \\ &\Longrightarrow [x = \alpha, \quad \text{ovvero} \quad x = 0]. \end{aligned}$$

Si ha cosí la condizione sufficiente $[\Longleftarrow]$. Il teorema cosí completamente dimostrato. □

Si ha:

$$\theta_i\theta_j \in \Theta,\ \theta_i \neq \theta_j \Longrightarrow \theta_i\theta_j = 0. \tag{27}$$

Infatti, posto nella (23) una prima volta $e = \theta_i$, $\theta = \theta_j$ e una seconda volta $e = \theta_j$, $\theta = \theta_i$, si ottiene $\theta_i = \theta_i\theta_j = \theta_j$, ovvero $\theta_i\theta_j = 0$, ma la prima uguaglianza è assurda essendo $\theta_i \neq \theta_j$, onde si ha $\theta_i\theta_j = 0$.

Sia A l'insieme degli elementi semplici di K e $A_0 = A \cup \{0\}$. Poniamo inoltre $\Theta_0 = \Theta \cup \{0\}$. Si ha

$$\alpha \in A_0 \Longleftrightarrow \forall e \in \mathscr{U} \quad e\alpha = \alpha e = \alpha, \text{ ovvero } e\alpha = \alpha e = 0. \tag{28}$$

Dalla (28), da $e\alpha = \alpha e = \alpha$, ovvero $e\alpha = \alpha e = 0$, si ha $e\alpha\beta = \alpha e\beta = \alpha\beta$, ovvero $e\alpha\beta = \alpha e\beta = 0$. Ma ricordando che $\beta \in A_0$ e quindi $e\beta = \beta e$, si ottiene

$$\alpha, \beta \in A_0 \Longrightarrow \forall e \in \mathscr{U},\ e\alpha\beta = \alpha\beta e = \alpha\beta, \text{ ovvero } e\alpha\beta = \alpha\beta e = 0, \tag{29}$$

cioè

$$\alpha\beta \in \Theta_0.$$

Da (29) e (25) segue che $(A_0, \cdot)$ è un sottogruppide di $(K, \cdot)$.

Dimostriamo ora che

Teorema 3.7. *Ogni corpide è privo di elementi nilpotenti.*

Dimostrazione. Sia K un corpide qualsiasi. Proviamo dapprima che

$$\alpha \in K,\ \alpha^2 = 0 \Longrightarrow \alpha = 0. \tag{30}$$

Si ha

$$\begin{aligned} \alpha^2 = 0 &\Longrightarrow \left[\alpha = \alpha\alpha^{-1}\alpha = \alpha e,\ e = \alpha^{-1}\alpha \in \mathscr{U}\right] \\ &\Longrightarrow \left[\alpha = \alpha e,\ e\alpha = \alpha^{-1}\alpha^2 = 0\right] \\ &\Longrightarrow [\alpha = \alpha e,\ e\alpha = 0,\ e \in \mathscr{U}] \\ &\overset{(18)}{\Longrightarrow} \alpha = 0, \end{aligned}$$

onde la (30). Proviamo, piú in generale, che

$$\alpha \in K,\ \alpha^n = 0 \Longrightarrow \alpha = 0. \tag{31}$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
\alpha^n &= 0 \Longrightarrow e = \alpha^{-1}\alpha,\ \alpha = \alpha\alpha^{-1}\alpha = \alpha e \Longrightarrow \\
e &\in \mathscr{U},\ \alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}e,\ e\alpha^{n-1} = \alpha^{-1}\alpha^n = 0 \Longrightarrow \\
e &\in \mathscr{U},\ \alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}e,\ e\alpha^{n-1} = 0 \overset{18}{\Longrightarrow} \alpha^{n-1} = 0,
\end{aligned}$$

da cui si ha $\alpha^2 = 0$ e, per la (30), si ha la (31). □

4. Corpidi e loro caratterizzazione

Sia K un corpide e sia Θ l'insieme dei suoi idempotenti semplici. Facciamo le seguenti ipotesi:

$$\Theta \neq \emptyset, \tag{32}$$

$$\forall a \in K,\ \forall \theta \in \Theta, \quad a\theta = \theta a, \tag{33}$$

$$\forall e \in \mathscr{U} - \{0\}, \quad \exists \theta \in \Theta : \theta \leq e. \tag{34}$$

Esempi di corpidi soddisfacenti alle (32), (33) e (34), si ottengono nel modo seguente. Sia $\{K_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ una famiglia di corpi, sia $K = \otimes_{i\in\mathscr{I}} K_i$ e $H = \oplus_{i\in\mathscr{I}} K_i$ ($\subseteq K$). Ogni sottocorpide $\overline{K}$ di K che contenga H soddisfa alle (32), (33) e (34). Si noti che, se $\mathscr{I}$ è infinito, esistono dei sottocorpidi $\overline{K}$ tali che $\overline{K} \neq K$, $\overline{K} \neq H$, intermedi tra K e H. Supponiamo, per esempio, $\mathscr{I}$ infinito e $\gamma = K_i$, per ogni $i \in \mathscr{I}$ (γ corpo). Sia $\overline{K}$ il sottoinsieme di $K = \otimes_{i\in\mathscr{I}} K_i$ ciascun elemento $(a_i)_{i\in\mathscr{I}}$ del quale sia quasi ovunque costante, cioè sia costante in $\mathscr{I} - \mathscr{F}$, dove $\mathscr{F}$ è un sottoinsieme finito di $\mathscr{I}$ (variabile elemento per elemento). Evidentemente $\overline{K}$ è un sottocorpide di K, con $H \subseteq \overline{K} \subseteq K$, $\overline{K} \neq K$, $\overline{K} \neq H$.

Teorema 4.1. *Ogni corpide K soddisfacente alle (32), (33) e (34) è isomorfo a un sottocorpide $\overline{K}$ di un prodotto diretto di corpi $\{K_i\}_{i\in\mathscr{I}}$, tale che $\overline{K} \supset \oplus_{i\in\mathscr{I}} K_i$.*

Dimostrazione. Sia K un corpide soddisfacente alle (32), (33) e (34). Per ogni $i \in \mathscr{I}$ sia $K_i = \{a\theta_i,\ a \in K,\ \theta_i \in \Theta\}$. L'insieme K_i è un corpo (sottocorpo di K) in virtú della (33), il quale ha come unità θ_i ($= \theta_i\theta_i$) e per inverso di $a\theta_i$ ($\neq 0$) l'elemento $a^{-1}\theta_i$. Infatti $\left(a^{-1}\theta_i\right)(a\theta_i) = a^{-1}a\theta_i = \theta_i$, ovvero $a^{-1}a\theta_i = 0$, ma tale eventualità è esclusa in quanto $a^{-1}a\theta_i = 0$ implica $a\theta_i = 0$, mentre $a\theta_i \neq 0$. Analogamente si prova $(a\theta_i)\left(a^{-1}\theta_i\right) = a^{-1}a\theta_i = \theta_i$. Si consideri l'applicazione;

$$\varphi : a \in K \longmapsto \{a\theta_i\}_{i\in\mathscr{I}} \in \otimes_{i\in\mathscr{I}} K_i.$$

Si ha (sempre per la (33)), per $a, b \in K$:

$$\varphi(a) = \{a\theta_i\}_{i\in\mathscr{I}}, \quad \varphi(b) = \{b\theta_i\}_{i\in\mathscr{I}},$$
$$\varphi(a) + \varphi(b) = \{(a+b)\theta_i\}_{i\in\mathscr{I}} = \varphi(a+b),$$
$$\varphi(a)\varphi(b) = \{ab\theta_i\}_{i\in\mathscr{I}} = \varphi(ab).$$

Dunque l'applicazione φ è un omomorfismo del corpide K nel corpide $\otimes_{i\in\mathscr{I}} K_i$. Si ha:

$$a \in \ker\varphi \iff \varphi(a) = 0 \iff a\theta_i = 0, \, \forall i \in \mathscr{I}.$$

Posto $e = a^{-1}a \in \mathscr{U}$, se è $e \neq 0$, per la (34), esiste un $\theta_{\bar{i}} \in \Theta$ tale che $\theta_{\bar{i}} = e\theta_{\bar{i}}$, cioè tale che $\theta_{\bar{i}} = a^{-1}a\theta_{\bar{i}}$. Dunque, se $a \in \ker\varphi$, cioè se $a\theta_i = 0$ per ogni $i \in \mathscr{I}$ e se $a \neq 0$, cioè se $e \neq 0$, sarà $\theta_{\bar{i}} = a^{-1}(a\theta_i) = 0$ il che è assurdo. Ne segue che $\ker\varphi = \{0\}$, onde φ è iniettiva e quindi K è isomorfo a $\varphi(K)$. Si ha (per la (27)), con $j \in I$, $\varphi(K_j) = \left\{a\theta_j\theta_i\right\}_{i\in\mathscr{I}} = \left\{a\theta_j, \, 0_i\right\}_{i\in\mathscr{I}-\{j\}} \subseteq \varphi(K)$. Ne segue che $\varphi(K)$ contiene $\otimes_{i\in\mathscr{I}} K_i$. $\square$

Si ha cosí il teorema seguente:

Teorema 4.2. *Un corpide K, soddisfacente alle (32), (33) e (34) è isomorfo a un sottocorpide $\overline{K}$ prodotto diretto di una famiglia di corpi $\{K_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ tale che $\overline{K} \supseteq \otimes_{i\in\mathscr{I}} K_i$.*

Come corollari si hanno i seguenti:

Teorema 4.3. *Un corpide K con Θ finito e non vuoto, soddisfacente alle (33) e (34) è isomorfo alla somma diretta di un numero finito di corpi.*

Teorema 4.4. *Un corpide K con $\mathscr{U}$ finito e quindi Θ finito, soddisfacente alla (33), è somma diretta di un numero finito di corpi. In particolare, se K è commutativo ed $\mathscr{U}$ è finito, K è isomorfo a una somma diretta di campi, dunque ogni corpide finito commutativo è somma diretta di campi di Galois in numero finito.*

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Scafati Tallini - M. Iurlo, *Su una classe notevole di anelli*, Quaderni del Seminario di Geometria Combinatoria "Giuseppe Tallini" n. 156, Dipartimento di Matematica "Guido Castelnuovo", Università degli Studi di Roma "La Sapienza", Novembre 2007.

[2] M. Scafati Tallini - M. Iurlo, *Studio di una classe notevole di anelli dotata di inverso generalizzato*, Le Matematiche 63 (2) (2008), 39–56.

[3] G. Tallini, *Sulla struttura algebrica delle trasformazioni tra parti di un insieme*, Ann. Mat. (**4**) **71** (1966), 295–322.

MARIA SCAFATI TALLINI
Università La Sapienza
P.le A. Moro 5
00185 Roma, Italy
e-mail: `tallini@mat.uniroma1.it`

MAURIZIO IURLO
Istituto Superiore Luisa di Savoia
Via Luisa di Savoia 14
00100 Roma, Italy
e-mail: `maurizio.iurlo@istruzione.it`