HILBERT E IL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

Mariano Giaquinta

IL PENSIERO DI DAVIDE HILBERT

A CENTO ANNI DAI "GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE"
E DAL CONGRESSO INTERNAZIONALE DI PARIGI

Università degli Studi di Catania – Dipartimento di Matematica – Catania 23-25 settembre 1999

LE MATEMATICHE
Vol. LV (2000) – Supplemento n. 1, pp. 47–58

HILBERT E IL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

MARIANO GIAQUINTA

I fondamentali contributi di Hilbert al Calcolo delle Variazioni appaiono negli anni 1900-1904, ma durante tutto il periodo 1899-1924 Hilbert più volte tiene corsi specifici o inserisce argomenti di CdV in altri corsi (sulle equazioni integrali, sulle equazioni a derivate parziali, o sulla meccanica o la fisica matematica) in accordo con la sua idea che il CdV "è per l'Analisi come l'alfabeto per leggere o scrivere o le tabelline per far di conto" e che la "meccanica è un caso particolare del CdV". D'altro canto la rilevanza che Hilbert attribuisce al CdV traspare chiaramente dall'ultimo dei problemi presentati al Congresso di Parigi del 1900, il 23° problema. Egli dice: "Fino ad ora ho menzionato problemi quanto più definiti e speciali possibili.... Però mi piace concludere con un problema generale, e precisamente con l'indicazione di una branca della matematica più volte menzionata in questa conferenza – che, malgrado i progressi fatti recentemente ad opera di Weierstrass, non riceve il generale apprezzamento che le è dovuto – intendo il Calcolo delle Variazioni".

In questa conferenza cercherò di illustrare alcune delle idee di Hilbert e soprattutto alcuni degli sviluppi che queste idee hanno generato nel CdV. La mia non è una analisi storica, ma semplicemente il racconto di come la comunità matematica si è riferita all'opera ed al nome di Hilbert, per di più modulato dalla mia esperienza, dal mio gusto, e dalle mie limitate conoscenze.

Con lo sviluppo dell'elettrostatica e dell'elettromagnetismo a partire dalla metà del secolo scorso divenne essenziale risolvere equazioni alle derivate parziali come quella di Laplace o Poisson

$$\Delta u = 0, \qquad \Delta u = f. \tag{1}$$

Essendo l'equazione $\Delta u = 0$ l'equazione di Eulero-Lagrange dell'integrale di Dirichlet

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2\,dx, \tag{2}$$

questo funzionale divenne l'oggetto principale nello studio delle funzioni armoniche.

Nelle sue lezioni [1] Dirichlet, usando l'integrale in (2) prova che il problema al bordo (ora chiamato problema di Dirichlet)

$$\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ su } \partial\Omega \tag{3}$$

in un dominio Ω limitato può avere al più una soluzione, ed afferma che l'integrale (2), che ovviamente è limitato dal basso, ha un minimo tra le funzioni con valori al bordo g, deducendone l'esistenza di una soluzione per il problema

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ su } \partial\Omega. \tag{4}$$

Questo argomento, denotato come *principio di Dirichlet*, fu assunto da Riemann come base per la sua teoria geometrica delle funzioni e la sua teoria delle funzioni abeliane.

È ben nota la critica di Weierstrass al principio di Dirichlet [2]; in termini moderni essa consiste nel mettere in evidenza la confusione tra *estremo inferiore* e *minimo*, e nel mostrare che non necessariamente un problema variazionale con energia equilimitata dal basso ha minimo [3].

---

[1] Si vedano ad esempio le lezioni del semestre invernale del 1856-57 date a Göttingen e pubblicate dallo studente di Dirichlet Grube col titolo *Vorlesungen über die umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte von P.G. Lejeune-Dirichlet,* Teubner, Leipzig nel 1876.

[2] *Über das sogenannte Dirichletsche Prinzip*, gelesen in der Königlichen Akademie der Wissenschaften am 14 Juli 1870.

[3] Nel secolo scorso (1800) la confusione tra estremo inferiore e minimo ha dell'incredibile. Il titolo dell'opera di A.F. Monna, *Dirichlet's principle, a mathematical comedy of errors and its influence on the development of analysis*, rende bene l'idea. Già Gauss e lord Kelvin avevano usato argomenti simili al principio di Dirichlet. Ma Gauss aveva criticato nella sua tesi d'Alembert per aver fatto uso di una argomentazione simile al principio di Dirichlet per dimostrare l'esistenza di soluzioni di equazioni algebriche, e lo stesso Dirichlet critica Steiner per aver tacitamente assunto nello studio del problema isoperimetrico l'esistenza di una figura nel piano con perimetro fissato ed area massima.

Ma non solo l'argomento di Dirichlet non è completo; in generale il principio di Dirichlet non può funzionare per provare l'esistenza di una soluzione del problema al bordo (4). Nel 1871 Prym [4] diede un esempio di una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ soluzione di (4) ma verificante

$$\int_\Omega |Du|^2\, dx = \infty.$$

In realtà l'osservazione di Prym fu ignorata fino alla scoperta di un esempio simile da parte di Hadamard.

In seguito alla critica di Weierstrass, a parte qualche tentativo senza successo di stabilire il principio di Dirichlet [5], nuovi metodi si sviluppano in sostituzione. H.A. Schwarz mostra in modo rigoroso come la formula di Poisson permetta di scrivere una soluzione del problema (4) nel caso di dato g continuo ed Ω una sfera, e sviluppa dei metodi combinatori che permettono di risolvere il problema (4) in domini complicati, una volta risolto in domini piú semplici. C. Neumann riduce il problema al bordo per il laplaciano ad una equazione integrale del secondo tipo, della forma astratta

$$u - Ku = g$$

che si risolve in termine della *serie di Neumann* $1 + K + K^2 + K^3 + \cdots$.
I metodi di Schwarz e Neumann furono estesi e migliorati da H. Poincaré. Egli inventò il *metodo del balayage*, un metodo iterativo che si basa sul risolvere il problema di Dirichlet su palle del dominio Ω, e fa un uso estensivo del principio di massimo e della disuguaglianza di Harnack per funzioni armoniche. Poincaré contribuì anche alla teoria delle equazioni integrali, sviluppata da Fredholm negli anni 1900-1903 e perfezionata da Hilbert negli anni 1904-1910. Queste ricerche si svilupperanno da una parte nella teoria del potenziale, e dall'altra nello studio dell'analisi con infinite variabili, e con Riesz, Fréchet, Baire, Lebesgue nello studio degli spazi astratti – anche in connessione con lo studio delle *serie di Fourier* – fino alla moderna analisi funzionale.

Nel 1889 un nuovo tentativo di far rivivere il principio di Dirichlet fu iniziato da C. Arzelà [6] che contribuì anche a quello che oggi si chiama il *teorema*

[4] F. Prym, *Zur Integration der Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, J. Reine und Angew. Math., 73 (1871), pp. 340–364.

[5] Ad esempio, H. Weber, *Note zu Riemanns Beweis des Dirichletschen Prinzips*, J. Reine und Angew. Math., 71 (1870), pp. 29–39.

[6] C. Arzelà, *Il principio di Dirichlet*, Rend. R. Acad. Bologna, (1897).

di Ascoli-Arzelà e che caratterizza gli insiemi relativamente compatti di funzioni continue. L'idea di Arzelà era di restringere lo spazio delle funzioni ammissibili a quelle di classe C^3 con derivata terza equilimitata. In questo modo l'esistenza del minimo è garantita dal teorema di compattezza di Ascoli-Arzelà. Però egli non riuscì a dimostrare che la funzione minimizzante soddisfa l'equazione di Laplace. Malgrado questo, Arzelà ritenne utile pubblicare il suo approccio. Successivamente la sua idea di ridurre lo spazio delle funzioni di confronto con vincoli artificiali (che risultano a posteriori essere irrilevanti) è stata usata da vari matematici, tra gli altri da H. Lewy, T. Rado, A. Haar, G. Stampacchia, S. Hildebrandt.

È Hilbert con due pubblicazioni del 1900 e del 1904 [7] a far rivivere il principio di Dirichlet e suscitare nuovo interesse nel CdV. Nel primo lavoro egli mostra come il principio di Dirichlet possa essere usato per provare l'esistenza di una curva di lunghezza minima che connette due punti su una superficie, e risolve il problema al bordo per l'operatore di Laplace su un dominio piano. Nel secondo egli prova l'esistenza di una funzione armonica su una superficie di Riemann con fissato salto lungo una prefissata curva chiusa. Ma il merito principale di Hilbert è probabilmente quello di aver realizzato che il principio di Dirichlet porta a tutto un nuovo programma per il CdV e di aver formulato in modo chiaro e preciso questo programma in due dei ventitre problemi posti nella conferenza di Parigi del 1900 fissando una sorta di agenda in questa area per tutto il secolo. Infatti dei ventitre problemi proposti da Hilbert tre si riferiscono al CdV; di questi il 23° è legato agli sviluppi del CdV classico ed ai cosiddetti *metodi indiretti* del CdV, il 19° e 20° sono la formulazione di quelli che successivamente furono chiamati i *metodi diretti nel CdV.* Più che commentare conviene qui riportare le parole di Hilbert.

19° Problema. *Sono le soluzioni dei problemi regolari del CdV sempre necessariamente analitiche?*

Uno dei fatti più rimarchevoli nella teoria delle funzioni analitiche sembra a me questo: esistono equazioni differenziali che hanno come soluzioni solo funzioni analitiche. Le equazioni più note di questo tipo sono l'equazione del potenziale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

[7] D. Hilbert, *Über das Dirichletsche Prinzip,* Jahresbericht Deutsch. Math. Verein., 8 (1900), pp. 184–188.
D. Hilbert, *Über das Dirichletsche Prinzip,* Math. Ann., 59 (1904), pp. 161–184.

e certe equazioni differenziali studiate da Picard, ma anche l'equazione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^f,$$

l'equazione differenziale delle superfici minime, e altre. La maggior parte di queste equazioni hanno la comune caratteristica di essere equazioni differenziali lagrangiane di problemi variazionali

$$\iint F(p, q, z, x, y)\, dxdy = \min, \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

tali che per i valori degli argomenti di F nel dominio in discussione si abbia

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}\right)^2 > 0,$$

F essendo essa stessa una funzione analitica. Chiameremo questo tipo di problemi *problemi variazionali regolari.* Sono principalmente i problemi variazionali regolari che giocano un ruolo in geometria, in meccanica ed in fisica matematica; e naturalmente si pone la questione se tutte le soluzioni di problemi variazionali regolari debbano necessariamente essere funzioni analitiche. In altre parole, *ogni equazione a derivate parziali lagrangiana di un problema variazionale regolare ha la proprietà di ammettere esclusivamente integrali analitici?* E questo succede anche quando la funzione, come nel problema di Dirichlet per la funzione potenziale, è costretta a prendere valori al bordo che sono continui ma non analitici?

Posso osservare ancora che esistono superfici di curvatura gaussiana negativa rappresentate da funzioni continue con derivate di ogni ordine ma non analitiche; ma è invece probabile che ogni superficie con curvatura gaussiana costante e positiva è necessariamente una superfice analitica.

20° Problema. *Problemi al bordo.*

Un problema importante, legato al precedente, è quello dell'esistenza di soluzioni di equazioni alle derivate parziali con valori assegnati sul bordo di una regione. Questo problema è stato in gran parte risolto con i metodi di H.A. Schwarz, C. Neumann e H. Poincaré per l'equazione differenziale del potenziale. Questi metodi, però, non sembrano direttamente estendibili per trattare il caso in cui sul bordo si prescrivano le derivate o relazioni di queste con i valori al bordo. Nè si estendono immediatamente per trattare superfici diverse da quella potenziale come, ad esempio, superfici di area minima, o superfici di curvatura gaussiana costante positiva che passano per una curva fissata o si appoggiano su una superficie di tipo anello. È mia convinzione che sarà possibile provare questi teoremi di esistenza per mezzo di un principio generale la cui natura è indicata dal principio di Dirichlet. Questo principio generale ci permetterà forse di affrontare la questione *se ogni problema variazionale regolare ha soluzione, sempre che alcune ipotesi relative al dato al bordo siano soddisfatte* (ad esempio che le funzioni coinvolte in queste condizioni al bordo siano continue ed abbiano una o più derivate), *e sempre che, se necessario, la nozione di soluzione sia opportunamente estesa.*

Come già detto, in questi due problemi è delineato l'intero sviluppo dei metodi diretti nel CdV. Questo sviluppo ha generato una enorme quantità di nuovi metodi e risultati e di nuovi interessi, ha coinvolto un incredibile numero di matematici nel corso di questo secolo, ha prodotto probabilmente più di un centinaio di monografie e sicuramente molte migliaia di pubblicazioni, ha mostrato chiaramente il ruolo fondamentale del CdV e dei suoi metodi nella fisica e nella geometria e, dopo cento anni dall'enunciazione dei problemi di Hilbert ha reso il CdV una delle discipline più vive della matematica di oggi. Ovviamente è difficile pensare che Hilbert abbia previsto tutto questo, ma il suo ruolo in questo sviluppo è sicuramente stato molto rilevante. Riferire qui, anche solo sui risultati più rilevanti, è pertanto impossibile. Mi limiterò quindi ad illustrare solo alcuni passi più strettamente legati alle idee di Hilbert.

L'approccio iniziale di Hilbert consisteva nel considerare una successione minimizzante e nel modificarla appropriatamente in modo che essa convergesse uniformemente ad una funzione minimizzante. Questa idea fu sviluppata da H. Lebesgue, B. Levi, G. Fubini, J. Hadamard, S. Zaremba, L. Lichtenstein, R. Courant, ed, anche se essa non è esattamente quella a cui oggi ci si riferisce come ai metodi diretti del CdV, essa è stata ripresa in più occasioni nel corso degli anni, anche recenti.

In questa rapida reazione ai risultati di Hilbert Lebesgue, in particolare, mette in risalto il ruolo fondamentale che ha la semicontinuità quando si considerano funzionali integrali; questa osservazione assieme al contemporaneo sviluppo dell'analisi sugli spazi astratti ad opera di Fréchet e Baire porta Tonelli all'essenziale dei metodi diretti, il principio generale è: minimizzando un integrale, prima assicurarsi che esso sia limitato dal basso, quindi provare la sua semicontinuità inferiore rispetto ad una convergenza nella classe delle funzioni in competizione ed infine garantirsi che una successione minimizzante converga per questa convergenza ad una funzione ammissibile. Tonelli applicò questo principio – che diffuse in varie conferenze (specialmente nei congressi internazionali di Toronto, 1924, Bologna, 1928, e Zurigo, 1932), in vari lavori e con la sua monografia [8] – a classi generali di problemi 1- dimensionali ed a qualche problema 2- dimensionale. Nei suoi lavori egli usò la convergenza uniforme e le funzioni *assolutamente continue* come classe di funzioni ammissibili. La sua opera fu completata negli anni '40 da C.B. Morrey [9] che lavorò in *classi di Sobolev* e con la convergenza debole. C'è da rilevare che già B. Levi [10] aveva osservato nel 1906 che una successione minimizzante per l'integrale di Dirichlet è una successione di Cauchy per la norma di Dirichlet, i.e., per la norma $W^{1,2}$, e che J. Leray, nei suoi fondamentali lavori sulle equazioni dell'idrodinamica, aveva dato una trattazione moderna del problema di minimizzare una forma quadratica nei Sobolev, introducendo la nozione di *soluzione debole*.

Negli anni '50 si sviluppa anche l'approccio debole alla ricerca di superfici di area minima con bordo assegnato con F. Federer, Fleming e De Giorgi, ed il lavoro fondamentale di Morrey [11] sull'esistenza di superfici minime 2-dimensionali in varietà Riemanniane conclude il percorso iniziato da Douglas, Courant e Tonelli.

Negli anni '60 risulta quindi chiaro che il principio generale auspicato da Hilbert per provare l'esistenza di un punto di minimo *generalizzato* per un problema variazionale poteva essere formulato come: dovendo minimizzare una energia $\mathcal{F}(u)$ in una classe $\mathcal{C}$ si tratta di scegliere una convergenza τ in $\mathcal{C}$ in modo che $\mathcal{F}$ sia sequenzialmente semicontinuo e insiemi equilimitati in energia di $\mathcal{C}$ siano relativamente compatti rispetto a τ; nel completamento sequenziale di $\mathcal{C}$, $\overline{\mathcal{C}}$, rispetto a τ, l'estensione semicontinua di $\mathcal{F}$, $\overline{\mathcal{F}}$, avrà allora un minimo. Ci si riferisce al problema

$$\overline{\mathcal{F}}(u) \to \min \quad u \in \overline{\mathcal{C}}$$

[8] L. Tonelli, *Fondamenti del calcolo delle variazioni*, voll. 2, Zanichelli, Bologna, 1921. Si veda anche
L. Tonelli, *Opere scelte,* Cremonese, 1961, specialmente i voll. 2 e 3.

[9] C.B. Morrey, *Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics,* University of California, 1943.

[10] B. Levi, *Sul principio di Dirichlet,* Rend. Circ. Mat. Palermo, 22 (1906), pp. 293–359.

[11] C.B. Morrey, *The problem of Plateau on a Riemannian manifold,* Ann. of Math., 49 (1948), pp. 807–851.

come ad *una* formulazione debole del problema iniziale.

Osserviamo che la convergenza τ non è data a priori e la sua scelta è uno dei punti rilevanti in molti problemi. In effetti successivamente si evidenzierà il fatto che, mentre nel caso scalare la scelta di τ è essenzialmente irrilevante (almeno per problemi regolari), non è così per molti problemi geometrici vettoriali: scelte diverse di τ, in questo caso, possono portare a formulazioni deboli diverse con soluzioni diverse [12].

Il 19° problema di Hilbert assume ora, nel contesto delle soluzioni deboli, una rilevanza ancora maggiore: le soluzioni deboli trovate con i metodi diretti sono soluzioni classiche? e se sono singolari, che tipo di singolarità possono avere? più in generale, quali sono le proprietà qualitative dei minimi?

Già nel 1904 S. Bernstein [13] prova che i minimi di integrali doppi regolari (con integranda analitica) sono analitici, se sono di classe C^3; nel 1912 Lichtenstein prova che minimi di classe C^2 sono di classe C^3 e quindi analitici; e nel 1929 E. Hopf prova che la stessa conclusione vale per minimi con derivate prime Hölderiane [14]. Infine nel 1939 Morrey risolve il 19° problema di Hilbert nel caso 2-dimensionale, provando che i minimi di integrali doppi regolari forniti dai metodi diretti sono funzioni regolari e quindi analitiche se l'integranda è analitica. Per una risposta completa (in ogni dimensione) al 19° problema di Hilbert bisognerà aspettare il celebre lavoro di De Giorgi [15] del 1957 che dà una risposta positiva.

C'è da osservare che i risultati cui abbiamo accennato ed il contesto in cui sono ottenuti hanno un impatto drammatico, per i metodi che vengono sviluppati, soprattutto nella teoria delle equazioni differenziali ellittiche, ma direi in tutta l'analisi. Ad esempio Bernstein fa un uso estensivo delle *maggiorazioni a priori*

---

[12] Si veda ad esempio
M. Giaquinta, G. Modica, J. Souček, *Cartesian currents in the calculus of variations,* vols. 2, Springer, Berlin, 1998.
G. Buttazzo, M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *One-dimensional variational problems,* Oxford Univ. Press, Oxford, 1998.

[13] S. Bernstein, *Sur la nature analytique des solutions des équations aux derivées partielles du second ordre,* Math. Ann., 59 (1904), pp. 20–76.

[14] In effetti derivate continue è una condizione sufficiente; d'altra parte minimi lipschitziani non sono necessariamente di classe C^1, nel caso vettoriale.

[15] E. De Giorgi, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari,* Mem. Accad. Sci. Torino, 3 (1957), pp. 25–43.

e combinandolo con il metodo di continuità prova esistenza di soluzioni analitiche di equazioni ellittiche del secondo ordine in due variabili. L'introduzione di metodi topologici più raffinati da parte di J. Leray, Schauder e Caccioppoli, sempre del contesto delle equazioni differenziali non lineari, porta Schauder a rilevare che stime a priori $C^{2,\alpha}$ implicano esistenza; infine gli sviluppi successivi al lavoro di De Giorgi, dovuti tra gli altri a Morrey, Stampacchia, Ladyzhenskaya e Uralt'seva, Serrin portano alla risoluzione di problemi al bordo per equazioni ellittiche non lineari.

Sempre nello stesso ideale sviluppo collegato ai problemi di Hilbert vanno visti i fondamentali ed estremamente fruttuosi lavori di Reifenberg, De Giorgi, Fleming, Almgren, Allard relativi alle superfici generalizzate (bordi, correnti, varifolds) di codimensione 1 di area minima, come pure risultati come il teorema di decomposizione di Hodge-Kodaira-Morrey, che in particolare fornisce un rappresentante armonico in ogni classe di coomologia, o la teoria delle superfici minime 2- dimensionali, solo per citare alcuni esempi.

A partire dagli anni 1970-80 si intensifica lo studio dei problemi variazionali vettoriali o geometrici (elasticità non lineare, applicazioni armoniche tra varietà, Yang-Mills,...). Tipico in questo caso sono fenomeni di concentrazione di energia nel processo di minimizzazione e la comparsa di singolarità per i minimi. Ma questo forse ci porterebbe lontano dalle aspettative e dall'immaginazione di Hilbert.

Preferisco quindi concludere con qualche osservazione sul 23° problema. Qui Hilbert, oltre ad insistere sull'importanza per l'analisi del CdV, introduce quello che oggi si chiama l'*integrale invariante di Hilbert* e delinea un approccio alla teoria dei campi estremali di Weierstrass provando la ben nota formula di rappresentazione di Weierstrass che esprime la variazione di un funzionale, $\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(u_0)$, in termine della *funzione eccesso* di Weierstrass. C'è da dire che idee simili erano già state delineate da E. Beltrami [16]. A questo ordine di idee, da Beltrami, Weierstrass, a Hilbert, si ricollegano i lavori di A. Meyer, l'approccio alla teoria dei campi estremali di Carathéodory [17] che in embrione contiene l'*idea delle calibrazioni* ed allo stesso tempo dà una visione unitaria della dualità onde-particelle e del formalismo Hamiltoniano, come pure le teorie geometriche del CdV di H. Weyl, H. Lepage, E. De Donder fino ai più recenti

[16] E. Beltrami, *Sulla teoria delle linee geodetiche,* Rend. R.I. Lombardo, 1 (1868), pp. 708–718.

[17] Si veda ad esempio M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *Calculus of Variations,* voll. 2, Springer, 1996.

tentativi ad esempio di P. Griffths. Sempre a questo ordine di idee si può far risalire anche la teoria degli *invarianti integrali* di E. Cartan. Ma in tutti questi casi forse, più che a Hilbert, il riferimento è da ricercare più lontano, ad esempio in John Bernoulli, Gauss e A. Kneser [18].

Mariano Giaquinta,
Scuola Normale Superiore,
p. dei Cavalieri, 7
56127 Pisa (Italy)
e-mail: mgiaqui@sns.it

[18] Per ulteriori informazioni rimandiamo a:
C. Reid, *Hilbert,* Springer-Verlag, New York, 1970.
F. Browder (Ed.), *Mathematical developments arising from Hilbert problems,* Proc. Symposia Pure Math., vol. 28, AMS, 1976 (in particolare gli articoli di E. Bombieri, J. Serrin, G. Stampacchia).
R. Thiele, *Über die Variationsrechnung in Hilberts Werken zur Analisys,* NTM, 5 (1997), pp. 23–42.
R. Thiele, *On some contributions to field theory in the Calculus of Variations from Beltrami to Carathéodory,* Historia Mathematica, 24 (1997), pp. 281–300.