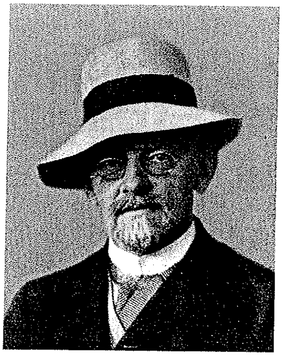

HILBERT E LA LOGICA

Gabriele Lolli

IL PENSIERO DI DAVIDE HILBERT

A CENTO ANNI DAI "GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE"
E DAL CONGRESSO INTERNAZIONALE DI PARIGI

Università degli Studi di Catania – Dipartimento di Matematica – Catania 23-25 settembre 1999

LE MATEMATICHE
Vol. LV (2000) – Supplemento n. 1, pp. 93–126

HILBERT E LA LOGICA

GABRIELE LOLLI

David Hilbert ha coltivato un profondo interesse per i fondamenti, per un lungo periodo, nel corso del quale ha elaborato e approfondito le sue idee in stretta connessione con il lavoro che lo ha portato a essere, tra i tanti padri della logica matematica, quello che ha maggiori diritti a essere considerato tale. Ne spiegheremo la ragione, seguendo la maturazione del pensiero di Hilbert, soprattutto attraverso molte citazioni, che parlano meglio di qualsiasi riassunto [1]. Il periodo in esame si estende dal 1899 fino alla fine della vita di Hilbert, almeno fino al 1932 [2], dapprima con interruzioni, ma con maggiore continuità negli anni venti, quando si parlerà esplicitamente di un *programma di Hilbert* e si identificherà una *scuola di Hilbert* a cui faranno riferimento, oltre che gli allievi come Bernays, Ackermann e von Neumann, anche tutti i logici del tempo, da Skolem a Gödel a Herbrand.

1. Il Congresso di Parigi.

Assumiamo come data simbolica di inizio dell'interesse di Hilbert per i problemi dei fondamenti il 1900 e l'intervento al Congresso di Parigi. Ivi, nella

---

[1] Gli scritti fondazionali di Hilbert sono tutti tradotti nel volume *Richerche sui Fondamenti della Matematica* (a cura di M. V. Abrusci) citato in bibliografia.

[2] La grande opera di sintesi *Grundlagen der Mathematik* del 1934-1939 è opera soprattutto di Paul Bernays.

introduzione ai problemi, non meno importante degli stessi, sono presentati i temi che saranno oggetto di continua riflessione ed elaborazione negli anni seguenti.

- Il primo è l'interesse per le dimostrazioni. Parlando dei "requisiti generali che legittimamente vanno posti alla soluzione di un problema matematico", Hilbert osserva che la soluzione di un problema è data dalla dimostrazione della correttezza della soluzione proposta:

  > si deve riuscire a far vedere la correttezza della risposta mediante un numero finito di inferenze e precisamente in base a un numero finito di ipotesi che si trovano nella presentazione del problema e che ogni volta vanno formulate con esattezza. Questo requisito della deduzione logica mediante un numero finito di inferenze è nient'altro che il requisito del rigore nella conduzione della dimostrazione.
  > ([8], p. 149) [3].

  Hilbert sposta l'enfasi del rigore dalle definizioni, come era soprattutto stato nel secolo diciannovesimo, alle dimostrazioni. Nello stesso tempo, l'uso ripetuto di locuzioni come "maggiore rigore", o "metodi più rigorosi" testimonia che per Hilbert il requisito del rigore non è un tutto o niente, ma relativo allo sviluppo di una teoria.

- Un secondo tema è quello del metodo assiomatico, con l'affermazione della sua generalità e della sua identificazione con l'analisi concettuale matematica:

  > desidero confutare l'opinione secondo cui soltanto i concetti dell'analisi, o perfino soltanto quelli dell'aritmetica, sarebbero capaci di una trattazione pienamente rigorosa ... Una così unilaterale interpretazione del requisito del rigore conduce presto ad ignorare tutti i concetti provenienti dalla geometria, dalla meccanica e dalla fisica, a troncare l'afflusso di nuovo materiale dal mondo esterno, e infine come ultima conseguenza anche a respingere i concetti di continuo e di numero irrazionale. Ma che importante nervo vitale verrebbe reciso alla matematica, con l'estirpazione della geometria e della fisica matematica! Ritengo, al contrario, che dovunque emergano concetti matematici, da parte della gnoseologia oppure in geometria o nelle teorie della scienza naturale, sorge per la matematica il compito di indagare i principi che stanno alla base di questi concetti e di fissarli mediante un sistema di assiomi semplice e completo, in modo tale che la precisione

[3] I rimandi si riferiscono alle opere di Hilbert citate secondo l'anno nella bibliografia, e il numero delle pagine all'edizione italiana ivi citata delle sue ricerche sui fondamenti.

> dei nuovi concetti e la loro utilizzabilità nella deduzione non siano in alcun aspetto inferiori rispetto a quelle dei vecchi concetti aritmetici. ([8], p. 150).

Come si vede, Hilbert ha una concezione pluralista dell'assiomatica, compatibile con una visione della matematica aperta, anzi bisognosa degli influssi esterni, e sopratutto non riduzionista. Il riduzionismo alla teoria dei numeri avrà la sua ragion d'essere solo tecnicamente, ai fini della noncontraddittorietà.

- L'attenzione per il ruolo essenziale dei segni:

> Ai nuovi concetti spettano necessariamente anche nuovi segni: noi li scegliamo in modo che ci ricordino i fenomeni che avevano motivato la formazione dei nuovi concetti. Così, le figure geometriche sono segni per le immagini dell'intuizione spaziale... I segni aritmetici sono figure scritte e le figure geometriche sono formule disegnate... L'uso dei segni geometrici quale rigoroso strumento dimostrativo presuppone la precisa conoscenza e la totale padronanza degli assiomi che stanno alla base di quelle figure; quindi, perché queste figure siano incorporate nel tesoro generale dei segni matematici, è necessaria una rigorosa indagine assiomatica del loro contenuto intuitivo... nelle ricerche aritmetiche, così come nelle ricerche geometriche, noi non seguiamo in ogni momento la catena delle operazioni mentali fino agli assiomi; invece in aritmetica, né più né meno che in geometria, specialmente al primo impatto con un problema, ricorriamo a certe combinazioni rapide, inconsapevoli, non definitivamente sicure, fidandoci di una certa sensibilità aritmetica verso il modo di agire dei segni aritmetici, senza la quale progrediremmo nell'aritmetica altrettanto poco quanto senza l'immaginazione geometrica faremmo nella geometria. ([8], pp. 150–151).

La fecondità e la padronanza dei segni dipendono dall'analisi del loro significato intuitivo; ma una volta correttamente regolati, essi guidano l'intuizione.

- Al Congresso di Parigi Hilbert espone il suo famoso assioma della risolubilità di tutti i problemi, che sollevò polemiche e travisamenti. Non si tiene mai sufficientemente presente, nell'accusarlo di positivismo, che la sua formulazione tiene conto, o è suggerita, dalle dimostrazioni di impossibilità su cui Hilbert richiama l'attenzione.

> A volte capita che cerchiamo la risposta sotto ipotesi insufficienti ovvero in un senso sbagliato, e che quindi non raggiungiamo la meta.

> Sorge allora il compito di dimostrare l'impossibilità della soluzione del problema sotto le ipotesi date e nel senso voluto... dimostrazioni di impossibilità [assioma delle parallele, quadratura del cerchio, risoluzione delle equazioni di 5^0 grado] hanno trovato una soluzione pienamente soddisfacente e rigorosa anche se in un senso diverso da quello originariamente inteso ... Dagli esempi storici, oltre che da ragioni filosofiche, sorge in noi la convinzione che ogni problema matematico determinato debba essere necessariamente passibile di una rigorosa sistemazione, o riuscendo a dare la risposta alla questione posta oppure mostrando l'impossibilità di una sua soluzione. ([8], pp. 152–153).

- Infine nella introduzione al secondo problema viene posta la questione della non-contraddittorietà della teoria dei numeri [4].

  > Ma, soprattutto, fra le numerose questioni che possono essere poste intorno agli assiomi, desidero indicare come il problema più importante quello di *dimostrare che gli assiomi sono tra di loro non-contraddittori, cioè che in base ad essi non si può mai arrivare con un numero finito di inferenze logiche a risultati che siano in contraddizione tra di loro.* ([8], p. 156).

  La cura con cui Hilbert esplicita la definizione deduttiva della non-contraddittorietà nasconde un intrico di problemi.

2. Coerenza e completezza.

Il motivo dell'importanza del problema non è nella paura della contraddizione. La non-contraddittorietà di un sistema assiomatico era presente nell'agenda dei matematici in quel periodo. Hilbert ne aveva discusso l'anno prima con il logico Gottlob Frege, in una corrispondenza [5] che aveva preso lo spunto dai *Grundlagen der Geometrie.*

Frege era contrario al metodo assiomatico come metodo sufficiente per il fondamento di una teoria, in quanto gli assiomi non erano definizioni, nonostante l'uso diffuso di dizioni come quella di "definizioni implicite" (da parte di Poincaré ad esempio). Mancavano secondo Frege le condizioni necessarie di esistenza e unicità, per avere una definizione. Hilbert gli risponde di aver sempre

[4] Si intende "teoria dei numeri reali", o "analisi"; se non è specificato se si tratta di numeri naturali o reali, di solito lo si capisce dal contesto. "Coerenza" e "consistenza" sono anche sinonimi spesso usati di "non-contraddittorietà".

[5] Si veda lo scambio nella corrispondenza di Frege citata in bibliografia.

pensato il contrario di quello che pensa Frege, e cioè che non fosse l'esistenza garanzia di assenza di contraddizioni, ma invece che l'assenza di contraddizioni fosse garanzia dell'esistenza. E ripete nel 1900:

> Se si attribuiscono ad un concetto note caratteristiche [6] che si contraddicono tra di loro, allora io dico: il concetto matematicamente non esiste [esempio un numero reale il cui quadrato sia uguale a -1]... Se si riesce a dimostrare che le note caratteristiche attribuite ad un concetto non possono mai portare a contraddizione usando un numero finito di inferenze logiche, allora io dico che con ciò è stata dimostrata l'esistenza matematica del concetto. ([8], p. 157).

Ma Frege ribadisce, nel dicembre 1899, che l'unico modo che lui conosca per dimostrare la non-contradditorietà di un insieme di assiomi è grazie alla presentazione di un esempio. Hilbert sembra avere in mente (la necessità di) un altro metodo, come deve essere ovvio se la non-contraddittorietà deve implicare l'esistenza.

Nel 1899 Hilbert aveva formulato un sistema di assiomi per i numeri reali, in cui la proprietà di continuità era sostituita da due assiomi, il principio di Archimede e un *assioma di completezza* che asseriva che il sistema di enti soddisfacente agli altri assiomi non poteva essere esteso mantenendo tutte le stesse proprietà postulate [7]. Alla fine aveva osservato che:

> Per dimostrare la non contraddittorietà degli assiomi costituiti, occorre soltanto un'idonea modifica di noti metodi argomentativi. ([7], p. 143).

La frase, sibillina, è ripresa nel 1900:

> Sono convinto che si deve riuscire a trovare una dimostrazione della non-contraddittorietà degli assiomi aritmetici, se in considerazione dello scopo prefissato si rielaborano con precisione e si modificano in modo opportuno i noti metodi inferenziali della teoria dei numeri irrazionali, ([8], p. 157),

in un modo che fa almeno intuire a cosa pensasse Hilbert. Infatti, nello spiegare il senso dell'assiomatizzazione, Hilbert aveva osservato che secondo il suo spirito i numeri reali non dovevano essere concepiti secondo il metodo genetico, come sezioni di Dedekind o come successioni fondamentali, ma che piuttosto il continuo

---

[6] Terminologia di Frege per "assiomi".

[7] L'assioma non compare nei *Grundlagen* del 1899, ma prima nella traduzione francese del 1900 e quindi dalla seconda edizione tedesca del 1902 fino alla sesta, insieme all'aggiunta di Hilbert 1900 come appendice; nella settima è modificato nella forma definitiva V,2. Si veda Baldus [1].

> è un sistema di cose le cui relazioni reciproche sono regolate mediante gli assiomi fissati e per le quali sono veri tutti e soli quei fatti che possono essere ricavati dagli assiomi mediante un numero finito di inferenze logiche. Secondo la mia opinione, solo in questo senso il concetto del continuo può essere colto in modo rigorosamente logico. In effetti, mi pare che ciò corrisponda meglio di tutto a quanto ci è dato dall'esperienza e dall'intuizione. ([8], p. 157).

In seguito spiegherà quest'ultimo rilievo osservando che le sezioni possono servire a determinare singoli reali, ma

> il concetto di grandezza estensiva, come noi lo ricaviamo dalla nostra intuizione, è autonomo rispetto al concetto di numero, e corrisponde perciò bene all'intuizione la distinzione fondamentale tra numero e misura (o grandezza). ([11], p. 191).

Un sistema di assiomi, e quello per i reali in particolare, determina "un sistema di cose le cui relazioni reciproche sono regolate mediante gli assiomi fissati e per le quali sono veri tutti e soli quei fatti che possono essere ricavati dagli assiomi". La dipendenza del sistema di cose dalle deduzioni, che si ritrova nel principio che la non-contraddittorietà determina l'esistenza, comporta anche la necessità che il sistema di assiomi permetta di stabilire per ogni enunciato se esso deve valere o no per il sistema di cose, e quindi che per ogni enunciato o esso o la sua negazione siano deducibili dagli assiomi.

Si tratta della proprietà che sarà detta in logica della *completezza* di una teoria, ma che ora è più comunemente indicata con *Entscheidungsdefinitheit*, o capacità degli assiomi di decidere ogni questione. La proprietà della completezza deduttiva è una proprietà di massimalità, nel senso che ogni enunciato compatibile con gli assiomi deve già essere un teorema, altrimenti lo sarebbe la sua negazione, e l'enunciato stesso non sarebbe compatibile.

A Frege Hilbert aveva spiegato che man mano che si aggiungono note caratteristiche a un concetto, questo viene determinato sempre meglio; ma quando lo si è determinato in modo completo, allora più nessuna proprietà può essere aggiunta in modo consistente. E l'obiettivo dei *Grundlagen der Geometrie* era quello di determinare un insieme di assiomi completo e il più semplice possibile per la geometria.

La parola "completezza" è ora usata da Hilbert per la massimalità del sistema di cose, ma le due proprietà sono collegate [8]. Avendo posto la completezza

[8] Nella logica contemporanea in effetti alle teorie complete si associa in modo canonico una struttura modellata sulle informazioni dedotte dalla teoria. Può essere interessante che nella terminologia degli insiemisti del tempo *Mengentheorie* e *Mengenbereiche*

tra gli assiomi dei numeri reali, Hilbert pensa forse che la completezza deduttiva, la quale implica la consistenza, sia dimostrabile attraverso qualche proprietà matematica del campo dei numeri.

L'identificazione del modello con l'insieme delle informazioni deducibili dagli assiomi suggerisce una unicità dello stesso "sistema di cose", a meno di isomorfismi. Secondo Frege gli assiomi non soddisfano, come possibili definizioni, neanche la condizione di unicità. E Hilbert gli aveva risposto che non era un difetto, al contrario un vantaggio, oltre che essere inevitabile. Ma Hilbert come tutti i matematici del tempo pensava che i diversi modelli di una teoria assiomatica, o almeno di quelle interessanti della geometria e della teoria dei numeri, naturali e reali, si riconducessero l'uno all'altro con corrispondenze che trasportavano anche la verità di tutti gli enunciati. Essi pensavano in sostanza che le teorie fossero categoriche, come si è detto in seguito [9], cioè con un'unico modello, a meno di isomorfismi, e che questa proprietà coincidesse con la completezza deduttiva.

Una cosa è comunque certa, che Hilbert in questo momento non ha in mente una dimostrazione puramente logica della non-contraddittorietà della teoria dei numeri reali. Tuttavia continua a riflettere sul problema: secondo una testimonianza di Edmund Husserl [10], in occasione di una conferenza da lui tenuta nel 1901 presso la società matematica di Göttingen aveva discusso questo problema, Hilbert avrebbe osservato: "quando supponiamo che una proposizione sia decisa sulla base degli assiomi di un dominio, che cosa possiamo usare oltre agli assiomi? *Alles Logische. Was ist das?* Tutte le proposizioni che sono libere da ogni particolarità relativa a un campo di conoscenze, che sono indipendenti da ogni particolare assioma, da ogni contenuto di conoscenza [11]. Ma si apre uno spettro di possibilità. Il dominio logico algoritmico, quello dei numeri, della combinatorica, della teoria generale degli ordinali. Alla fin fine, la più generale teoria degli insiemi non è essa stessa pura logica?" La logica combinatoria basta a derivare lo *Scnittpunktsatz* dal teorema di Pascal (senza assioma di continuità); la logica dei numeri interviene quando si usa Archimede, e per usare l'assioma di completezza si deve fare ricorso alla teoria degli insiemi [12].

---

fossero usate interscambiabilmente.

[9] Al tempo di Hilbert, e ancora negli anni venti ([15], [3]), si usava la parola "completezza" per "categoricità"; la terminologia è stata precisata a opera di matematici americani, come Huntington e Wilson; si veda [20].

[10] Il filosofo già assistente di Weierstrass.

[11] Questa è ancora la definizione, di tipo qualitativo, a cui si faceva riferimento. La definizione semantica moderna di "verità logica" sarà data da Hilbert solo nel 1928, in [18] e in [15].

[12] Gli appunti di Husserl sono citati da [22], p. 85. Husserl aveva elaborato una

Secondo il biografo Otto Blumenthal [13], nel 1904 Hilbert si era convinto che senza una precisa e completa formalizzazione della logica non si sarebbe potuto affrontare l'argomento della non-contraddittorietà lungo le linee che allora era riuscito ad intravvedere. In verità la posizione di Hilbert, pur avendo fatto passi in avanti, non era questa, e sarà sempre più articolata e originale.

3. Heidelberg, 1904.

Al Congresso dei Matematici di Heidelberg, nel 1904, Hilbert propone una soluzione del tutto nuova per la dimostrazione di non-contraddittorietà. È noto che per la geometria è disponibile l'interpretazione nella teoria dei numeri reali, che dà una dimostrazione di non-contraddittorietà relativa; ma

> nella fondazione dell'aritmetica non sembra lecito il ricorso ad un'altra disciplina di base. ([9], p. 163).

Dopo aver ricordato vari tentativi (di Helmholtz, Christoffel, Frege, Dedekind, Cantor), Hilbert annuncia:

> Sono dell'opinione che si possono superare tutte queste difficoltà e che si può arrivare ad una fondazione rigorosa e del tutto soddisfacente del concetto di numero, e precisamente mediante un metodo che io chiamo *assiomatico*. ([9], p. 165).

Il metodo assiomatico, oltre a essere imprescindibile modo di presentazione e studio dei concetti matematici, offre ora anche nuove possibilità di fondazione [14]. Non si tratta solo di un'analisi o di una ricostruzione logica.

> È ben vero che l'aritmetica viene indicata come una parte della logica e che per lo più nella fondazione dell'aritmetica si presuppongono i tradizionali concetti basilari della logica. Solo con una considerazione più attenta ci accorgiamo che nell'esposizione tradizionale delle leggi della logica vengono già usati certi concetti basilari dell'aritmetica, per esempio il concetto di insieme, e in parte anche quello di numero. Così finiamo in una situazione assai critica, e perciò per evitare i paradossi è necessario uno sviluppo parzialmente simultaneo delle leggi della logica e dell'aritmetica. ([9], p. 165).

---

nozione di completezza simile a quella di Hilbert 1900, si veda [21].

[13] [2].

[14] "Un perfezionamento [del metodo] che ... ci porti a conseguire piena chiarezza sui principi del ragionamento nella matematica", [11], p. 193.

È vero che si possono trovare in Hilbert dichiarazioni più semplificate per l'uso della logica:

> Quando si ha a che fare con gli assiomi dei numeri interi e quando si ha a che fare con la fondazione della teoria degli insiemi, è chiaro che non è praticabile questa via di riconduzione ad un altro più particolare campo conoscitivo, poiché oltre alla logica non v'è proprio più alcun'altra disciplina alla quale si potrebbe far ricorso.
> Ma essendo l'indagine sulla non-contraddittorietà un compito inevitabile, allora appare necessario assiomatizzare la logica stessa e dimostrare che teoria dei numeri e teoria degli insiemi sono solo parti della logica [strada preparata dall'assiomatizzazione della logica di Russell], ([10], p. 185),

ma si possono far risalire queste affermazioni di tono logicista al periodo di studio del sistema di Russell; in generale Hilbert resterà fedele all'idea di una fondazione simultanea assiomatica, e anzi ne preciserà con cura la natura e l'esigenza.

Nel 1904 Hilbert presenta solo la traccia di un esempio per la sua costruzione simultanea di aritmetica e logica.

Considera segni che denominano *cose mentali*:

$$1 \quad e \quad =$$

sono le *cose semplici*, mentre le *cose* sono le combinazioni, e le combinazioni di combinazioni e così via (noi diremmo successioni finite) di questi segni. Ai fini della dimostrazione di non-contraddittorietà le cose saranno ripartite in due classi, la classe degli enti e quella dei non enti, in modo che ogni combinazione appartenga a una sola delle due. Ma la "classe degli enti" funge da parametro, e la definizione è posposta fino a quando non avrà una motivazione dipendente dalla teoria in esame.

Hilbert identifica quindi una combinazione a con l'enunciato che la combinazione appartiene alla classe degli enti, mentre scrive $\neg a$ per l'enunciato che a non vi appartiene.

Considera inoltre enunciati complessi, scrivendo A/B per "da A segue B", incluse le generalizzazioni del tipo: A *e* B/C *o* D. Li chiama enunciati condizionali, con ipotesi e tesi.

Le affermazioni universali o particolari sono rappresentate dalle scritture

$$A(x^{(0)})$$

per esprimere che A vale per almeno una sostituzione di una cosa a x, e

$$A(x^{(e)})$$

per esprimere che A vale per ogni sostituzione di cose a x; ma Hilbert avrà bisogno solo sempre del senso universale per cui userà la semplice x.

Considera anche una legge di composizione transitiva degli enunciati condizionali, quando la tesi del primo coincide con l'ipotesi di un secondo e si forma un condizionale con l'ipotesi del primo e la tesi del secondo, che è chiamata "conseguenza". Gli enunciati condizionali possono avere soltanto tesi, e quindi alcune delle conseguenze hanno soltanto tesi.

Gli assiomi (dell'uguaglianza) sono innanzi tutto

$$1.\quad x = x$$

$$2.\quad x = y \text{ e } w(x)/w(y)$$

dove $w(x)$ sta per una specie di combinazione, in cui è usata oltre alle cose semplici anche la x.

Ma si aggiungono altre cose semplici $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$ ed $\mathbf{f}'$ con gli assiomi

$$3.\quad \mathbf{f}(\mathbf{u}x) = \mathbf{u}(\mathbf{f}'x)$$

$$4.\quad \mathbf{f}(\mathbf{u}x) = \mathbf{f}(\mathbf{u}y)/\mathbf{u}x = \mathbf{u}y$$

$$5.\quad \neg(\mathbf{f}(\mathbf{u}x) = \mathbf{u}1)$$

in cui si riconoscono gli assiomi per un insieme infinito come quello dei numeri naturali, se si legge $\mathbf{u}x$ come "x è un elemento di $\mathbf{u}$", ed $\mathbf{f}$ è il successore.

Ci si domanda ora se certe conseguenze possano essere contraddittorie. Soltanto l'assioma 5 dà luogo a enunciati della forma $\neg a$, quindi gli enunciati che formano una contraddizione con 5 devono essere della forma

$$6.\quad \mathbf{f}(\mathbf{u}x(0)) = \mathbf{u}1$$

ma in nessun modo può risultare una tale conseguenza dagli assiomi 1. – 4.

Per vedere questo, chiamiamo equazione omogenea l'equazione $a = b$ se tanto a che b sono combinazioni qualsiasi di due cose semplici, oppure combinazioni di tre cose semplici, o di quattro cose semplici ...; la nozione di omogeneità è un invariante delle conseguenze degli assiomi 1. – 4.: da questi possono venire solo equazioni omogenee, mentre la 6. non è omogenea, per nessuna sostituzione di cose a x.

La desiderata partizione si ottiene allora mettendo nella classe degli enti tutte le conseguenze degli assiomi 1. – 4., e con questa interpretazione di $\neg$ non si avranno mai contraddizioni.

Secondo Hilbert si può procedere in modo simile se si aggiunge l'induzione; osserva che per la dimostrazione abbozzata occorrono il concetto di numero ordinale finito e taluni teoremi sul concetto di equinumerosità, che tuttavia possono essere stabiliti e derivati facilmente.

Non c'è invece ancora l'idea di sottoporre la logica stessa a indagine; si dice solo che per sviluppare l'analisi accennata si devono prendere in esame le altre regole logiche, "i noti modi inferenziali logici" quali la prova per casi o le leggi di De Morgan. La logica qui considerata appare grezza, per quel che riguarda le regole, come anche i quantificatori, e la stessa terminologia e notazione. D'altra parte, lo svolgimento completo della dimostrazione richiede un'induzione sulle dimostrazioni di ogni lunghezza, quindi

> si deve considerare la dimostrazione stessa come un costrutto matematico, cioè come un insieme finito i cui elementi sono connessi mediante enunciati. ([9], p. 174).

È questa la prima volta che la dimostrazione è considerata un oggetto matematico. Di qui a

> Spiegheremo ora ... come si formalizzano *le dimostrazioni matematiche* .... Una dimostrazione matematica è una figura e in quanto tale deve esserci presente intuitivamente ...
> Ma una dimostrazione formalizzata è, al pari di un segno numerico, un oggetto concreto e dominabile. ([13], pp. 251 e 253),

molta strada si farà per arrivare a giustificare questa intuizione con la formalizzazione.

4. Axiomatisches Denken, 1917.

Il lavoro di Hilbert del 1904 ebbe una grande risonanza, ma le reazioni furono per lo più critiche. Solo Julius König ne prese lo spunto per lavorare in questa direzione, con non grande profitto. La critica più seria, a cui Hilbert cercherà ripetutamente di dare una risposta, fu quella di Poincaré, che osservava come fosse un circolo vizioso dimostrare la non-contraddittorietà della teoria dei numeri, cioè dell'induzione, mediante un procedimento induttivo [15].

Due sono i temi della conferenza del 1917. Il primo è l'esaltazione e la precisazione del metodo assiomatico, secondo una visione non solo pluralista, ma locale e provvisoria – Feyerabend direbbe opportunistica.

Tutti i domini di conoscenza hanno – hanno avuto – dei punti di partenza che servono a unificare quelle intelaiature dei concetti che sono le teorie:

---

[15] Pieri nel 1906 invece dubitava che si potesse fare un'induzione sulle proposizioni, non potendosi sapere se fossero numerabili.

linearità dell'equazione del piano e trasformazione ortogonale delle coordinate di punti per la geometria; parallelogramma delle forze in statica; equazioni di Lagrange nella meccanica; equazioni di Maxwell, col postulato della rigidità e della carica dell'elettrone per l'elettrodinamica; la funzione energia e la definizione di temperatura e pressione come derivate delle sue variabili (entropia e volume) per la termodinamica; teorema di Kirkhoff per la teoria della radiazione; la legge degli errori di Gauss per la probabilità; le leggi del calcolo per l'aritmetica; la rappresentazione dell'elemento di arco della curva mediante la forma differenziale quadratica per la teoria delle superficie; il teorema dell'esistenza degli zeri nella teoria delle equazioni; il teorema sugli zeri della funzione zeta di Riemann in teoria dei numeri, e altri.

> Da un primo punto di vista, questi teoremi fondamentali possono essere ritenuti come gli assiomi dei singoli campi conoscitivi .... Il problema della fondazione dei singoli campi conoscitivi aveva trovato una soluzione; ma si trattava soltanto di una soluzione provvisoria. Infatti nei singoli campi conoscitivi, si è fatta sentire l'esigenza di fondare gli stessi teoremi fondamentali ritenuti come assiomi. Si è arrivati così alle "dimostrazioni" per la linearità dell'equazione del piano ...
> Ma, esaminando criticamente queste "dimostrazioni", ci si può rendere conto che esse in sé stesse non sono dimostrazioni bensì, in sostanza, esse rendono possibile soltanto la riconduzione a certi teoremi più profondi che, a loro volta, possono quindi essere riguardati come nuovi assiomi al posto dei teoremi da dimostrare. In questo modo sono sorti quelli che oggi vengono detti propriamente assiomi della geometria, dell'aritmetica, della statica, della meccanica, della teoria dell'irraggiamento e della termodinamica. Questi assiomi costituiscono un livello di analisi più profondo rispetto a quello delle proposizioni, prima menzionate, poste originariamente alla base dei singoli campi conoscitivi. Il procedimento del metodo assiomatico, qui esposto, equivale perciò ad un *approfondimento dei fondamenti* dei singoli campi conoscitivi, quale diviene necessario in ogni costruzione, man mano che la si sviluppa, la si innalza e ci si vuole tuttavia garantire della sua sicurezza. ([10], pp. 178–179).

Quasi con le stesse parole, nel 1922:

> Niente impedisce di prendere come assiomi [quando si vogliono scegliere il minor numero possibile di principi semplici, intuitivi e comprensibili] anche proposizioni dimostrabili, o di cui siamo persuasi che siano dimostrabili. Anzi, come mostra la storia, talvolta questo procedimento è persino più conveniente: ne sono esempi il postulato di Legendre sui numeri primi

> nella teoria dei resti quadratici, la congettura di Riemann sugli zeri di $\zeta(s)$, il teorema dell'esistenza di una radice in algebra ...
> Il metodo assiomatico è e rimane davvero lo strumento indispensabile, adeguato al nostro spirito, per ogni indagine esatta in qualunque campo; esso è logicamente incontestabile e allo stesso tempo è fecondo; garantisce inoltre all'indagine la più piena libertà di movimento. In questo senso, procedere assiomaticamente non è altro che pensare consapevolmente; mentre in precedenza, senza il metodo assiomatico, accadeva ingenuamente di credere a certe connessioni come a dei dogmi, l'assiomatica toglie via questa ingenuità lasciando però i vantaggi del credere. ([11], p. 193).

Perché

> Nella scelta, nella concezione e nell'uso degli assiomi e delle regole non vogliamo certo far riferimento alla buona fede e alla semplice fiducia. ([13], p. 253).

E ancora, a conferma del carattere non assoluto degli assiomi:

> Il concetto "dimostrabile" va inteso relativamente al sistema di assiomi su cui ci si basa. Questo relativismo è naturale e necessario; non ne scaturiscono danni, poiché il sistema di assiomi viene continuamente esteso. ([11], p. 204).

Al solito, una condizione necessaria è quella della non-contraddittorietà.

> Succede spesso di ritenere ovvia la non-contraddittorietà interna di una teoria, mentre in verità per dimostrarla sono necessari profondi sviluppi matematici, ([10], p. 182),

ad esempio, nella teoria della conduzione del calore, il postulato dell'equilibrio della temperatura richiede per la sua consistenza la dimostrazione della risolubilità di un problema al contorno. Nelle teorie fisiche un vincolo è il fatto che i nuovi assiomi devono conservare le leggi fisiche.

> È del tutto diverso quando compaiono contraddizioni nei campi conoscitivi puramente teorici, ([10], p. 183),

come la teoria dei numeri e la teoria degli insiemi. Non basta allora assiomatizzare la logica come nel pregevole lavoro di Russell. Occorrono risultati nuovi. Ma riflettendo, ci si accorge che

> La questione della non-contraddittorietà per i numeri naturali e per gli insiemi non è una questione isolata, ma appartiene a un grande ambito di questioni gnoseologiche fra le più difficili aventi tonalità specificamente

> matematiche .... Cito la questione della risolubilità in linea di principio di ogni problema matematico, la questione della controllabilità a posteriori del risultato di una ricerca matematica, e inoltre la questione relativa ad un criterio di semplicità per le dimostrazioni matematiche, la questione del rapporto tra *contenutismo* e *formalismo* in matematica e in logica, e infine la questione della decidibilità di un problema matematico mediante un numero finito di operazioni.
> Non possiamo considerarci soddisfatti dell'assiomatizzazione della logica, finché non siano state comprese e chiarite nel loro complesso tutte le questioni di questo genere ... ([10], p. 185).

Questo è il secondo argomento importante, e nuovo, l'indicazione di una serie di problemi da affrontare studiando esplicitamente la dimostrazione, al di là del problema della non-contraddittorietà.

Hilbert cita a questo proposito due esempi: il proprio teorema sul numero finito di invarianti razionali interi, discutendo la sua dimostrazione ("la prima che soddisfi pienamente alle nostre esigenze di semplicità e di chiarezza", p. 186), che non contiene però e da cui non si può ricavare un confine per il numero di invarianti; e le diverse dimostrazioni sul numero di falde reali delle superficie del quarto ordine, fino alla piena soluzione di Rohn.

> Queste particolari considerazioni mostrano come ad uno stesso problema possano applicarsi metodi dimostrativi di tipo diverso e vorrebbero far capire come sia necessario studiare in sé stessa la natura della dimostrazione matematica, se si vogliono chiarire con successo questioni quali quelle della decidibilità mediante un numero finito di operazioni ...
> Dobbiamo fare del concetto stesso di dimostrazione specificamente matematica un oggetto di indagine, ([10], pp. 187–188),

proprio come l'astronomo studia la sua posizione, il fisico la sua apparecchiatura, e il filosofo si interroga sulla ragione.

5. La metamatematica.

Hilbert incominciava a essere preoccupato di coloro che vogliono mutilare la matematica; i divieti gli appaiono altrettanto dannosi dei paradossi; e nel 1922 polemizza con Weyl e Brouwer, la cui proposta non è una rivoluzione, come pretende, ma la ripetizione di un tentativo di putsch.

Se il compito che resta da compiere è la prova della non-contraddittorietà dell'analisi, l'obiettivo è quello di mostrare che in matematica

> non ci devono essere verità di tipi in linea di principio diversi. Dunque – per prendere ad esempio proprio un lontano e difficile punto programmatico – deve essere possibile formulare il postulato di scelta di Zermelo in modo tale che esso sia valido nello stesso senso e con altrettanta affidabilità dell'asserzione aritmetica $2+2=4$.

In questa ottica, Hilbert riprende approfondendola la posizione del 1904.

> Come prerequisito per l'uso delle inferenze logiche e per il funzionamento delle operazioni logiche, ci deve essere dato già qualcosa nell'immaginazione: certi oggetti discreti extralogici, che esistono intuitivamente come esperienze immediate prima di ogni pensiero. Se il ragionamento logico deve essere sicuro, questi oggetti devono essere completamente dominabili in tutte le loro parti e, insieme con gli oggetti, la loro esibizione, la loro distinzione, il loro susseguirsi ci sono dati in modo immediatamente intuitivo come qualcosa che non è riconducibile ancora a qualcos'altro. Assumendo questa posizione, per me – in netta opposizione a Frege e Dedekind – gli oggetti della teoria dei numeri sono proprio i segni, la cui forma può essere da noi riconosciuta universalmente e sicuramente, indipendentemente dallo spazio e dal tempo e dalle condizioni particolari della costituzione del segno così come da insignificanti differenze nell'esecuzione ... "In principio c'è il segno", questo è il motto [in generale, per ogni tipo di pensiero]. ([11], pp. 195–196).

In modo ancora più esplicito aggiungerà un riferimento a Kant, sia pure con un altro tipo di intuizione primaria.

> Nel riconoscere che esistono tali precondizioni e che di esse si deve tener conto, noi ci troviamo d'accordo con i filosofi, in particolare con Kant. Già Kant aveva insegnato – e ciò costituisce una parte integrante della sua teoria – che la matematica dispone di un contenuto assicurato indipendentemente da ogni logica e quindi non può mai essere fondata mediante la sola logica .... Anzi, come precondizione per l'uso di inferenze logiche e per l'effettuazione di operazioni logiche, deve essere già dato qualcosa nella rappresentazione: certi oggetti concreti extra-logici, che esistono intuitivamente come qualcosa di immediato, prima di ogni pensiero. Se il ragionamento logico deve essere sicuro, questi oggetti devono lasciarsi pienamente dominare in tutte le loro parti; e, insieme agli oggetti, la loro esibizione, la loro distinzione, il loro susseguirsi, il loro essere l'uno accanto all'altro, deve essere dato intuitivamente come qualcosa che non si lascia ridurre ancora a qualcos'altro e che non richiede una riduzione. ([13], pp. 243–244).

Hilbert ripropone quindi una costruzione dell'aritmetica come manipolazione di segni.

5.1. *La formalizzazione.*

La costruzione dell'aritmetica parte dai segni 1 e +, che sono segni senza significato [16] e dalle loro successioni, che chiama segni numerici. Ma

> oltre a questi segni, usiamo anche altri segni, che invece significano qualcosa e che servono per la comunicazione, ([11], p. 196),

come = o < o abbreviazioni varie che comunicano asserzioni:

> quindi $2+3 = 3+2$ non è una formula ma serve solo per la comunicazione del fatto che $2+3$ e $3+2$ sono, tenuto conto delle abbreviazioni usate, lo stesso segno numerico, e cioè il segno $1+1+1+1+1$. ([11], pp. 196–197).

Per la comunicazione di fatti generali Hilbert usa **a** e **b** per segni numerici; affermazioni come $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$ allora hanno quella che Hilbert chiama verità contenutistica, *inhaltlich*, verità che può essere verificata con manipolazioni di segni, o pensieri su manipolazioni di segni; ma questi pensieri sono diversi ad esempio dal principio di induzione perché si basano semplicemente sulla composizione e scomposizione di un segno supposto dato [17].

> In una teoria dei numeri svolta in questo modo non ci sono assiomi e non ci possono in alcun modo essere contraddizioni. Come oggetti abbiamo sempre segni concreti, con essi operiamo e su di essi facciamo enunciati contenutistici ...
> Ma con questo modo non si può certamente ottenere l'intera matematica. Il procedimento viene meno già quando si passa al punto di vista dell'aritmetica e dell'algebra superiori, ad esempio, quando si vogliano ottenere asserzioni su infiniti numeri o funzioni ... non possiamo sviscerare l'essenza dell'analisi solo mediante quel tipo di comunicazioni contenutistiche ma dobbiamo usare piuttosto per la sua costruzione vere e proprie formule. Ma una posizione analoga la possiamo ottenere ponendoci a un livello superiore di trattazione, dal quale divengono oggetto di indagine contenutistica gli assiomi, le formule e le dimostrazioni della teoria matematica. A questo fine però, come prima cosa le consuete argomentazioni contenutistiche della teoria matematica devono venir riprodotte mediante formalismi;

[16] In seguito anche per evitare polemiche li chiamerà "cifre".

[17] Questa è la sostanza della risposta di Hilbert a Poincaré, elaborata in dettaglio ad esempio in [14], p. 279.

cioè deve essere eseguita una rigorosa formalizzazione delle teorie matematiche nella loro interezza, comprese le loro dimostrazioni, cosicché – secondo il modello del calcolo logico – le inferenze e i concetti matematici vengono inseriti nell'edificio della matematica come componenti formali. Gli assiomi, le formule e le dimostrazioni che costituiscono questo edificio formale sono precisamente ciò che erano i segni numerici nella costruzione prima tratteggiata della teoria elementare dei numeri; e soltanto con essi vengono svolte, così come con i segni numerici della teoria dei numeri, argomentazioni contenutistiche, cioè si esercita il pensiero vero e proprio. Con ciò le argomentazioni contenutistiche, che evidentemente non possono mai venir del tutto evitate né eliminate, vengono collocate in altro luogo, in un certo senso a un livello superiore; e contemporaneamente diventa possibile, nella matematica, una rigorosa e sistematica separazione tra formule e dimostrazioni formali da un lato e argomentazioni contenutistiche dall'altro. ([11], pp. 197–198).

A illustrare la sua idea presenta un sistema più moderno di quello del 1904, con formule scritte con variabili e quantificatori, continuando a chiamare segni per la comunicazione quelli che servono a indicare elementi formali.

Per raggiungere i nostri scopi dobbiamo rendere oggetti della nostra indagine le dimostrazioni in quanto tali; così, veniamo spinti verso una sorta di *teoria della dimostrazione* che tratta proprio dell'operare con le dimostrazioni stesse. Per la teoria concreta-intuitiva dei numeri, di cui ci siamo occupati prima, i numeri erano qualcosa di oggettivo ed esibibile, e le dimostrazioni dei teoremi intorno ai numeri rientravano già nel campo del pensiero. Nell'indagine che ora facciamo è proprio la dimostrazione un qualcosa di concreto e di esibibile; le argomentazioni contenutistiche si svolgono soltanto sulla dimostrazione. ([11], p. 204).

Un primo esempio è il seguente: Hilbert dimostra il

... teorema:
Il sistema di assiomi costituito dai cinque assiomi

1. $a = a$
3. $a = b \rightarrow a + 1 = b + 1$
4. $a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b$
5. $a = c \rightarrow (b = c \rightarrow a = b)$
6. $a + 1 \neq 1$

è non contraddittorio.

attraverso i

> Lemma. Una formula dimostrabile può contenere il segno $\rightarrow$ al massimo due volte.
>
> ...
>
> Lemma. Una formula $a = b$ è dimostrabile se e solo se a e b sono lo stesso segno. ([11], pp. 205–206).

La dimostrazione di quest'ultimo si svolge supponendo che sia data una dimostrazione di $a = b$ con a diverso da b; si considera il primo punto in cui occorre nella dimostrazione una simile equazione con i due membri diversi. Trattato, ed escluso, il caso banale degli assiomi, tale formula deve essere ottenuta per *modus ponens* da una precedente $S \rightarrow a = b$. S o è un assioma o è a sua volta derivata. I vari casi si escludono o perché ci sarebbe prima un'equazione con i due membri diversi, o perché ci sarebbe una formula con più di due implicazioni.

Questa è la prima dimostrazione della nuova teoria, tipica del tipo di argomentazioni che saranno svolte, in modo naturalmente più complicato, in teoria della dimostrazione.

Il sistema di logica è ora più complesso, e Hilbert si preoccupa in particolare del quantificatore esistenziale, che vede connesso al principio di scelta; egli formula uno speciale assioma *transfinito*

$$A(\tau A) \rightarrow A(a)$$

con un simbolo di funzione universale.

> Questo assioma dice, nel linguaggio comune, che se un predicato A vale dell'oggetto τA allora esso vale di tutti gli oggetti a .... Per visualizzarci il suo contenuto, prendiamo per A il predicato "essere corrotto": allora con τA dobbiamo intendere un determinato uomo che possegga un senso della giustizia talmente incrollabile che, se egli stesso dovesse risultare corrotto, allora tutti gli uomini devono essere senz'altro corrotti. ([11], p. 221).

Dall'assioma transfinito, con cui Hilbert pensava di aver mostrato il carattere logico del postulato di Zermelo, da cui il nome, seguono tutte le leggi classiche dei quantificatori. In seguito Hilbert utilizzerà un diverso simbolo di scelta ε con l'assioma transfinito $A(a) \rightarrow A(\varepsilon A)$, che sarà ancora adottato da Bourbaki.

In [12] è presentato il sistema definitivo di logica, anche con il segno di negazione, prima non usato nella sua generalità.

In [11] è invece per la prima volta posta con chiarezza la necessità della formalizzazione, ma in funzione strumentale, in vista della applicazione ad essa della teoria della dimostrazione.

> Emergono due principi.
>
> *Primo*: Tutto ciò che finora costituisce la matematica vera e propria viene adesso rigorosamente formalizzato, cosicché *la matematica propriamente detta* o la matematica in senso stretto diviene un complesso di formule dimostrabili [in cui compaiono anche i segni logici] .... Questo fatto corrisponde a una convinzione che ho sostenuto da lungo tempo, e cioè che, data la stretta connessione ed inseparabilità delle verità aritmetiche e di quelle logiche, è necessaria una costruzione simultanea dell'aritmetica e della logica formale.
>
> *Secondo*: A questa matematica vera e propria si aggiunge una matematica in un certo senso nuova, una *metamatematica* [18], che serve per dare sicurezza a quella proteggendola sia dal terrore di divieti non necessari che dal travaglio dei paradossi. In questa metamatematica, contrariamente ai modi puramente formali delle inferenze della matematica vera e propria, viene usato il ragionamento contenutistico, e precisamente per la dimostrazione della non-contraddittorietà degli assiomi.
> Perciò lo sviluppo della scienza matematica avviene in due modi che si alternano continuamente: il primo è il conseguimento di nuove "formule dimostrabili" dagli assiomi mediante un ragionamento formale, e il secondo l'introduzione di nuovi assiomi unitamente alla dimostrazione, mediante un ragionamento contenutistico, della loro non-contraddittorietà.
> ([11], p. 210).

Si noti peraltro che

> gli assiomi e le proposizioni dimostrabili, ossia le formule ottenute in questo interscambio, sono le *copie* [19] delle idee che costituiscono il comune procedimento della matematica ordinaria, ma non sono esse le verità in senso assoluto. Come verità assolute devono piuttosto venir considerati i risultati che si ottengono con la mia teoria della dimostrazione a proposito della dimostrabilità e della non-contraddittorietà di tali sistemi di formule.
> ([12], p. 217).

A Hilbert viene in mente una analogia, per spiegare il rapporto tra matematica contenutistica e matematica formale, quella degli elementi ideali.

---

[18] La parola "metamatematica" non è stata inventata da Hilbert; era diventata di uso comune, ma dispregiativo, a partire dal 1870 per indicare le discussioni originate dalle geometrie non euclidee e a più dimensioni, relative alla natura dello spazio, alla possibilità di esistenza di mondi, abitati, con tali geometrie, e simili. Hilbert dimostra una certa ironia forse nell'appropriarsi della parola.

[19] Corsivo nostro.

> Come nella teoria dei numeri complessi vengono aggiunti ai reali gli elementi immaginari, e come nella geometria vengono aggiunte alle figure reali le figure ideali, allo stesso modo nella mia teoria della dimostrazione agli assiomi finitari vengono aggiunti gli assiomi e le formule transfinite. E anche il movente di tale introduzione e il risultato del procedimento sono, nella mia teoria della dimostrazione, gli stessi che negli esempi sopra citati: infatti gli assiomi transfiniti sono aggiunti per semplificare e completare la teoria. ([12], p. 226).

Presto questa nuova idea sarà sviluppata fino ad essere più di una metafora. Hilbert penserà di ottenere in questo modo sia una giustificazione della sua metamatematica sia una spiegazione della natura e del ruolo dell'infinito nella matematica, infinito che è la fonte di tutti i problemi fondazionali. Nonostante il decisivo passo avanti degli assiomi di Zermelo, resta il fatto che

> se usiamo assiomi contenutistici come punti di partenza e come fondamenti per le dimostrazioni, allora la matematica perde con ciò il carattere della sicurezza assoluta, ([15], p. 293),

e

> l'operare astratto con estensioni e contenuti concettuali è risultato difettoso e insicuro, ([11], p. 195),

sicché non ci si può accontentare di una assiomatizzazione come quella di Zermelo.

5.2. *Il metodo degli elementi ideali.*

Il punto di partenza dell'articolo del 1925 è che

> non è ancora stato chiarito completamente il significato dell'"infinito" per la matematica. ([13], p. 234).

Nella realtà non c'è infinito, secondo Hilbert; la continuità fa pensare a una divisibilità infinita, ma le teorie atomiche e dei quanti contraddicono questa intuizione ingenua; l'infinità dell'universo è ora messa in dubbio da teorie cosmologiche; se anche la geometria euclidea non è contraddittoria, questo non vuol dire che essa abbia validità nella realtà.

> Abbiamo già visto prima che l'infinito non si può mai trovare nella realtà, quale che siano le esperienze, le osservazioni e le scienze a cui si fa appello. E il pensiero sulle cose dovrebbe essere tanto diverso da ciò che avviene con le cose, e svolgersi in maniera tanto diversa, tanto lontano dalla realtà

> tutta? Non è vero, piuttosto, che quando crediamo di aver riconosciuto la realtà dell'infinito in un qualche senso, abbiamo potuto essere indotti a ciò solo perché di fatto nella realtà incontriamo tanto spesso dimensioni tanto immense sia nel grande che nel piccolo? ([13], pp. 243–244).

Tuttavia,

> Potrebbe darsi che l'infinito occupi un posto ben giustificato nel nostro pensiero e che vi svolga il ruolo di concetto indispensabile. ([13], p. 237).

Già le formule aritmetiche con variabili contengono infiniti enunciati, come un'equazione dell'algebra.

> Ciò costituisce chiaramente la sua caratteristica essenziale, solo in virtù della quale essa può rappresentare la soluzione di un problema aritmetico e rende necessaria una vera e propria dimostrazione, mentre le singole equazioni numeriche ... possono essere verificate semplicemente mediante il calcolo. ([13], pp. 237–238).

Ora Weierstrass ha eliminato infinitesimi ed infiniti dall'analisi, ma sono restate le successioni infinite e anche il sistema completo dei numeri, a cui si applicano le leggi logiche come il *tertium non datur*; bisogna completare il lavoro di Weierstrass mostrando che l'infinito, che pure è necessario, è solo un modo di dire.

Qui Hilbert inserisce la sua idea, già espressa nel 1922, del pensiero contenutistico, che ora chiama anche "finitario", sui segni come precondizione del pensiero, e sulla costruzione della aritmetica elementare. Ma al di là della matematica iniziale contenutistica, usiamo forme di comunicazione che oltrepassano le considerazioni intuitive. Se si dice che esiste un numero primo maggiore di un primo p dato,

> sebbene questa contenutisticamente sia un'asserzione molto più debole [di quella euclidea che afferma che esiste un primo tra p e $p! + 1$] e sebbene il passaggio sembri del tutto innocuo, tuttavia è un salto nel transfinito se questo enunciato, isolato dal suo contesto, viene espresso come un'autonoma asserzione ...
> In generale, dal punto di vista finitario, un enunciato esistenziale della forma "esiste un numero con una certa proprietà" ha senso solo come enunciato parziale, cioè come parte di un enunciato meglio determinato il cui esatto contenuto è però inessenziale per molte applicazioni.
> ([13], p. 245–256).

Si tratta di una sorta di disgiunzione infinita. Alla stessa situazione si arriva quando si nega un enunciato universale. L'enunciato "se **a** è un segno numerico, deve essere sempre $\mathbf{a} + 1 = 1 + \mathbf{a}$", ha un contenuto di comunicazione, ed è "un giudizio ipotetico che asserisce qualcosa per il caso in cui sia dato un segno numerico" **a**. Negandolo in una affermazione esistenziale lo trattiamo "come una combinazione mediante "e" di infinite equazioni numeriche".

> Da ciò segue in particolare che, nel senso dell'atteggiamento finitario, non possiamo usare l'alternativa secondo cui un'equazione come la precedente, in cui compare un segno numerico indeterminato, o è soddisfatta per ogni segno numerico oppure può essere refutata con un controesempio. Infatti, questa alternativa, in quanto applicazione del principio del terzo escluso, si basa essenzialmente sull'ipotesi che l'asserzione della validità universale di quell'equazione sia suscettibile di negazione.
> Ad ogni modo, constatiamo questo: se restiamo, come noi dobbiamo restare, nell'ambito degli enunciati finitari, vi regnano rapporti logici assai poco dominabili, e questa loro non dominabilità diventa insopportabile quando "tutti" ed "esiste" compaiono in proposizioni nidificate. Comunque, non valgono quelle leggi logiche che gli uomini hanno sempre adoperato da quando hanno incominciato a pensare, e che proprio Aristotele ci ha insegnato. Potremmo ora cercare di fissare le leggi logiche che valgono per il dominio delle asserzioni finitarie; ma ciò non ci servirebbe, poiché noi non vogliamo rinunciare all'uso delle semplici leggi della logica aristotelica, e nessuno, neppure se parlasse la lingua degli angeli, tratterrà gli uomini dal negare asserzioni universali, dal formare giudizi parziali e dall'adoperare il *tertium non datur*. Come dobbiamo comportarci ora?
> Ricordiamoci che siamo matematici e che, in quanto tali, ci siamo trovati spesso in una simile situazione precaria dalla quale siamo usciti con il geniale metodo degli elementi ideali. ([13], p. 247).

La matematica ha già avuto esperienze del genere con l'infinito.

> Gli elementi ideali "all'infinito" [nella geometria] hanno il vantaggio di rendere il più possibile semplice e chiaro il sistema delle leggi di collegamento. ([13], p. 238).

Lo stesso metodo si è usato per gli immaginari e per i numeri ideali. Hilbert si propone di usarlo anche in questo caso, e

> mediante il metodo importante e fecondo degli elementi ideali, veniamo a conoscere un'interpretazione affatto peculiare e una comprensione radicale del concetto di infinito. ([13], p. 238).

Dunque:

> Anche qui agli enunciati finitari dobbiamo aggiungere gli enunciati ideali per conservare le semplici regole formali dell'usuale logica aristotelica ... Ma come ottenere gli enunciati ideali? È un fatto notevole, e comunque vantaggioso e promettente, che per procedere su questa via ci occorra proseguire semplicemente, in una maniera naturale e conseguente, gli sviluppi già compiuti dalla teoria dei fondamenti della matematica. In effetti, teniamo presente che già la matematica elementare va al di là del punto di vista della teoria intuitiva dei numeri. Il metodo del calcolo letterale algebrico non è compreso infatti nella teoria intuitiva-contenutistica dei numeri come noi l'abbiamo costruita finora. In questa, le formule sono state adoperate sempre soltanto per la comunicazione: le lettere significavano segni numerici e con un'equazione veniva comunicata la coincidenza di due segni. Invece, nell'algebra consideriamo le espressioni letterali in sé stesse come costrutti autonomi e con esse vengono formalizzati i teoremi contenutistici della teoria dei numeri. Al posto degli enunciati sui segni numerici si hanno formule che sono a loro volta oggetti concreti di una teoria intuitiva; e al posto di una dimostrazione contenutistica sui numeri subentra la derivazione di una formula da un'altra formula secondo certe regole.
>
> Dunque, come viene mostrato già dall'algebra, si ha un aumento di oggetti finitari ... [al posto di $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$ si prende $a+b = b+a$], che non è più la comunicazione immediata di un qualcosa di contenutistico ma è un certo costrutto formale [la cui relazione con i precedenti è che se sostituiamo le variabili con segni numerici con un semplice processo dimostrativo otteniamo i singoli enunciati finitari]. Arriviamo quindi alla concezione secondo la quale $a, b, +, =$ come pure l'intera formula $a + b = b + a$ in sé non significano niente, esattamente come i segni numerici; ma dalla formula se ne possono ottenere altre alle quali assegniamo un significato, e precisamente concependole come comunicazioni di enunciati finitari. Generalizzando questa concezione, la matematica diviene un patrimonio di formule: in primo luogo, formule cui corrispondono comunicazioni contenutistiche di enunciati finitari, e in secondo luogo altre formule che non significano niente e che sono *i costrutti ideali della nostra teoria.* ([13], pp. 247–249).

In queste formule non ci sono solo i tradizionali segni matematici, ma anche i simboli logici, trattati alla stessa stregua di quelli. Questo suggerisce a Hilbert una riflessione sul senso di usare la logica non per la comunicazione ma come oggetto formale a cui si applica la metamatematica. Essa costituisce la più chiara e consapevole presentazione delle ragioni di avere e studiare una "logica matematica".

Dopo gli enunciati elementari e quelli già più problematici dell'algebra

> abbiamo introdotto ora gli enunciati ideali che devono servire affinché valgano di nuovo in generale le consuete leggi della logica. Ma poiché gli enunciati ideali, cioè le formule, nella misura in cui non esprimono asserzioni finitarie, non significano niente, allora su di essi non possono essere applicate contenutisticamente le operazioni logiche come sugli enunciati finitari. È dunque necessario formalizzare le operazioni logiche e anche le dimostrazioni matematiche stesse; ciò richiede che le relazioni logiche siano tradotte in formule, sicché oltre ai segni matematici dobbiamo introdurre anche segni logici come
>
> $$\wedge\ ,\ \vee\ ,\ \rightarrow\ ,\ \neg$$
>
> e , o , implica , non
>
> e oltre alle variabili matematiche $a, b, c, \ldots$ dobbiamo usare anche variabili logiche, cioè enunciati variabili $A, B, C, \ldots$
>
> Come può avvenire ciò? Ci viene incontro ora, per nostra fortuna, quell'armonia prestabilita che tanto spesso osserviamo nello sviluppo storico della scienza, che venne in aiuto di Einstein quando egli per la sua teoria della gravitazione trovò già completamente sviluppato il calcolo generale degli invarianti; noi incontriamo il *calcolo logico* come un progredito lavoro preparatorio. Certamente questo in origine fu creato sotto tutt'altri punti di vista ed è perciò che anche i segni del calcolo logico furono introdotti originariamente solo per la comunicazione; tuttavia, è coerente negare adesso ogni significato anche ai segni logici, come già ai segni matematici, e dichiarare che anche le formule del calcolo logico in se stesse non significano niente ma sono enunciati ideali.
>
> Con il calcolo logico possediamo un linguaggio segnico, che permette di tradurre in formule i teoremi matematici e di esprimere il ragionamento logico mediante processi formali. In perfetta analogia con il passaggio dalla teoria contenutistica dei numeri all'algebra formale, noi consideriamo ora i segni e i simboli di operazioni del calcolo logico astraendo dal loro significato contenutistico. Con ciò infine, invece della scienza matematica contenutistica che viene comunicata con il linguaggio ordinario, otteniamo un patrimonio di formule che contengono segni matematici e logici che si susseguono secondo determinate regole. Agli assiomi matematici corrispondono alcune formule; al ragionamento contenutistico corrispondono le regole secondo cui si susseguono le formule: il ragionamento contenutistico viene rimpiazzato da un operare esterno secondo regole e con ciò

viene compiuto il passaggio rigoroso da una trattazione ingenua ad una trattazione formale, sia per gli assiomi stessi (che pure in origine erano ingenuamente intesi essere delle verità fondamentali, ma che già da lungo tempo sono considerati nell'assiomatica moderna come mere connessioni di concetti) sia anche per il calcolo logico (che originariamente doveva essere soltanto un altro linguaggio). ([13], pp. 249–251).

La logica si era perfezionata in quegli anni, sia come formalismo sia come risultati, con i contributi di Weyl e Skolem ad esempio. Il sistema che presenta Hilbert incorpora il simbolo di scelta ed è costituito dai seguenti assiomi [20]:

I. *Assiomi dell'implicazione*

$$A \to (B \to A)$$
$$(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

II. *Assiomi della negazione*

$$(A \to (B \wedge \neg B)) \to \neg A$$
$$\neg\neg A \to A$$

III. *Assioma transfinito*

$$A(a) \to A(\varepsilon A)$$

da cui seguono

$$(a)A(a) \to A(b)$$
$$\neg(a)A(a) \to (Ea)\neg A(a)$$
$$\neg(Ea)A(a) \to (a)\neg A(a)$$

IV. *Assiomi dell'identità*

$$a = a$$
$$a = b \to (A(a) \to A(b))$$

V. *Assiomi del numero*

$$a + 1 \neq 0$$

Assioma dell'induzione completa.

Questo è il sistema che la scuola di Hilbert usa per formalizzare le dimostrazioni matematiche ed applicare ad esse la teoria della dimostrazione. Ma nel contesto

---

[20] Oltre alle regole del *modus ponens* e di sostituzione.

del metodo degli elementi ideali, appare naturale un'altra giustificazione e un altro senso della dimostrazione di non-contraddittorietà.

> Ma nella gioia suscitata, in generale dal successo, e in particolare dall'aver trovato già pronto senza sforzo alcuno da parte nostra uno strumento indispensabile come il calcolo logico, non dobbiamo dimenticare qual'è la condizione essenziale del nostro lavoro. C'è infatti una condizione, una sola ma assolutamente necessaria, alla quale è collegato l'uso del metodo degli elementi ideali, e questa è la dimostrazione della non-contraddittorietà. L'estensione mediante aggiunta di ideali è infatti ammissibile solo se con essi non sorgono contraddizioni nel precedente e più ristretto dominio, se dunque sono sempre valide nel precedente dominio le relazioni che risultano per i precedenti costrutti quando si eliminano i costrutti ideali.
> ([13], p. 252–253).

Bisogna in sostanza dimostrare che si ha una *estensione conservativa*; nel caso specifico, non si debbono poter dimostrare nuove relazioni elementari, come $0 = 1$ o $1 \neq 1$, e però in tal modo si ha anche la non-contraddittorietà come conseguenza della conservatività.
La non-contraddittorietà è d'altra parte condizione sufficiente per la accettazione della introduzione di elementi ideali. Una volta che si sia sicuri di non correre pericoli, non si può rifiutare l'estensione per motivi speciosi, come si cercò di fare con i complessi.

> No: se deve avere un senso al di là della dimostrazione di coerenza il problema della giustificazione di un espediente, allora tale giustificazione non può consistere che nell'accertare se l'espediente è accompagnato da un adeguato successo. In effetti, il successo è essenziale: anche in matematica, esso è l'istanza suprema alla quale tutti si piegano. ([13], p. 245).

Tutti i problemi fondazionali in genere dovranno essere sottoposti a questo tribunale della teoria della dimostrazione, le posizioni intuizioniste ad esempio, in generale sottraendoli alla filosofia e trasformandoli in problemi matematici. Ma

> Il banco di prova definitivo per ogni nuova teoria è il suo successo in questioni ad essa preesistenti per la cui soluzione essa non era stata creata .... Anche per le teorie vale che "dai loro frutti si riconosceranno".
> ([13], p. 254).

Nello stesso lavoro Hilbert affronta la questione del continuo, pensando di poter dimostrare l'ipotesi di Cantor [21].

[21] La sua idea era quella di enumerare le definizioni dei numeri reali, e *a posteriori*

Ma un problema che gli stava più a cuore era sempre quello della risolubilità di ogni problema - assioma a cui continua a credere, visti i ripetuti riferimenti, l'affermazione che non esiste l'*ignorabimus*, il *Wir müssen wissen, wir werden wissen.*

> Ora la mia teoria della dimostrazione non potrà certo indicare in generale una via lungo la quale ogni problema matematico si lasci risolvere: una tale via neanche esiste. Tuttavia rientra interamente nell'ambito della nostra teoria la dimostrazione che è non-contraddittoria l'ipotesi della risolubilità di ogni problema matematico. ([13], p. 254).

L'affermazione appare oscura, senza ulteriori commenti, e per capirla dobbiamo tornare, come torna Hilbert, al fatale problema della completezza.

6. Da Hilbert a Gödel.

Se il carattere strumentale della formalizzazione, in funzione dello studio metamatematico delle teorie, è evidente e più volte ribadito, è anche vero che qualche volta Hilbert si lascia prendere dall'entusiasmo per la teoria che ha creato, sull'onda dei suoi successi. Soprattutto nelle polemiche contro Brouwer e gli intuizionisti è portato ad accentuare il ruolo del formale. A Brouwer che aveva espresso giudizi sprezzanti sul "gioco di formule" ([10], p. 283), Hilbert ribatte che

> questo gioco di formule si svolge secondo regole determinate, nelle quali si esprime la tecnica del nostro pensiero. ([14], p. 283).

Il metodo degli elementi ideali sembra talvolta inserire a pieno diritto la parte formale nella matematica; o almeno giustifica una matematica arricchita da larghe parti non interpretabili ma ormai essenziali.

> Questo gioco di formule permette di esprimere unitariamente tutto il contenuto concettuale della scienza matematica e di svilupparlo in maniera tale da rendere chiare le interconnessioni dei singoli teoremi e dei singoli risultati. Non è per niente ragionevole stabilire in generale la richiesta che ogni singola formula sia interpretabile per se stessa; corrisponde invece alla natura di una teoria il fatto che all'interno del suo sviluppo non si abbia bisogno di ricorrere all'intuizione o al significato. Il fisico richiede da una teoria proprio che i teoremi particolari vengano derivati dalle leggi di natura o dalle ipotesi soltanto mediante inferenze e senza invocare ulteriori

è stata considerata una anticipazione, sia pure molto grezza, del metodo con cui Gödel darà una dimostrazione di consistenza.

> condizioni .... Soltanto certe combinazioni e certe conseguenze delle leggi fisiche possono venir controllate mediante l'esperimento – e allo stesso modo nella mia teoria della dimostrazione soltanto gli enunciati reali sono immediatamente suscettibili di verifica. Il pregio delle dimostrazioni puramente esistenziali sta proprio nel fatto che con esse si elimina la costruzione particolare e si riassumono con un'idea basilare più costruzioni diverse, cosicché emerge soltanto quel che è essenziale per la dimostrazione. Brevità ed economia di pensiero sono la ragion d'essere delle dimostrazioni esistenziali. I teoremi puramente esistenziali sono stati realmente le più importanti pietre miliari nello sviluppo storico della nostra scienza.
> ([14], pp. 282–283).

Hilbert parla come se il suo programma avesse avuto successo, perché i successi parziali non erano mancati. Ackermann aveva dimostrato l'eliminabilità dell'operatore di scelta dalle dimostrazioni delle formule numeriche, da cui seguiva la non-contraddittorietà della aritmetica senza induzione, ovvero con l'induzione ristretta a formule senza quantificatori. Von Neumann aveva fatto vedere che l'assioma di induzione seguiva dall'assioma transfinito applicato a variabili di ordine superiore, con un assioma di estensionalità aggiuntivo; il risultato finale non sembrava lontano, e Hilbert espone questi problemi al congresso di Bologna del 1928.

> Finora non sono stati ancora risolti i seguenti problemi.
>
> *Problema I*
>
> La dimostrazione della non-contraddittorietà, per la variabile funtoriale f, dell'assioma dell'ε. Abbiamo la strategia di una dimostrazione. Ackermann ... ([15], p. 294).

Il secondo problema è la generalizzazione del primo a variabili di ordine superiore.

> *Problema III*
>
> È ben vero che in generale si asserisce la completezza sia del sistema d'assiomi per la teoria dei numeri sia di quello per l'analisi; ma l'usuale argomentazione con cui si mostra che ogni due realizzazioni del sistema di assiomi della teoria dei numeri (risp. dell'analisi) devono essere isomorfe non soddisfa ai requisiti dei rigore finitario.
>
> Ciò che si deve fare – e innanzi tutto per la teoria dei numeri il cui dominio si lascia delimitare con precisione – è trasformare finitariamente la consueta dimostrazione di isomorfia, in modo che per questa via si dimostri quanto segue:

Se per una proposizione S può venir dimostrata la consistenza con gli assiomi della teoria dei numeri, allora la non-contraddittorietà con quegli assiomi non può venir dimostrata anche per $\neg S$ (il suo opposto). E, in stretta connessione con ciò, anche: se un enunciato è non-contraddittorio, allora è anche dimostrabile.
In ambiti superiori, sarebbe pensabile il caso della consistenza tanto di S che di $\neg S$; in tal caso, l'assunzione come assioma di uno dei due enunciati S e $\neg S$ va giustificata attraverso vantaggi di sistematicità ...
È evidente che anche puri problemi logici rientrano nell'ambito della teoria della dimostrazione che ho schizzato sopra. Come esempio serva il seguente problema.

Problema IV

L'asserzione della completezza della teoria dei numeri può essere espressa anche nel seguente modo: se agli assiomi della teoria dei numeri viene aggiunta una formula appartenente alla teoria dei numeri ma non dimostrabile, allora dal sistema di assiomi esteso può essere derivata una contraddizione.
Poiché qui, nella teoria della dimostrazione, abbiamo a che fare sempre con dimostrazioni formalizzate, nelle asserzioni fatte sulla completezza della teoria dei numeri è inclusa contemporaneamente l'asserzione che le regole formalizzate del ragionamento logico sono comunque sufficienti nell'ambito della teoria dei numeri.
La questione della completezza del sistema delle regole logiche, posta in forma generale, costituisce un problema della logica teorica. A questa più generale impostazione del problema arriviamo, partendo dalla teoria dei numeri, eliminando dal dominio delle formule considerate (e in particolare dagli assiomi) tutte quelle in cui occorre il segno "$+1$" e ammettendo invece la presenza di variabili predicative. Praticamente ciò significa che prescindiamo dall'ordinamento caratteristico del sistema dei numeri e che trattiamo tale sistema solo come un qualsiasi sistema di cose a cui possono essere riferiti predicati con uno o più soggetti. Fra questi predicati, soltanto l'uguaglianza viene fissata come una relazione determinata ... mentre gli altri predicati possono venir scelti liberamente.
In questo dominio di formule sono contraddistinte quelle che non sono refutabili mediante alcuna determinazione specifica dei predicati che possono venir scelti. Queste formule rappresentano i teoremi logici universalmente validi. Sorge ora la questione se tutte queste formule sono dimostrabili a partire dalle regole del ragionamento logico con l'aggiunta degli assiomi dell'identità citati, o, in altre parole, se il sistema delle usuali regole logiche è completo.

> Finora, mediante tentativi e prove, abbiamo raggiunto la convinzione che tali regole sono sufficienti. Una reale dimostrazione è disponibile soltanto nell'ambito della pura logica degli enunciati [e dei predicati monadici]. ([15], p. 298–299).

Il terzo problema ci riporta alla completezza della teoria dei numeri, alla sua identificazione con la categoricità, e conferma che la consistenza non era l'unico problema dell'assiomatica che Hilbert riteneva si dovesse risolvere. Il quarto problema, con la richiesta della dimostrazione della completezza delle regole logiche, ha il merito di fissare definitivamente in modo chiaro la distinzione tra semantica e regole sintattiche. Questa, del tutto assente in Frege e Russell, era oscurata, nel lavoro svolto da altri logici come Löwenheim, Skolem, Behmann, dal fatto che questi cercavano soprattutto direttamente un metodo di decisione per la logica, o per classi di formule [22].
Il quarto problema fu risolto positivamente l'anno successivo da Gödel nella sua tesi di laurea; una soluzione che però solleva dubbi e sconcerto; nella introduzione alla tesi, poi eliminata, Gödel aveva inserito le seguenti riflessioni.

> Qui "completezza" significa che ogni formula valida esprimibile nel calcolo funzionale ristretto, (Löwenheim direbbe una *Zählaussage*) [23] può essere derivata dal calcolo per mezzo di una successione finita di inferenze formali. Questa asserzione si vede subito che è equivalente alla seguente: Ogni sistema di assiomi coerente costituito solo da *Zählaussagen* ha una realizzazione. ("Coerente" significa che nessuna contraddizione può essere derivata per mezzo di un numero finito di inferenze formali.) Quest'ultima formulazione sembra avere un certo interesse in sé, perché la soluzione di questo problema rappresenta in un certo senso un completamento teoretico dell'usuale metodo per dimostrare l'esistenza (solo, naturalmente, per lo speciale tipo di sistemi di assiomi qui considerato). ([6]).

E tuttavia, continua a rimuginare Gödel, identificare consistenza ed esistenza, o far dipendere la seconda solo da vincoli di consistenza, sembra presupporre

> l'assioma che ogni problema matematico è risolvibile. O, in modo più preciso, presuppone che di nessun problema noi possiamo dimostrare che è insolubile. ([6]).

La spiegazione che dà di questa affermazione che ripete quella analoga di Hilbert è la seguente. Se si potesse dimostrare che un problema è insolubile, allora in particolare si sarebbe provato che né la risposta positiva né la risposta

---

22. Si veda [20] per la storia del teorema di completezza.

23 Logica del primo ordine, o calcolo dei predicati.

negativa sono derivabili dagli assiomi; allora entrambe le risposte sarebbero consistenti con la teoria, ed esisterebbero due modelli tra loro non isomorfi, al contrario di quello che si può provare per la teoria.
Gödel come si è detto eliminò queste considerazioni dalla introduzione della sua tesi; ma è significativo che pensasse anche lui alla completezza delle teorie di riferimento (ovviamente la teoria dei numeri tra queste). Ancora più curioso il fatto che nello stesso anno egli decise di affrontare il problema della completezza dell'aritmetica, ma partendo con un'ipotesi positiva, che solo nel corso del lavoro si trasformò nella dimostrazione del suo epocale primo teorema di incompletezza. Apposta lo chiamiamo epocale, perché come si vede chiude con una risposta definitiva la riflessione iniziata da Hilbert trenta anni prima.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Baldus, *Zur Axiomatik der Geometrie 1: Über Hilberts Vollständigkeitsaxiom,* Math. Ann., 100 (1928), pp. 321–333.

[2] O. Blumenthal, *Lebensgeschichte,* in Hilbert, 1935, pp. 388–429.

[3] F. Enriques, *Per la storia della logica,* Zanichelli, Bologna, 1922.

[4] G. Frege, *Alle origini della nuova logica,* Boringhieri, Torino, 1983.

[5] K. Gödel, *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls,* tesi, in Gödel, 1986, pp. 60–100.

[6] K. Gödel, *Collected Works,* vol. I, Oxford University Press, Oxford, 1986.

[7] D. Hilbert, *Über den Zahlbegriff,* 1899.

[8] D. Hilbert, *Mathematische Probleme,* 1900.

[9] D. Hilbert, *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik,* 1904.

[10] D. Hilbert, *Axiomatisches Denken,* 1917.

[11] D. Hilbert, *Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung,* 1922.

[12] D. Hilbert, *Die logischen Grundlagen der Mathematik,* 1922b.

[13] D. Hilbert, *Über das Unendliche,* 1925.

[14] D. Hilbert, *Die Grundlagen der Mathematik,* 1927.

[15] D. Hilbert, *Probleme der Grundlagen der Mathematik,* 1928.

[16] D. Hilbert, *Gesammelte Anhandlungen. Dritter Band,* Springer, Berlin, 1935.

[17] D. Hilbert, *Ricerche sui Fondamenti della Matematica,* a cura di M. V. Abrusci, Bibliopolis, Napoli, 1985.

[18] D. Hilbert - W. Ackermann, *Grundzügen der theoretischen Logik,* Springer, Berlin, 1928.

[19] J. Hintikka, *From Dedekind to Gödel,* Kluwer, Dordrecht, 1995.

[20] G. Lolli, *Completeness,* AILA Preprints, Milano, 1995.

[21] C. Ortiz Hill, *Husserl and Hilbert on Completeness,* in Hintikka, 1995, pp. 143–163.

[22] J.C. Webb, *Mechanism, Mentalism, and Metamathematics,* Reidel, Dordrecht, 1980.

Gabriele Lolli,
Dipartimento di Informatica,
Corso Svizzera 185,
10149 Torino (Italy)
e-mail: lolli@dm.unito.it