LE MATEMATICHE
Vol. LXIV (2009) – Fasc. I, pp. 179–193

STRUCTURE D'ALGÈBRE DE BANACH SUR L'ESPACE À POIDS $L^p_\omega(G)$

A. EL KINANI - A. ROUKBI - A. BENAZZOUZ

Let G be a locally compact group and ω be a weight on G. For $p \in]1,+\infty[$, we give a necessary and sufficient condition, on ω, for $L^p_\omega(G)$ to be a Banach algebra. The case where ω is biinvariant under a subgroup K of G is also considered.

1. Préliminaires et introduction.

Soient G un groupe topologique localement compact et dx une mesure de Haar à gauche sur G. Soit ω un poids sur G c'est à dire une fonction positive, mesurable et localement intégrable sur G. Pour $1 < p < +\infty$, on définit l'espace fonctionnel suivant :

$$L^p_\omega(G) = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} : \text{mesurable et } |f|^p\,\omega \in L^1(G)\}.$$

C'est un espace de Banach pour la norme $||.||_{p,\omega}$ donnée par

$$||f||_{p,\omega} = \left(\int_G |f(x)|^p\,\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour tout } f \in L^p_\omega(G).$$

Entrato in redazione: 20 giugno 2009

AMS 2000 Subject Classification: Primary: 05C38. Secondary: 05A15.
Keywords: L'espace à poids, produit de convolution, transformation de Fourier, fonction K-sphérique.

Le dual topologique de $\left(L^p_\omega(G), ||.||_{p,\omega}\right)$ s'identifie à l'espace $\left(L^q_w(G), ||.||_{q,w}\right)$, où $w = \omega^{-\frac{q}{p}}$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $1 < p < +\infty$. Les espaces $L^p_\omega(G)$ ne sont pas des algèbres pour les produits ordinaire et de convolution. Pour $p \in [1,2[$, Kunze et Stein ([7]) ont prouvé que si $G = SL(2,\mathbb{C})$, alors $L^2(G)$ est un module de Banach à droite sur $L^p(G)$ i.e.,

$$||f * g||_2 \leq c_p \, ||g||_p \, ||f||_2 \text{, pour tous } f \in L^2(G),\, g \in L^p(G),$$

où c_p est une constante indépendante de f et g. Dans [6], C. S. Herz a montré que si G est un groupe de Lie connexe, semi-simple et de centre fini, alors il existe une fonction poids ω, sur G, continue et à croissance logarithmique telle que l'espace $L^2_\omega(G)$ soit un module de Banach à droite sur $L^p(G)$. Si G est un groupe abelien localement compact et dénombrable à l'infini, A. Benazzouz ([1]) a montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'espace à poids $(L^p_\omega(G), ||.||_{p,\omega})$, $1 < p < +\infty$, soit une algèbre de Banach, pour le produit de convolution, est que la fonction $\omega^{\frac{1}{1-p}}$ soit intégrable sur G et que $\omega^{\frac{1}{1-p}} * \omega^{\frac{1}{1-p}} \leq \omega^{\frac{1}{1-p}}$. Une extension de ce résultat pour une famille de poids a été donnée dans [3].

Dans ce papier, nous considérons un groupe localement compact quelconque G et un poids ω sur G. Nous donnons (Proposition 2.1 et Théorème 2.6) des conditions nécessaires et suffisantes, sur ω, pour que l'espace $L^p_\omega(G)$ soit une algèbre de Banach. Nous considérons ensuite un sous groupe compact K de G tel que le poids ω soit biinvariante par K. Nous montrons (Proposition 3.1) que (G,K) est une paire de Gelfand si et seulement si l'espace $L^p_{bi(K),\omega}(G)$ des fonctions de $L^p_\omega(G)$ qui sont biinvariantes par K est une algèbre de Banach commutative. Puis, nous déterminons (Théorème 3.4) le spectre de Gelfand de l'algèbre $L^p_{bi(K),\omega}(G)$. Par ailleurs, nous étudions la transformation de Fourier dans l'algèbre $L^p_{bi(K),\omega}(G)$. Enfin, nous traitons le groupe des déplacements $SO(n) \times \mathbb{R}^n$, où n est un entier supérieur à 2.

2. Structure d'algèbre de Banach sur l'espace à poids $L^p_\omega(G)$.

Une condition suffisante, sur ω, pour que l'espace $(L^p_\omega(G), ||.||_{p,\omega})$ soit une algèbre de Banach est donnée par le résultat suivant :

Proposition 2.1. . *Soient $p \in]1,+\infty[$ et ω un poids sur G. Si*

$$\omega^{\frac{1}{1-p}} * \omega^{\frac{1}{1-p}} \leq \omega^{\frac{1}{1-p}} \tag{1}$$

alors l'espace $(L^p_\omega(G), ||.||_{p,\omega})$ est une algèbre de Banach.

Démonstration. Il reste à montrer que si ω un poids vérifiant (1), alors

$$||f*g||_{p,\omega} \leq ||f||_{p,\omega}\,||g||_{p,\omega}, \text{ pour tous } f,g \in L^p_\omega(G).$$

En tenant compte du fait que l'espace $\mathscr{K}(G)$ des fonctions complexes continues à support compact dans G est dense dans $L^p_\omega(G)$, il suffit de montrer que

$$||f*g||_{p,\omega} \leq ||f||_{p,\omega}\,||g||_{p,\omega}, \text{ pour tous } f,g \in \mathscr{K}(G).$$

Soient $f,g \in \mathscr{K}(G)$ et $h = f*g$. En écrivant

$$h(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\left|\frac{\omega(y)\omega(y^{-1}x)}{\omega(y)\omega(y^{-1}x)}\right|^{\frac{1}{p}} dy$$

et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|h(x)| \leq \left(\int_G |f(y)|^p\,\omega(y)\left|g(y^{-1}x)\right|^p \omega(y^{-1}x)dy\right)^{\frac{1}{p}} W^{\frac{p-1}{p}}(x),$$

où $W = \omega^{\frac{1}{1-p}} * \omega^{\frac{1}{1-p}}$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}\left|\int_G |h(x)|^p W^{1-p}(x)dx\right| &\leq \left(\int_G |f(y)|^p\,\omega(y)dy\right)\left(\int_G \left|g(y^{-1}x)\right|^p \omega(y^{-1}x)dx\right)\\ &\leq ||f||^p_{p,\omega}\,||g||^p_{p,\omega}.\end{aligned}$$

Par l'inégalité (1), on a $\omega \leq W^{1-p}$ vu que $p>1$. Donc

$$||f*g||_{p,\omega} \leq \left|\int_G |h(x)|^p\,\omega(x)dx\right| \leq ||f||_{p,\omega}\,||g||_{p,\omega}.$$

□

Remarque 2.2. L'algèbre de Banach $\left(L^p_\omega(G), ||.||_{p,\omega}\right)$ n'est pas nécessairement commutative. En fait, on montre, comme pour $L^1(G)$, que $\left(L^p_\omega(G), ||.||_{p,\omega}\right)$ est commutative si, et seulement, si G est abelien.

Dans le reste de ce paragraphe, on se propose d'établir la réciproque de la Proposition 2.1. Tout d'abord, montrons les résultats suivants qui seront utiles pour la suite.

Soit $p \in]1,+\infty[$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Soit ω un poids sur G et posons :

$$W = (\omega^{\frac{1}{1-p}} * \omega^{\frac{1}{1-p}})^{1-p}.$$

On suppose que $\omega^{\frac{1}{1-p}} \in L^1(G)$ et que l'espace $\left(L^p_\omega(G), ||.||_{p,\omega}\right)$ soit une algèbre de Banach. Pour $F \in L^p(G\times G)$ et $f \in L^p_{W^{\frac{1}{1-p}}}(G)$, nous désignons par TF et Sf les fonctions définies sur G et $G\times G$ respectivement par

$$TF(x) = \int_G F(z^{-1}x, z)[\omega(z^{-1}x)\omega(z)]^{\frac{-1}{p}} dz$$

et

$$Sf(x,y) = f(xy)\omega^{\frac{-1}{p}}(x)\omega^{\frac{-1}{p}}(y).$$

Les fonctions TF et Sf sont mesurables et on a :

Proposition 2.3. *1) L'application $f \longmapsto Sf$ est une isométrie de $L^q_{W^{\frac{-q}{p}}}(G)$ dans $L^q(G\times G)$.*

2) L'opérateur T est une application continue surjective de $L^p(G\times G)$ sur $L^p_W(G)$.

Démonstration.

1) Soit $f \in L^q_{W^{\frac{-q}{p}}}(G)$. On a

$$\begin{aligned}
\iint_{G\times G} |Sf(x,y)|^q dxdy &= \iint_{G\times G} |f(xy)|^q \omega^{\frac{-q}{p}}(x)\omega^{\frac{-q}{p}}(y)dxdy \\
&= \int_G \omega^{\frac{-q}{p}}(x) \int_G |f(xy)|^q \omega^{\frac{-q}{p}}(y)dydx \\
&= \int_G \omega^{\frac{-q}{p}}(x) \int_G |f(y)|^q \omega^{\frac{-q}{p}}(x^{-1}y)dydx \\
&= \int_G |f(y)|^q \int_G \omega^{\frac{-q}{p}}(x^{-1}y)\omega^{\frac{-q}{p}}(x)dxdy \\
&= \int_G |f(y)|^q) W^{\frac{-q}{p}}(y)dy.
\end{aligned}$$

Donc

$$||Sf||_q = ||f||_{q,W^{\frac{-q}{p}}}.$$

2) Un calcul simple montre que T est l'application transposée de S ; et comme les espaces $L^p_W(G)$ et $L^p(G\times G)$ sont refléxifs, S est aussi l'application transposée de T. Par suite, T est une application continue surjective de $L^p(G\times G)$ sur $L^p_W(G)$. □

Proposition 2.4. *L'espace $L^p_W(G)$ est un module à droite sur $L^p_\omega(G)$.*

Démonstration. Nous allons montrer cette proposition en plusieurs étapes.

a) Si $f \in L^p_\omega(G)$ et $F \in L^p(G\times G)$, on définit une fonction H sur $G\times G$ en posant :

$$H(x,y) = \left(\int_G F(x,z)\omega^{\frac{-1}{p}}(z)f(z^{-1}y)dz\right)\omega^{\frac{1}{p}}(y).$$

Alors $H \in L^p(G\times G)$ et que $||H||_p \leq ||F||_p\, ||f||_{p,\omega}$. En effet, on a :

$$\iint_{G\times G} |H(x,y)|^p\, dxdy = \iint_{G\times G} \left|\int_G F(x,z)\omega^{\frac{-1}{p}}(z)f(z^{-1}y)dz\right|^p \omega(y)dydx.$$

Comme la fonction $z \longmapsto F(x,z)\omega^{\frac{-1}{p}}(z)$ est dans $L^p_\omega(G)$ et que $L^p_\omega(G)$ est une algèbre de Banach, on obtient :

$$\begin{aligned}
\iint_{G\times G} |H(x,y)|^p\, dxdy &= \iint_{G\times G} \left|\int_G F(x,z)\omega^{\frac{-1}{p}}(z)f(z^{-1}y)dz\right|^p \omega(y)dydx \\
&\leq \int_G \left|\int_G F(x,z)dz\right|^p ||f||^p_{p,\omega}\, dx \\
&\leq ||F||^p_p\, ||f||^p_{p,\omega}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que H est dans $L^p(G\times G)$ et que

$$||H||_p \leq ||F||_p\, ||f||_{p,\omega}.$$

b) Si $f \in L^p_\omega(G)$ et $g \in L^p_{W^{\frac{-q}{p}}}(G)$, alors $g * \hat{f} \in L^q_{W^{\frac{-q}{p}}}(G)$ et

$$\left|\left|g*\hat{f}\right|\right|_{q,W^{\frac{-q}{p}}} \leq ||f||_{p,\omega}\, ||g||_{q,W^{\frac{-q}{p}}}.$$

En effet, pour tout $F \in L^p(G\times G)$, on a

$$\left|\iint_{G\times G} S(g*\hat{f})(x,y)F(x,y)dxdy\right| \leq \iint_{G\times G} \left|g*\hat{f}(xy)F(x,y)\right| \omega^{\frac{-1}{p}}(x)\omega^{\frac{-1}{p}}(y)dxdy.$$

En tenant compte du fait

$$g*\hat{f}(xy) = \int_G \left|g(t)\hat{f}(t^{-1}xy)\right|$$

et des expressions de S et T données par la Proposition 2.3, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\iint_{G\times G} S(g*\hat{f})(x,y)F(x,y)dxdy\right| &\leq \iint_{G\times G} |S(g)(x,t)H(x,t)|\, dxdt \\
&\leq \|S(g)\|_q\, \|f\|_{p,\omega}\, \|F\|_p \\
&\leq ||S(g)||_q\, ||f||_{p,\omega}\, ||F||_p \\
&\leq \|g\|_{q,W^{-\frac{q}{p}}}\, \|f\|_{p,\omega}\, \|F\|_p.
\end{aligned}$$

D'où

$$\left|\left|g*\hat{f}\right|\right|_{q,W^{\frac{-q}{p}}} \leq ||f||_{p,\omega}\, ||g||_{q,W^{\frac{-q}{p}}}.$$

c) Soit $f \in L^p_\omega(G)$ et $g \in L^p_W(G)$. Alors $g * f \in L^p_W(G)$ et

$$||g * f||_{p,W} \leq ||g||_{p,W} \, ||f||_{p,\omega} .$$

En effet, pour tout $h \in L^q_{W^{\frac{-q}{p}}}(G)$, on a

$$\begin{aligned}
\left| \int_G g * f(x) h(x) dx \right| &\leq \int_G \int_G |g(y)| \left| f(y^{-1}x) \right| |h(x)| \, dy dx \\
&\leq \int_G |g(y)| \int_G \left| \hat{f}(x^{-1}y) \right| |h(x)| \, dx dy \\
&\leq ||g||_{p,W} \left| \left| h * \hat{f} \right| \right|_{q,W^{\frac{-q}{p}}} \\
&\leq ||g||_{p,W} \, ||f||_{p,\omega} \, ||h||_{q,W^{\frac{-q}{p}}} .
\end{aligned}$$

Donc $g * f \in L^p_W(G)$ et $||g * f||_{p,W} \leq ||g||_{p,W} \, ||f||_{p,\omega}$. Ainsi l'espace $L^p_W(G)$ est un module à droite sur $L^p_\omega(G)$. □

D'aprés 2) de la Proposition 2.3, chaque $g \in L^p_\omega(G)$ définit, par convolution à gauche, un opérateur borné $\mathscr{R}_g$ de $L^p_\omega(G)$ dans $L^p_W(G)$ par

$$\mathscr{R}_g(f) = g * f, \text{ pour tout } f \in L^p_\omega(G).$$

Soit $\mathscr{R}$ l'application définie, sur $L^p_\omega(G)$, par $\mathscr{R}(g) = \mathscr{R}_g$. On a alors le résultat suivant :

Proposition 2.5. *L'application $\mathscr{R}$ est un homomorphisme injectif de $L^p_\omega(G)$ dans l'espace de Banach $\mathscr{L}(L^p_\omega(G), L^p_W(G))$ des opérateurs bornés de $L^p_\omega(G)$ dans $L^p_W(G)$.*

Démonstration. Comme $\omega^{\frac{1}{1-p}}$ et $W^{\frac{1}{1-p}}$ sont dans $L^1(G)$, les espaces $L^p_\omega(G)$ et $L^p_W(G)$ sont contenus dans $L^1(G)$. Par ailleurs, l'application $\mathscr{R}$ est injective. De plus

$$\begin{aligned}
||\mathscr{R}(g)|| &= \sup\{||f * g||_{p,W} : ||f||_{p,\omega} \leq 1\} \\
&\leq ||g||_{p,\omega} .
\end{aligned}$$

D'où la continuité de $\mathscr{R}$. De plus, $\mathscr{R}$ est une application linéaire injective de $L^p_\omega(G)$ dans $\mathscr{L}\left(L^p_\omega(G), L^p_W(G)\right)$. Ainsi $\mathscr{R}$ est une application linéaire bijective continue de $L^p_\omega(G)$ sur $\mathscr{R}\left(L^p_\omega(G)\right)$. Pour finir, on montre comme dans [3] que $\mathscr{R}\left(L^p_\omega(G)\right)$ est fermé dans l'espace $\mathscr{L}\left(L^p_\omega(G), L^p_W(G)\right)$; et on conclut par le théorème de Banach. □

La réciproque de la Proposition 2.1 est vraie comme le montre le résultat suivant :

Théorème 2.6. *Soient $p \in]1,+\infty[$ et ω un poids sur G tel que $\omega^{\frac{1}{1-p}} \in L^1(G)$. Si l'espace $(L^p_\omega(G), ||.||_{p,\omega})$ est une algèbre de Banach, alors, il existe une constante $c > 0$ telle que :*

$$\omega^{\frac{1}{1-p}} * \omega^{\frac{1}{1-p}} \leq c\omega^{\frac{1}{1-p}}. \tag{2}$$

Démonstration. Comme $L^p_\omega(G)$ est une algèbre, on a

$$T(f \otimes g) = f\omega^{\frac{-1}{p}} * g\omega^{\frac{-1}{p}}, \text{ pour tous } f, g \in L^p(G).$$

De plus $T(f \otimes g) \in L^p_\omega(G)$. D'où

$$T(L^p(G) \otimes L^p(G)) \subset L^p_\omega(G).$$

Par ailleurs

$$T(L^p(G \times G)) = L^p_W(G).$$

Donc l'espace $L^p_\omega(G) \cap L^p_W(G)$ est dense dans $L^p_W(G)$. Soit maintenant I l'application identique définie dans $L^p_\omega(G) \cap L^p_W(G)$ muni de la norme de $L^p_W(G)$. Par la Proposition 2.5, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$||f||_{p,\omega} \leq M \sup\{||f * g||_{p,W} : ||g||_{p,\omega} \leq 1\}.$$

Et de fait que $L^p_W(G)$ est module à gauche sur $L^p_\omega(G)$, on a

$$\begin{aligned} ||f||_{p,\omega} &\leq M \sup\{||f * g||_{p,W} : ||g||_{p,\omega} \leq 1\} \\ &\leq M\,||f||_{p,W}, \text{ pour tout } f \in L^p_\omega(G) \cap L^p_W(G). \end{aligned}$$

Donc I est un opérateur continu de $L^p_\omega(G) \cap L^p_W(G)$ dans $L^p_\omega(G)$. Par suite, I se prolonge en un opérateur continu sur $L^p_W(G)$ tout entier. Autrement dit $L^p_W(G) \subset L^p_\omega(G)$. Ainsi il existe une constante $M > 0$ telle que

$$||f||_{p,\omega} \leq M\,||f||_{p,W}, \text{ pour tout } f \in L^p_W(G).$$

Ceci entraîne que $\omega \leq MW$. Donc

$$\omega^{\frac{1}{1-p}} * \omega^{\frac{1}{1-p}} \leq c\omega^{\frac{1}{1-p}}, \text{ où } c = M^{-\frac{q}{p}}.$$

□

Exemple 2.7. Soit A une partie compacte de G. On pose $\omega = \chi_A$ la fonction caractéristique de A. Alors, pour tout $p \in]1,+\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \chi_A * \chi_A(x) &= \int_G \chi_A(y)\chi_A(y^{-1}x)dy \\ &= \int_A \chi_A(y^{-1}x)dy \\ &\leq mes(A)\chi_A(x). \end{aligned}$$

Donc, d'aprés la Proposition 2.1, $L^p_{\chi_A}(G)$ est une algèbre de Banach. De plus

$$\begin{aligned} f \in L^p_{\chi_A}(G) &\iff |f|^p \chi_A \in L^1(G) \\ &\iff \int_G |f(x)|^p \chi_A(x)dx < \infty \\ &\iff \int_A |f(x)|^p dx < \infty \\ &\iff f \in L^p(A). \end{aligned}$$

Ainsi $L^p_{\chi_A}(G)$ s'identifié à l'espace de Banach $L^p(A)$ des fonctions de puissance p-ièmes intégrables sur A muni de la norme $||.||_p$ définie par :

$$||f||_p = (\int_A |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$

En particulier, si $A = \{x_0\}$, alors l'espace $L^p_{\delta_{x_0}}(G)$ est une algèbre de Banach qui coincïde avec l'algèbre des fonctions complexes définies sur G.

3. Spectre de Gelfand de l'algèbre $L^p_{bi(K),\omega}(G)$ et fonctions sphériques.

Soient K un sous groupe compact de G et f une fonction complexe définie sur G. On dit (cf. [5]) que f est biinvariante par K si, pour tout $x \in G$,

$$f(kxh) = f(x), \text{ pour tous } k,h \in K.$$

Dans toute la suite, on désigne par $\mathscr{K}_{bi(K)}(G)$ l'espace des fonctions de $\mathscr{K}(G)$ qui sont biinvariantes par K. La paire (G,K) est dite de Gelfand (cf. [5]) si l'algèbre de convolution $\mathscr{K}_{bi(K)}(G)$ est commutative. Soit ω un poids sur G, biinvariant par K, tel que l'espace $\left(L^p_\omega(G), ||.||_{p,\omega}\right)$ soit une algèbre de Banach. Alors le sous espace vectoriel fermé $L^p_{bi(K),\omega}(G)$ de $L^p_\omega(G)$ constitué des fonctions biinvariantes par K est une algèbre de Banach. De plus, on a ce qui suit.

Proposition 3.1. *Soient $p \in]1,+\infty[$, K un sous groupe compact de G et ω un poids sur G biinvariant par K tel que l'espace $\left(L^p_\omega(G), ||.||_{p,\omega}\right)$ soit une algèbre de Banach. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) (G,K) est une paire de Gelfand.

2) L'algèbre de Banach $\left(L^p_{bi(K),\omega}(G), ||.||_{p,\omega}\right)$ est commutative.

Démonstration. Résulte de la densité de l'espace $\mathscr{K}_{bi(K)}(G)$ dans $L^p_{bi(K),\omega}(G)$. □

On rappelle la définition suivante.

Définition 3.2. ([5]) Soit (G,K) une paire de Gelfand. Une fonction sphérique est une fonction φ continue sur G, biinvariante par K, telle l'application

$$f \longmapsto \chi(f\rangle = \int_G f(x)\varphi(x^{-1})dx$$

soit un caractère non nul de l'algèbre de convolution $\mathscr{K}_{bi(K)}(G)$ c'est à dire

$$\chi(f*g) = \chi(f)\chi(g), \text{ pour tous } f,g \in \mathscr{K}_{bi(K)}(G).$$

Remarque 3.3. Si $G = \mathbb{R}^n$, $K = \{e\}$ et

$$\omega(x) = \left(1 + \|x\|^2\right)^s, \text{ pour } s > \frac{n(p-1)}{2},$$

alors les fonctions sphériques sont les fonctions exponentielles sur $\mathbb{R}^n$ i.e.,

$$\varphi(x) = e^{-2\pi i\lambda x}, \ (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Soit (G,K) une paire de Gelfand. Notons $\mathscr{M}_\omega$ le spectre de Gelfand de l'algèbre $L^p_{bi(K),\omega}(G)$ c'est à dire l'ensemble des caractères non nuls de $L^p_{bi(K),\omega}(G)$. Alors les fonctions sphériques jouent le rôle des fonctions exponentielles comme le montre le résultat suivant :

Théorème 3.4. *1) Soit φ une fonction sphérique appartenant à $L^q_{bi(K),\omega^{-\frac{q}{p}}}(G)$. Alors l'application*

$$f \longmapsto \Psi(f) = \int_G f(x)\varphi(x^{-1})dx. \tag{3}$$

est un caractère de l'algèbre de Banach commutative $L^p_{bi(K),\omega}(G)$.

2) Pour tout $\chi \in \mathscr{M}_\omega$, il existe une fonction sphérique ψ appartenant à $L^q_{bi(K),\omega^{-\frac{q}{p}}}(G)$ telle que

$$\chi(f) = \int_G f(x)\psi(x^{-1})dx, \textit{ pour tout } f \in L^p_{bi(K),\omega}(G).$$

Démonstration. 1) Elle résulte de la définition des fonctions sphériques et de la densité de $\mathscr{K}_{bi(K)}(G)$ dans $L^p_{bi(K),\omega}(G)$.
2) Soit $\chi \in \mathscr{M}_\omega$. Alors χ est une forme linéaire continue de norme 1. Par conséquent, l'application $f \longmapsto \chi(f_K)$, où f_K est la fonction définie par

$$f_K(x) = \iint_{K\times K} f(k_1xk_2)dk_1dk_2, \text{ pour tout } x \in G,$$

est une forme linéaire continue sur $L^p_\omega(G)$.

Soit ψ_0 l'unique fonction de $L^q_{bi(K),\omega^{-\frac{q}{p}}}(G)$ vérifiant

$$\chi(f_K) = \langle f, \psi_0 \rangle, \text{ pour tout } f \in L^p_\omega(G),$$

où

$$\langle f, \psi_0 \rangle = \int_G f(x)\psi_0(x)dx.$$

Comme χ est non nul, il existe une fonction non nul $g \in \mathscr{K}(G)$ telle que $\chi(g_K) = 1$. Alors, pour tout $f \in \mathscr{K}(G)$; et en vertu du théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\chi(f_K) &= \chi(f_K * g_K) \\
&= \chi((f * g_K)_K) \\
&= \langle f * g_K, \psi_0 \rangle \\
&= \langle f, (g_K * \overset{\vee}{\psi_0})\check{} \rangle \\
&= \int_G f(x)\psi(x^{-1})dx,
\end{aligned}$$

où $\psi = g_K * \psi_0$. La fonction $\psi \in L^q_{bi(K),\omega^{-\frac{q}{p}}}(G)$ est alors continue, biinvariante par K et $||\psi||_{q,W^{\frac{-q}{p}}} = 1$. De plus, si f et g sont deux fonctions continues à support compact, on a

$$\chi(f_K * g_K) - \chi(f_k)\chi(g_K) = \iint_{G\times G} [\psi(xy) - \psi(x)\varphi(y)] f_K(x) g_K(y) dxdy$$

$$= \iint_{G\times G} \left[\int_K \psi(xky)dk - \psi(x)\varphi(y) \right] f(x)g(y)dxdy$$

D'où

$$\int_K \psi(xky)dk = \psi(x)\psi(y) : \forall x, y \in G.$$

Donc ψ est une fonction sphérique. □

4. Transformation de Fourier dans l'espace à poids $L^p_{bi(K),\omega}(G)$.

Soient K un sous groupe compact de G et ω un poids sur G biinvariante par K tel que l'espace $L^p_\omega(G)$ soit une algèbre de Banach. On suppose que (G, K) est une paire de Gelfand. Pour toute $f \in L^p_\omega(G)$, posons

$$f^\sharp(x) = f(x^{-1}), \text{ pour tout } x \in G.$$

On vérifie facilement que l'application $f \longmapsto f^\sharp$ est une involution d'algèbre sur $L^p_\omega(G)$. Si de plus, le poids ω est pair i.e., $\omega(x^{-1}) = \omega(x)$, pour tout $x \in G$, alors on a le résultat suivant :

Proposition 4.1. *Si le poids ω est pair, alors l'involution $f \longmapsto f^\sharp$ est une isométrie sur $L^p_\omega(G)$.*

Démonstration. Soit $f \in L^p_\omega(G)$, on a

$$\begin{aligned}\int_G \left|f^\sharp(x)\right|^p \omega(x)dx &= \int_G \left|f(x^{-1})\right|^p \omega(x)dx \\ &= \int_G |f(x)|^p \omega(x^{-1})dx \\ &= \int_G |f(x)|^p \omega(x)dx.\end{aligned}$$

Une fonction φ, définie sur G, est dite de type positif si

$$\sum_{i,j=1}^{N} \varphi(x_i^{-1}x_j)c_i\overline{c_j} \geq 0$$

quels que soient les éléments $x_1, x_2, ..., x_N$ de G et les nombres complexes c_1, $c_2, \ldots, c_N$. Soit φ une fonction continue sur G. Pour que φ soit de type positif il faut, et il suffit, que

$$\iint_{G\times G} \varphi(x^{-1}y)f(x)\overline{f(y)}dxdy \geq 0$$

i.e.,

$$\iint_G \varphi(x^{-1}y)f^\sharp * f(x)dx \geq 0.$$

□

Proposition 4.2. *On suppose que $\omega^{\frac{-q}{p}} \in L^1(G)$. Alors toute fonction continue de type positif sur G appartienne à $L^q_{\omega^{-\frac{q}{p}}}(G)$.*

Démonstration. Soit ψ une fonction continue de type positif sur G. Alors, d'après [5], il existe une représentation unique, unitaire et continue $(\pi, \mathscr{H})$ de G telle que

$$\psi(x) = (u \mid \pi(x)u),$$

où u est un vecteur K-invarint et cyclique de $\mathscr{H}$. Par suite

$$\begin{aligned}\int_G |\psi(x)|^q \omega^{\frac{-q}{p}}(x)dx &= \int_G |(u \mid \pi(x)u)|^q \omega^{\frac{-q}{p}}(x)dx \\ &\leq \|u\|^{2q} \int_G \omega^{\frac{-q}{p}}(x)dx.\end{aligned}$$

Dans toute la suite, nous supposons que le poids ω est pair et que $\omega^{\frac{-q}{p}} \in L^1(G)$. Soit ψ une fonction continue de type positif sur G. Alors la forme linéaire L sur $L^p_\omega(G)$ définie par :

$$L(f) = \int_G f(x)\psi(x^{-1})dx$$

est positive vue que

$$L(f^\sharp * f) = \int_G \psi(x^{-1}y)f(x)\overline{f(y)}dxdy \geq 0.$$

De plus si ψ est biinvariante par K, alors il en est de même pour L i.e.,

$$L(f) = L(f_K), \text{ pour tout } f \in L^p_\omega(G).$$

□

La réciproque est également vraie comme le montre le résultat suivant.

Théorème 4.3. *Soit L une forme linéaire continue, sur $L^p_\omega(G)$, positive et biinvariante par K. Alors, il existe une fonction unique continue ψ de type positif et biinvariante par K telle que*

$$L(f) = \int_G f(x)\psi(x^{-1})dx.$$

De plus $||L|| = \psi(e)$.

Démonstration. Elle est analogue à celle donnée pour l'algèbre $L^1(G)$ ([5]). □

Comme conséquence, on a le résultat suivant.

Corollaire 4.4. *Soit $P_{bi(K)}(G)$ l'ensemble des fonctions ψ continues de type positif sur G, biinvariantes par K et vérifiant $\psi(e) \leq 1$. Alors $P_{bi(K)}(G)$, considéré comme une partie de $L^q_{\omega^{-\frac{q}{p}}}(G)$, est compact pour la topologie $*$-faible*

$$\sigma\left(L^q_{\omega^{-\frac{q}{p}}}(G), L^p_\omega(G)\right).$$

Démonstration. Puisque la boule unité de $L^p_\omega(G)$ est compact pour cette topologie, il suffit de montrer que $P_{bi(K)}(G)$ est fermé. Si L est limite d'éléments de $P_{bi(K)}(G)$, c'est une forme linéaire continue de type positif sur $L^p_\omega(G)$, biinvariante par K et vérifiant $||L|| \leq 1$. D'où, d'aprés le théorème précédent, $L \in P_{bi(K)}(G)$. □

Remarque 4.5. D'aprés le Théorème 3.4, $\mathscr{M}_\omega$ s'identifié à l'ensemble des fonctions sphériques $\varphi \in L^q_{bi(K),\omega^{-\frac{q}{p}}}(G)$ tels que $||\varphi||_{q,W^{\frac{-q}{p}}} = 1$ et $\varphi(e) = 1$. Pour tout $f \in L^p_{bi(K),\omega}(G)$, la transformée de Fourier de f, notée encore $\mathscr{F}(f)$, est définie par

$$\mathscr{F}(f)(\varphi) = \int_G f(x)\varphi(x^{-1})dx, \text{ pour tout } \varphi \in \mathscr{M}_\omega.$$

La fonction $\mathscr{F}(f)$ appartient à l'espace $\mathscr{C}_0(\mathscr{M}_\omega)$ des fonctions continues sur $\mathscr{M}_\omega$ et tendant vers 0 à l'infini. De plus, la transformation de Fourier $\mathscr{F}$: $L^p_{bi(K),\omega}(G) \to \mathscr{C}_0(\mathscr{M}_\omega)$ est un homomorphisme à image dense.

On termine par étudier le cas du groupe des déplacements de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Soit n un entier ≥ 2 et G le produit semi-direct

$$G = SO(n) \times \mathbb{R}^n.$$

Il est bien connu que G opère doublement transitive sur $G/K = \mathbb{R}^n$, où $K = SO(n)$, et que (G,K) est une paire de Gelfand. Une fonction f sur G biinvariante par K peut être considérer comme fonction sur $\mathbb{R}^n$ invariante par K c'est à dire une fonction radiale sur $\mathbb{R}^n$. De plus, si f est une telle fonction, alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty F(r)dr, \text{ où } r = ||x||.$$

Pour $\alpha > \dfrac{n}{2}$, posons $\omega_\alpha(k,x) = \left(1+|x|^2\right)^\alpha$. Alors ω_α est un poids sur G biinvariante par K. De plus, il existe une constante $c(\alpha)$ ([3]) telle que

$$\omega_\alpha^{-1} * \omega_\alpha^{-1} \leq c(\alpha)\omega_\alpha^{-1}$$

Comme dans la Proposition 2.1, on montre que

$$||f*g||_{p,\omega_\alpha} \leq c(\alpha)\,||f||_{p,\omega_\alpha}\,||g||_{p,\omega_\alpha}, \text{ pour tous } f,g \in L^p_{\omega_\alpha}(G).$$

Donc, sans perte de généralité, on peut supposer que $(L^p_{\omega_\alpha}(G), ||.||_{p,\omega_\alpha})$ est une algèbre de Banach. Comme (G,K) est une paire de Gelfand, le sous espace fermé $L^p_{bi(K),\omega_\alpha}(G)$ de $L^p_{\omega_\alpha}(G)$ est une algèbre de Banach commutative.
Le résultat suivant décrit le spectre de Gelfand de l'algèbre $L^p_{bi(K),\omega_\alpha}(G)$.

Théorème 4.6. *Tout caractère de $L^p_{bi(K),\omega_\alpha}(G)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme*

$$f \longmapsto \chi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\lambda(x)dx,$$

où λ est un réel strictement positif et

$$\varphi_\lambda(x) = \varphi(r,\lambda) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{2k}$$

qui admet la représentation intégrale suivante

$$\varphi(r,\lambda) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\pi \exp(i\lambda r\cos\theta)\sin^{n-2}(\theta)d\theta.$$

Démonstration. Soit χ un caractère non nul de $L^p_{bi(K),\omega_\alpha}(G)$. D'aprés le Théorème 3.4, il existe une fonction sphérique $\varphi \in L^q_{bi(K),\omega_\alpha^{-\frac{q}{p}}}(G)$ telle que

$$\chi(f) = \int_G f(x)\varphi(x^{-1})dx, \text{ pour tout } f \in L^p_{bi(K),\omega_\alpha}(G).$$

Par [5], les fonctions sphériques, pour la paire (G,K), qui sont dans $L^q_{bi(K),\omega_\alpha^{-\frac{q}{p}}}(G)$ sont exactement les fonctions φ_λ. □

Remarque 4.7. Le spectre de Gelfand de l'algèbre de Banach $L^p_{bi(K),\omega_\alpha}(G)$ est homéomorphe à $[0,+\infty[$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Benazzouz, *Contribution à l'analyse harmonique des algèbres de Beurling généralisées*, Thèse de 3ème cycle, Faculté des Sciences de Rabat, 1986.

[2] J. Dieudonné, *Elément d'analyse*, Tome 6, Collection Cahiers Scientifiques, Gauthier-Villars, Paris, 1975.

[3] A. El Kinani - A. Benazzouz, *Structure m-convexe dans l'espace à poids* $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$, Bull. Belg. Math. Soc. 10 (2003), 49–57.

[4] A. El Kinani, *Sur les idéaux d'une algèbre de Beurling généralisée*, Le Matematiche, Vol. LXI Fasc. II (2006), 301–316.

[5] J. Faraut, *Analyse harmonique sur les espaces Riemenniens symétriques de rang un*, Cours de CIMPA. Nancy 1, 1982.

[6] C. S. Herz, *Sur le phénomène de Kunze et Stein*, C. R. Acad. Sc. Paris t. 271 (1970), 491–494.

[7] R.A. Kunze - E.M. Stein, *Uniformly bounded representations and Harmonic Analysis of the* 2×2 *real unimodular group*. Amer. J. Math. 82, (1960), 1–62.

[8] A. Mallios, *Topological algebras*, Selected topics, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[9] E. A. Michael, *Locally multiplicatively convex topological algebras*, Memoirs Amer. Math. Soc. 11 (1952).

A. EL KINANI
École Normale Supérieure,
B. P. 5118-Takaddoum, 10105 Rabat, Maroc.
e-mail: abdellah_elkinani@yahoo.fr

A. ROUKBI
Département de Mathématiques et d'informatique
Faculté des sciences Université Ibn Tofail
B.P. 14000. Kenitra (MAROC).
e-mail: rroukbi.a2000@gmail.com

A. BENAZZOUZ
École Normale Supérieure,
B. P. 5118-Takaddoum, 10105 Rabat, Maroc.