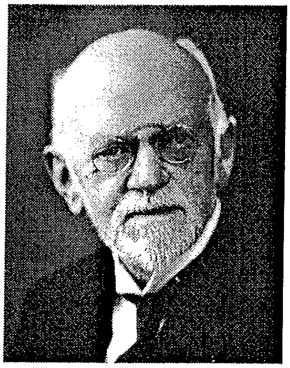

HILBERT E I FONDAMENTI DELLA MATEMATICA: IL METODO ASSIOMATICO

V. Michele Abrusci

IL PENSIERO DI DAVIDE HILBERT

A CENTO ANNI DAI "GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE" E DAL CONGRESSO INTERNAZIONALE DI PARIGI

Università degli Studi di Catania – Dipartimento di Matematica – Catania 23-25 settembre 1999

LE MATEMATICHE
Vol. LV (2000) – Supplemento n. 1, pp. 127–142

HILBERT E I FONDAMENTI DELLA MATEMATICA: IL METODO ASSIOMATICO

V. MICHELE ABRUSCI

1. Introduzione.

Il ruolo esercitato da David Hilbert nel campo dei fondamenti della matematica è insigne.

In breve, ad Hilbert dobbiamo alcune originali contributi in questo campo:

1. la più organica e profonda riflessione sulle caratteristiche del *metodo assiomatico*, alla luce degli sviluppi della matematica nel secolo XIX;
2. la proposta di una *fondazione (giustificazione)* di tutta la matematica mediante quella parte della matematica che non ha bisogno di fondazione, di giustificazione, ossia la proposta di una *autofondazione della matematica*;
3. una riflessione consona alla pratica matematica sul rapporto tra *finito e infinito* in matematica, e l'idea che la matematica finita è la matematica che non ha bisogno di giustificazione, di fondazione, e che deve provvedere alla fondazione di tutta la matematica;
4. la proposta di una *teoria matematica della dimostrazione*, sulla base della consapevolezza che le dimostrazioni sono oggetti matematici;
5. la individuazione di interessanti tecniche in teoria della dimostrazione, per raggiungere entro tale teoria il fine della giustificazione dell'intera matematica mediante la matematica finita.

Il programma hilbertiano di fondazione della matematica, come è noto, consiste nella assiomatizzazione e nella formalizzazione delle teorie matematiche (e, in definitiva, dell'aritmetica, dell'analisi e della teoria degli insiemi) e nella dimostrazione della loro *non-contraddittorietà* condotta entro la teoria della dimostrazione con metodi della matematica finita.

Dopo i teoremi di Gö del (1931), e qualora tutti i metodi dell'aritmetica finita siano formalizzabili e dimostrabili entro l'aritmetica formalizzata, il programma di Hilbert è da considerarsi *fallito.*

Ma in larga parte i contributi originali di Hilbert, sopra elencati, restano validi.

Del primo di questi contributi mi occupo in questo intervento, riassumendo quanto da me sostenuto in [1] e aggiungendo alcune considerazioni a me ispirate dallo sviluppo delle ricerche logiche.

Le citazioni delle opere di Hilbert sono tratte dalla loro traduzione italiana in [2].

2. Il metodo assiomatico.

È David Hilbert, per la prima volta in *Grundlagen der Geometrie* (1899) e poi in molti articoli e in particolare in *Axiomatisches Denken* (1917), a fornire la più organica e profonda riflessione sul metodo assiomatico alla luce degli sviluppi matematici del secolo XIX.

Il metodo assiomatico, da Euclide in poi, consisteva nell'organizzare i concetti e le proposizioni di un ambito conoscitivo, individuando:

- i *concetti primitivi*, ossia i *concetti* la cui intelligibilità è da ritenersi *immediata* sulla base dell'intuizione e dai quali gli altri concetti sono ottenibili mediante *definizioni logiche*
- le *proposizioni primitive (assiomi)*, ossia le *proposizioni* la cui verità è da ritenersi *evidente* sulla base dell'intuizione (e che devono quindi contenere soltanto concetti primitivi) e dalle quali le altre proposizioni sono ottenibili mediante *dimostrazioni logiche.*

Tale metodo, così concepito, esigeva che in ciascun ambito conoscitivo ci fosse una e una sola *intuizione* fonte di intelligibilità per i concetti e di verità per le proposizioni.

La nascita delle geometrie non-euclidee e dell'algebra astratta avevano mostrato come fosse utile e fecondo in matematica partire da concetti primitivi e da assiomi non basati su un'intuizione o anche non-intuitivi, e d'altra parte alcuni momenti della ricerca in analisi matematica avevano mostrato come il basarsi sull'intuizione fosse comunque pericoloso.

Sul metodo assiomatico in matematica, al termine del secolo XIX, si assiste a un contrasto tra la *pratica matematica* e ciò che i *metodologi* imponevano: il metodo assiomatico veniva già usato, e con successo, in maniera *diversa* da quella prevista dai *metodologi*, e l'*intuizione* che secondo i metodologi doveva essere alla base del metodo assiomatico si rivelava inutile e talvolta insicura.

Un *nuovo* metodo assiomatico era di fatto usato nella matematica, e c'era bisogno di riflettere su cosa esso fosse e di caratterizzarlo, al fine di *usarlo meglio e con consapevolezza.*

Questo è quanto fa David Hilbert. E cardine della riflessione di David Hilbert è che

1. ogni teoria matematica sufficientemente matura può essere esposta in maniera assiomatica, ossia presentando una lista finita di concetti primitivi e una lista finita di assiomi contenenti soltanto concetti primitivi (*assiomatizzabilità*)
2. in una teoria matematica assiomatica

- la congiunzione degli assiomi è un *enunciato aperto puramente logico*
- i *concetti primitivi* sono *definiti* dagli *assiomi*
- gli *assiomi* devono essere *non-contraddittori* e la *non-contraddittorietà degli assiomi* è anche *la esistenza matematica di ciò che essi definiscono.*

Cerchiamo di commentare queste tesi di Hilbert.

3. Assiomatizzabilità delle teorie.

La prima tesi di Hilbert la possiamo chiamare *tesi dell'assiomatizzabilità* delle teorie matematiche, e in generale di ogni teoria scientifica. Essa è ben formulata in *Mathematische Probleme* e in *Axiomatisches Denken.*

... *Quando si tratta di indagare i fondamenti di una scienza, si deve fissare un sistema di assiomi che contengano una precisa e completa descrizione delle relazioni che sussistono tra i concetti elementari di quella scienza.* ... [p. 156].

... *Quando esaminiamo più in profondità una determinata teoria, ogni volta riconosciamo che alla base della costruzione dell'intelaiatura dei concetti ci sono poche, ben individuate proposizioni e che queste sole bastano per costruire da esse, secondo principi logici, l'intera intelaiatura* ... [p. 178].

... *Tutto ciò che può essere oggetto del pensiero scientifico, non appena è maturo per la formazione di una teoria, cade sotto il metodo assiomatico* ... [p. 188].

Questa tesi non va però confusa con un'altra apparentemente simile: quella che sosterrebbe che il pensiero matematico si svolge entro sistemi assiomatici chiusi, mediante dimostrazioni, da assiomi.

Hilbert più volte, e proprio in *Mathematische Probleme*, sostiene come la pratica della ricerca matematica non si svolge di fatto nè deve svolgersi entro sistemi assiomatici; quel che Hilbert sottolinea è che, una volta *scoperto* qualcosa, si ha la necessità di *esporlo rigorosamente* e che la presentazione assiomatica è la migliore forma di rigorizzazione di un complesso di conoscenze. Cosicchè la tesi dell'assiomatizzabilità delle teorie matematiche è connessa alla tesi del rigore in matematica.

A tutti coloro che pensano che il metodo assiomatico sia inesorabilmente legato a una concezione della conoscenza matematica come qualcosa che si svolge entro sistemi chiusi, consigliamo di rileggere e meditare ciò che Hilbert scrive in *Mathematische Probleme* e in *Axiomatisches Denken*, ossia proprio quando propone con forza il metodo assiomatico. In *Mathematische Probleme* lo sviluppo della conoscenza matematica è descritto come un processo che si svolge ponendosi questioni che sono stimolate dall'esperienza o da conoscenze precedenti (... *eseguendo ... nel modo più felice combinazioni logiche, generalizzazioni e particolarizzazioni, separazioni e unioni dei concetti*... [p. 148]) e cercando di risolverli con l'intuizione o l'immaginazione (... *Nelle ricerche aritmetiche, così come nelle ricerche geometriche, noi non seguiamo in ogni momento la catena delle operazioni mentali fino agli assiomi; invece, in aritmetica, nè più nè meno che in geometria, specialmente al primo impatto con un problema, ricorriamo a certe combinazioni rapide, inconsapevoli, non definitivamente sicure, fidandoci di una certa sensibilità aritmetica verso il modo di agire dei segni aritmetici, senza la quale progrediremmo nell'aritmetica altrettanto poco quanto senza l'immaginazione geometrica faremmo nella geometria* [p. 151]) non per forza entro i metodi di una teoria data ma nella maniera più libera, ad esempio scoprendo *metodi più generali* [p. 152], o *metodi più particolari*, o anche trovando *una soluzione pienamente soddisfacente e rigorosa anche se in un senso diverso da quello originariamente inteso* ... [p. 153]. Quel che conta è che ... *dovunque emergano concetti matematici* ... *sorge per la matematica il compito di indagare i principi che stanno alla base di questi concetti e di fissarli mediante un sistema di assiomi semplice e completo*... [p. 150] e che la soluzione trovata ad un problema venga alla fine presentata come una deduzione logica da un certo sistema di assiomi.

Inoltre, questa tesi non va confusa con quella dell'assiomatizzabilità "entro particolari condizioni", ad esempio assiomatizzabilità al primo ordine o al secondo ordine, finita o no, ricorsiva o no, ecc. Basta rileggere la descrizione del "pensiero assiomatico" che Hilbert dà in *Axiomatisches Denken*, nella quale si parla continuamente di passaggio da un sistema di assiomi a uno "più profondo": ... *Questi assiomi costituiscono un livello di assiomi più profondo rispetto a quello delle precedenti proposizioni* ... *Il procedimento del metodo assiomatico* ... *equivale* ... *ad un approfondimento dei fondamenti dei singoli campi conoscitivi*,... [p. 179].

4. Gli assiomi come enunciati logici aperti.

Inizio con alcune banali osservazioni, che valgono per il *vecchio* metodo assiomatico, e che portano a considerare un sistema di assiomi come un solo enunciato contenente concetti extra-logici.

Un sistema di assiomi è un insieme di enunciati che contengono, oltre a concetti logici, concetti extra-logici connessi al particolare "oggetto" di cui si vuol parlare: il particolare dominio di enti di cui si parla, particolari elementi di quel dominio, particolari relazioni su quel dominio, particolari funzioni su quel dominio. Tali enunciati possono essere considerati come chiusi, ossia senza variabili libere. - Poichè il numero degli assiomi è finito, un sistema di assiomi può essere visto come la *congiunzione* di tutti gli assiomi di quel sistema, ossia come un *solo* enunciato chiuso il quale contiene concetti logici e concetti extra-logici: tale enunciato chiuso denotiamolo con $A[U, a_1, \dots, a_n, R_1, \dots, Rm, f_1, \dots, f_p]$ dove U è il dominio degli enti di cui si parla negli assiomi, $a_1, \dots, a_n$ sono i particolari enti appartenenti a U di cui si parla negli assiomi, $f_1, \dots, f_p$ sono particolari funzioni da U a U delle quali si parla negli assiomi, e $R_1, \dots, R_m$ sono particolari proprietà o relazioni su U delle quali si parla negli assiomi.

Hilbert propone (già in *Grundlagen der Geometrie*) che il primo passo importante da compiere per render conto del nuovo metodo assiomatico è quello di considerare la congiunzione degli assiomi di un sistema assiomatico come *un enunciato aperto "puramente logico"*, ossia senza alcun concetto extra-logico.

A tal fine, se la congiunzione degli assiomi di un sistema assiomatico è l'enunciato $A[U, a_1, \dots, a_n, R_1, \dots, R_m, f_1, \dots, f_p]$, basta considerare U come una "variabile" per domini (insiemi), $a_1, \dots, a_n$ come "variabili" per enti appartenenti a U, $f_1, \dots, f_p$ come "variabili" per funzioni su U, e $R_1, \dots, R_m$ come "variabili" per proprietà o relazioni su U.

Così l'enunciato $A[U, a_1, \dots, a_n, R_1, \dots, R_m, f_1, \dots, f_p]$ diviene un enunciato puramente logico, poichè il concetto generale di insieme, quello di elemento, quello di funzione, quello di proprietà e quello di relazione sono concetti logici ed aperto (poichè contiene variabili per insiemi, per elementi, per funzioni, per proprietà e per relazioni).

L'apertura di *Grundlagen der Geometrie* (dove si dice che negli assiomi si sta parlando di tre insiemi di cose su cui sussistono certe particolari relazioni e il famoso commento che qualunque sistema di cose potesse essere preso come significato di "punto", "retta", "piano", non è altro che considerare tutti i concetti geometrici come "variabili" e considerare dunque gli assiomi della geometria come un enunciato aperto "puramente logico".

5. Gli assiomi come definizione di concetti.

La migliore maniera, e quella più aderente al pensiero di Hilbert, di comprendere perchè gli assiomi sono la definizione dei concetti ivi presenti, sembra essere la seguente: i concetti primitivi sono *definiti* dagli assiomi, nel senso che nulla su tali concetti può essere asserito se non ciò che è espresso negli assiomi o da essi ricavato mediante dimostrazioni logiche. Ciò è molto chiaro sulla base di questa esplicita affermazione di Hilbert:

... *Gli assiomi fissati sono ad un tempo le definizioni di quei concetti elementari; ogni proposizione interna al dominio della scienza di cui esaminiamo i fondamenti la riteniamo vera solo se essa può venir derivata dagli assiomi mediante un numero finito di inferenze logiche* ... [p. 156]

Si tratta, dunque, di qualcosa legato strettamente all'esigenza del *rigore matematico.*

6. Non-contraddittorietà ed esistenza matematica.

Per comprendere bene la tesi hilbertiana che gli assiomi di una teoria devono essere non-contraddittori e che la dimostrazione della non-contraddittorietà degli assiomi di una teoria matematica è la dimostrazione dell'esistenza matematica degli enti definiti dagli assiomi, è opportuno tener presente che l'attenzione di Hilbert si sposta dal sistema di assiomi alla sua "chiusura esistenziale" che è un enunciato che asserisce l'esistenza di enti che soddisfano gli assiomi: la dimostrazione della non-contraddittorietà di un sistema di assiomi è la dimostrazione della "chiusura esistenziale" del sistema di assiomi, ed è dunque la dimostrazione dell'esistenza di enti (matematici, quando si ha a che fare con gli assiomi di una teoria matematica) che soddisfano gli assiomi.

6.1. La "chiusura esistenziale" di un sistema di assiomi.

Chiariamo cosa è la *chiusura esistenziale* di un sistema di assiomi. – Quando Hilbert dice (in più luoghi, ad esempio nelle prime pagine di *Grundlagen der Mathematik*) che la "forma esistenziale" è connessa a ciascun sistema di assiomi, sicuramente si riferisce alla chiusura esistenziale dei sistemi di assiomi: *Nel caso dell'assiomatica in senso stretto, si aggiunge un ulteriore momento, la* forma esistenziale... [p. 342].

Supponiamo che la congiunzione degli assiomi di un sistema di assiomi sia l'enunciato $A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, R_m, f_1, \ldots, f_p]$, e ricordiamo che tale enunciato è aperto e logico.

La *chiusura esistenziale* di quel sistema di assiomi è l'enunciato "esiste un insieme U, esistono elementi $a_1, \ldots, a_n$ di U, esistono predicati $R_1, \ldots, R_m$ su U ed esistono funzioni $f_1, \ldots, f_p$ su U tali che $A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, R_m, f_1, \ldots, f_p]$", ossia la chiusura esistenziale della congiunzione $A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, R_m, f_1, \ldots, f_p]$ degli assiomi. Si tratta dunque ancora di un enunciato *logico* (privo di concetti extra-logici), che è anche *chiuso* (cioè senza variabili libere, avendo quantificato esistenzialmente ora tutte le variabili presenti nell'enunciato aperto $A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, R_m, f_1, \ldots, f_p]$).

La sua negazione è l'enunciato, logico e chiuso, che è la *chiusura universale* della negazione di $A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, R_m, f_1, \ldots, f_p]$: "per ogni insieme U, per tutti gli elementi $a_1, \ldots, a_n$ di U, per tutti i predicati $R_1, \ldots, R_m$, su U e per tutte le funzioni $f_1, \ldots, f_p$ su U, non vale $A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, R_m, f_1, \ldots, f_p]$".

Osserviamo che quando la congiunzione $A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, R_m, f_1, \ldots, f_p]$ di un sistema di assiomi è un enunciato del primo ordine:

- la sua chiusura esistenziale è un enunciato logico e chiuso del secondo ordine, ed appartiene a quella classe di enunciati che è chiamata $\sum_1^1$;
- la negazione della sua chiusura esistenziale è un enunciato logico e chiuso del secondo ordine, ed appartiene a quella classe di enunciati che è chiamata Π_1^1.

È chiaro che la chiusura esistenziale di un sistema di assiomi asserisce l'*esistenza* di valori delle variabili che rendono veri gli assiomi, ossia l'esistenza di enti che soddisfano gli assiomi; e dunque la sua verità, la verità di un enunciato logico chiuso, è la verità dell'esistenza di certi enti.

E per Hilbert, quando gli assiomi sono assiomi di una teoria riconosciuta come teoria *matematica* e solo in tal caso, la chiusura esistenziale di un sistema di assiomi esprime l'esistenza *matematica* di enti di cui parlano gli assiomi. E dunque, la verità di un enunciato chiuso *logico* (la chiusura esistenziale di un sistema di assiomi di una teoria matematica) è la verità dell'esistenza *matematica* di certi enti.

Per comprendere questo passaggio, si tenga presente che Hilbert, in tutta la sua opera fondazionale, non intendeva stabilire cosa è la matematica, e dunque quando una teoria è matematica, bensì *giustificare, fondare*, la matematica. Una siffatta fondazione della matematica può anche essere qualificata come fondazione che mira a *giustificare* il fatto che la matematica corrente, quella prodotta e consolidatasi nell'ambito della comunità matematica nel corso dei secoli, è *salda, certa*. Invece, la fondazione intuizionista della matematica mira a determinare quali parti della matematica corrente siano salde, e quali no. Di conseguenza, la fondazione hilbertiana della matematica, così come la fondazione logicista della matematica, si accorda con una concezione filosofica che considera la matematica come una scienza della quale si deve rendere conto e come una scienza che è di per sè salda e sicura. Il kantismo e il neo-kantismo, ma anche il platonismo, hanno questa posizione rispetto alla matematica: e dunque non meraviglia che Hilbert negli anni venti abbia espresso (su stimolo di Bernays) chiare posizioni kantiane o neo-kantiane. (Per una dettagliata esposizione di questa caratteristica e di altre della fondazione hilbertiana della matematica, si vedano le pp. 115-117 della mia introduzione all'antologia dei saggi fondazionali di Hilbert).

In particolare, dunque, l'atteggiamento di Hilbert di fronte agli assiomi di una teoria della matematica corrente è che la chiusura esistenziale di quel sistema di assiomi è un enunciato vero.

6.2. Dimostrare la "chiusura esistenziale" di un sistema di assiomi.

Si può e come si può dimostrare la "chiusura esistenziale" di un sistema di assiomi, se essa è vera? E dunque si può e come si può dimostrare l'esistenza matematica di enti che soddisfano gli assiomi di una teoria matematica?

Cominciamo con la domanda "si può dimostrare la chiusura esistenziale di un sistema di assiomi, se essa è vera (come sicuramente nel caso degli assiomi di teorie della matematica corrente)?".

La risposta di Hilbert è: sì.

Hilbert era convinto, come testimonia ad esempio tutta l'introduzione alla conferenza *Mathematische Probleme*, della tesi che "*ogni enunciato vero è anche dimostrabile*". E dunque per Hilbert, se la chiusura esistenziale di un sistema di assiomi per una teoria matematica è vera (ossia se esistono enti matematici per i quali gli assiomi sono veri), allora deve essere anche *dimostrabile*.

A proposito della tesi che "ogni verità può essere dimostrata" un logico alla fine del secolo XX non può onestamente dire nulla, anzi può solo ammirarla e condividerla: essa è il motore della ricerca, senza di essa la ricerca si fermerebbe. Infatti, in questa tesi non si specifica quali debbano essere i metodi dimostrativi, e se un enunciato vero non si è ancora dimostrato si può sempre utilmente andare alla ricerca di nuovi più sofisticati metodi dimostrativi per dimostrarlo. Chiunque lavori nella ricerca non può non accettare il motto più volte ripetuto da Hilbert "Es gibt keine Ignorabimus".

Passiamo dunque, ora, alla domanda "come si può dimostrare la chiusura esistenziale di un sistema di assiomi?".

Nel vecchio metodo assiomatico, l'intuizione che deve stare alla base di un sistema di assiomi la cui congiunzione è $A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, R_m, f_1, \ldots \ldots, f_p]$, fornisce un valore a ciascuna delle variabili ivi presenti e tali valori rendono "vero" l'enunciato $A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, R_m, f_1, \ldots, f_p]$: ma allora, da ciò si ha anche la verità della chiusura esistenziale di $A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots \ldots, R_m, f_1, \ldots, f_p]$. Ossia, l'intuizione *extra-logica* permette di stabilire la verità della chiusura esistenziale del sistema di assiomi, ossia la verità di un enunciato chiuso logico. Detto altrimenti, un sistema di assiomi e un sistema di valori per le variabili (dato dall'intuizione) permettono una prova *extra-logica* dell'enunciato chiuso logico che è la chiusura esistenziale del sistema di assiomi.

È questa la sola maniera per stabilire la verità della chiusura esistenziale di un sistema di assiomi? È questa la sola maniera per stabilire la verità dell'esistenza matematica di ciò di cui parlano gli assioni di una teoria matematica? Se questa fosse la sola maniera, come in polemica con Hilbert sosteneva Frege, il *nuovo* metodo assiomatico non poteva trovare una sua *giustificazione*: con ogni sistema di assiomi bisogna sempre avere un'intuizione *extra-logica* che dia significato ai concetti presenti negli assiomi e che permetta di riconoscere come veri tutti gli assiomi del sistema.

Hilbert ritiene che ci possa essere un'altra maniera per stabilire la verità della chiusura esistenziale di un sistema di assiomi, e dunque la verità dell'esistenza matematica di ciò di cui parlano gli assiomi di una teoria matematica, una maniera diversa da quella di esibire enti che rendono veri gli assiomi.

Infatti, la chiusura esistenziale di un sistema di assiomi è un enunciato esistenziale (ossia comincia con "esiste ..."), e Hilbert aveva sostenuto con forza, negli anni precedenti (quando lavorava entro la teoria degli invarianti) la legittimità e l'utilità di dimostrare teoremi esistenziali (ossia enunciati della forma "esiste un x tale che $A(x)$") senza mostrarne esempi (ossia senza mostrare almeno un oggetto a tale che $A(a)$). Si leggano, in proposito, i passi in *Axiomatisches Denken* (p. 186) e in *Die logische Grundlagen der Mathematik* (pp. 226–227) dove Hilbert ricorda e commenta due sue dimostrazioni di un teorema esistenziale in teoria degli invarianti, la prima della quale (più semplice) non forniva "esempi" e fu criticata da Gordan (che la chiamò "teologica"). E dunque Hilbert è naturalmente portato a ritenere che, per stabilire la verità della chiusura esistenziale di un sistema di assiomi, non è necessario mostrare un "esempio" di enti (funzioni, proprietà, relazioni) che rendono veri gli assiomi.

Inoltre, Hilbert era convinto anche della tesi che, almeno in linea di principio, ogni enunciato vero non solo possa essere dimostrato, ma anche dimostrato usando soltanto concetti presenti nell'enunciato stesso, ossia con una dimostrazione che soddisfa la condizione che oggi viene chiamata *purezza dei metodi.* Si tratta di una tesi, di una congettura, che ha mosso nella ricerca molti grandi matematici e sta alla base di tutto il programma fondazionale di Hilbert; in Hilbert essa si rafforza probabilmente proprio negli anni in cui lavorava all'interno della teoria degli invarianti.

Applichiamo questa tesi, questa congettura, alla chiusura esistenziale di un sistema di assiomi per una teoria matematica. La chiusura esistenziale di un sistema di assiomi per una teoria matematica è un enunciato puramente logico: e dunque, se esso è vero, allora esso deve essere dimostrabile usando soltanto concetti logici, ossia esso deve essere dimostrabile senza far riferimento a concetti extra-logici, e quindi in particolare deve essere dimostrabile senza l'esibizione di enti extra-logici per i quali gli assiomi sono veri. La non-contraddittorietà degli assiomi è una siffatta maniera di dimostrare la chiusura esistenziale di un sistema di assiomi.

Ma prima di passare a parlare della non-contraddittorietà, soffermiamoci sulla tesi, sulla congettura, che "ogni enunciato chiuso logico vero è anche dimostrabile nella pura logica". Il logico alla fine del secolo XX può e deve ricordare che essa è accettabile solo parzialmente.

E teorema di completezza di Gödel assicura (in conformità alla tesi sopra enunciata) che "ogni enunciato Π^1_1 chiuso vero è anche dimostrabile nella pura logica", ma i teoremi di incompletezza di Gödel stabiliscono che la tesi non vale per tutti gli enunciati chiusi logici $\sum^1_1$: ci sono enunciati chiusi logici $\sum^1_1$ che sono veri ma non dimostrabili nella pura logica. (Si veda la presentazione di questi risultati in [3]).

Ebbene, la chiusura esistenziale di un sistema di assiomi è un enunciato chiuso logico $\sum^1_1$: e dunque non è assicurato che qualora fosse vero sarebbe anche dimostrabile con puri metodi logici, potrebbe essere dimostrabile soltanto con metodi extra-logici.

Dunque, *non sempre* è possibile dimostrare - in maniera puramente logica - la chiusura esistenziale di un sistema di assiomi, ossia l'esistenza matematica di enti che soddisfano gli assiomi. Ma ciò non toglie che *in taluni casi* sia possibile comunque dimostrare logicamente l'esistenza matematica di enti che soddisfano un sistema di assiomi.

6.3. Non-contraddittorietà.

Hilbert propone una maniera di stabilire l'esistenza matematica di ciò di cui parlano gli assiomi di una teoria matematica, ossia di stabilire la verità della chiusura esistenziale della congiunzione

$$A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, R_m, f_1, \ldots, f_p]$$

degli assiomi anche senza dare un valore particolare alle variabili

$$U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, R_m, f_1, \ldots, f_p$$

Tale maniera consiste nel mostrare *che gli assiomi sono non-contraddittori*, ossia che da $A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, R_m, f_1, \ldots, f_p]$, mediante inferenze logiche, non si arriva mai a una contraddizione. Riporto alcuni brani da *Mathematische Probleme*:

Dimostrare che gli assiomi sono tra loro non-contraddittori, cioè che in base ad essi non si può mai arrivare con un numero finito di inferenze logiche a risultati che siano in contraddizione tra loro... [p. 156]

Se si riesce a dimostrare che le note caratteristiche attribuite ad un concetto non possono mai portare a contraddizione usando un numero finito di inferenze logiche, allora io dico che con ciò è stata dimostrata l'esistenza matematica del concetto (ad es., di un numero o di una funzione) che soddisfa a quelle condizioni. ...La dimostrazione della non-contraddittorietà degli assiomi [dei numeri reali] *è anche la dimostrazione dell'esistenza matematica dell'aggregato dei numeri reali, ovvero del continuo. Difatti, quando sarà perfettamente riuscita la dimostrazione della non-contraddittorietà degli assiomi, allora perderanno ogni giustificazione le obiezioni che sono state mosse talvolta contro l'esistenza dei numeri reali* [p. 157].

Cerchiamo di esporre il ragionamento con il quale, dalla non-contraddittorietà di un sistema di assiomi la cui congiunzione è l'enunciato aperto e puramente logico $A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, R_m, f_1, \ldots, f_p]$, si passa alla verità della chiusura esistenziale di $A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, R_m, f_1, \ldots, f_p]$, e scopriremo che in esso sono presenti ancora i temi centrali della concezione hilbertiana.

Supponiamo infatti che gli assiomi siano non-contraddittori, e mostriamo che allora la chiusura esistenziale di $A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, R_m, f_1, \ldots, f_p]$ non può essere falsa, e dunque deve essere vera. Se la chiusura esistenziale dell'enunciato $A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, R_m, f_1, \ldots, f_p]$ fosse falsa, allora sarebbe vera e *dunque dimostrabile* la sua negazione che è la *chiusura universale della negazione* dell'enunciato $A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, Rm, f_1, \ldots, f_p]$; dunque ci sarebbe una dimostrazione logica della negazione di $A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots$ $\ldots, R_m, f_1, \ldots, f_p]$, ossia ci sarebbe una dimostrazione logica che partendo da $A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, R_m, f_i, \ldots, f_p]$ termina con una contraddizione, e ciò contro l'ipotesi che gli assiomi siano non-contraddittori.

In questo ragionamento abbiamo usato in pieno le *simmetrie* della logica, alle quali Hilbert teneva in modo particolare. Innanzitutto, abbiamo usato il principio del *terzo escluso*, per il quale dato un enunciato logico chiuso o esso è vero o è vera la sua negazione; il principio del terzo escluso è uno dei principi della logica più cari a Hilbert, e da lui difeso con forza dalle critiche degli intuizionisti.

E ancora abbiamo usato il fatto che la negazione della chiusura esistenziale di un enunciato A *è* la chiusura universale della negazione di A, caso particolare di una conezione della negazione per la quale ad ogni enunciato è associata la sua negazione in maniera tale che la negazione della negazione di un enunciato A *è* l'enunciato A. E abbiamo usato il fatto che la dimostrazione della negazione di un enunciato *è* la dimostrazione che da quell'enunciato si arriva a una contraddizione. Insomma, abbiamo usato tutti i principi logici che sono stati criticati dagli intuizionisti e difesi da Hilbert, e con ragione: alla luce degli sviluppi della ricerca logica odierna, non c'è alcun motivo di rinunciare a quei principi per ottenere una logica costruttiva: la logica lineare (si veda [3]) è una logica costruttiva, ma ha tutte le simmetrie della logica classica.

Ma ciò che domina in questo ragionamento è, ancora una volta, la tesi che *ogni enunciato logico chiuso vero è anche dimostrabile nella pura logica*. Questa tesi è usata laddove si passa dalla verità della chiusura universale della negazione di $A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, R_m, f_1, \ldots, f_p]$ - un enunciato logico chiuso - alla sua dimostrabilità logica. E, quando $A[U, a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, R_m, f_1, \ldots$ $\ldots, f_p]$ è un enunciato del primo ordine, il teorema di completezza di Gödel assicura che questo passaggio è corretto.

Una prova della chiusura esistenziale della congiunzione degli assiomi, condotta mostrando la non-contraddittorietà degli assiomi, mostra che non può esistere una *dimostrazione logica* (la dimostrazione di una contraddizione dalla congiunzione degli assiomi); in questo senso è una prova *logica*, e in questo senso Hilbert chiama il suo programma *fondazione logica della matematica*, quando propone di fondare le teorie matematiche mediante la prova della non-contraddittorietà dei loro assiomi. (Si osservi, ad esempio, che nel 1922 il titolo di una sua conferenza è proprio *Die logische Grundlagen der Mathematik*, ossia *I fondamenti logici della matematica* ovvero *La fondazione logica della matematica*).

Se si tratta di una fondazione *logica* della matematica, non lo è nel senso del programma logicista: non si tratta infatti di *ridurre* i *contenuti* matematici a *contenuti* logici, ma di stabilire l'esistenza degli enti matematici mediante prove dell'impossibilità di una dimostrazione logica di una contraddizione dagli assiomi delle teorie matematiche.

Frege, che mirava a fondare la matematica sulla logica proprio nel senso di *ridurre* i *contenuti* matematici a *contenuti* logici, assolutamente non riusciva a capire ciò che Hilbert stesse affermando con la tesi che la dimostrazione di non-contraddittorietà di un sistema di assiomi è la dimostrazione dell'esistenza di enti che soddisfano gli assiomi. In sostanza, egli riteneva (ma a torto) che l'unica maniera di mostrare la non-contraddittorietà di un sistema di assiomi fosse quello di mostrare enti per i quali quegli assiomi sono veri.

È ben noto che Hilbert introduce la *teoria della dimostrazione* e la *distinzione tra matematica finitista e matematica non-finitista* proprio nello sforzo di ottenere dimostrazioni della non-contraddittorietà per le principali teorie matematiche (aritmetica, analisi, teoria degli insiemi).

Credo che sarebbe necessario e utile riflettere sulla teoria hilbertiana della dimostrazione e sulla sua distinzione tra finitista e non-finitista, alla luce di tutti gli sviluppi (specialmente di quelli più recenti) della teoria della dimostrazione.

7. Conclusione.

Una riflessione la possiamo fare già dopo questa ricostruzione delle idee di Hilbert sul metodo assiomatico e sulla dimostrazione di non-contraddittorietà.

La dimostrazione dell'esistenza degli enti matematici, per Hilbert, deve avvenire e può avvenire *senza fare riferimento a questi enti*; e le teorie matematiche possono essere considerate come teorie che parlano di enti matematici esterni (come vuole una concezione platonista della matematica), ma *non hanno bisogno* che tali enti esterni esistano, essendo la non-contraddittorietà degli assiomi la prova della loro esistenza.

Bisognerebbe trovare un'adeguata definizione di questa concezione dell'attività matematica e dell'esistenza matematica, che credo sia connaturata nella pratica matematica e condivisa da molti matematici: sicuramente non basta qualificarla come "concezione assiomatica" ed è riduttivo qualificarla come "concezione formalista", e forse si avvicina ad essa il termine "autofondazione della matematica" che avevo scelto come titolo al mio saggio sulla fondazione hilbertiana della matematica [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] V. M. Abrusci, *Autofondazione della matematica. Le ricerche di Hilbert sui fondamenti della matematica,* in D. Hilbert, *Ricerche sui fondamenti della matematica,* Bibliopolis, Napoli, 1985, pp. 13–131.

[2] D. Hilbert, *Ricerche sui fondamenti della matematica,* Bibliopolis, Napoli, 1985.

[3] J.-Y. Girard, *On the meaning of logical rules, I: sybtax vs. semantics,* in *Computational Logic*, Springer Verlag, NATO Series F 165, 1999.

V. Michele Abrusci,
Dipartimento di Filosofia,
Università Roma Tre,
Via Magenta, 5
00185 Roma (Italy)
e-mail: abrusci@uniroma3.it