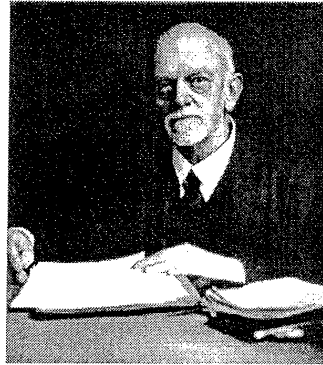




**STUDI SUI FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA
NELLA SECONDA METÀ DELL'OTTOCENTO
CON PARTICOLARE RIFERIMENTO
ALLA SITUAZIONE ITALIANA**

Paolo Freguglia

IL PENSIERO DI DAVIDE HILBERT

**A CENTO ANNI DAI "GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE"
E DAL CONGRESSO INTERNAZIONALE DI PARIGI**

Università degli Studi di Catania – Dipartimento di Matematica – Catania 23-25 settembre 1999

GLI STUDI SUI FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA NELLA SECONDA METÀ DELL'OTTOCENTO CON PARTICOLARE RIFERIMENTO ALLA SITUAZIONE ITALIANA

PAOLO FREGUGLIA

Appare immediato a chi si soffermi sulla storia della matematica della seconda metà dell'Ottocento che lo studio dei fondamenti della geometria ebbe in quel periodo notevoli sviluppi. Dall'analisi delle geometrie non-euclidee e dei rispettivi modelli euclidei alla giustificazione e deduzione della geometria elementare e proiettiva nell'ambito del calcolo geometrico ed alle revisioni assiomatiche che, partendo in generale da una puntuale disamina del testo euclideo, dalle trattazioni di geometria proiettiva e da più o meno dichiarate concezioni epistemologiche, hanno condotto a varie proposte. Tra le più innovative, sia dal punto di vista della caratterizzazione assiomatica sia dal punto di vista della concezione fondazionale della matematica, sono i *Grundlagen* di Hilbert, pubblicati nel 1899. Con Hilbert la visione metamatematica formale viene a realizzarsi. Ma prima di Hilbert (e nonostante Hilbert) che cosa era accaduto in particolar modo in Italia? Tenteremo in quel che segue di rispondere a questa domanda illustrando alcune questioni, che in proposito riteniamo cruciali, e stabilendo qualche confronto con l'opera hilbertiana.

1. Il calcolo geometrico e la geometria elementare.

Le questioni che portarono alla nascita del calcolo geometrico sono molteplici e relative alla formazione scientifica e culturale di ciascun matematico che se ne interessò¹. Si può comunque ritenere che le problematiche legate al calcolo baricentrico (Lhuillier (1808), Möbius (1827)), alla geometria di posizione di Lazare Carnot (1803) (Bellavitis (1832)), alla natura dei numeri complessi (Argand (1806), Bueé (1806), Bellavitis, Rowan Hamilton (1844)), alla meccanica (Barrée de Saint-Venant (1845), Rowan Hamilton, Tait (1867) Burali-Forti e Marcolongo) e alle forme geometriche (H. Grassmann (1844), Peano (1888), Burali-Forti) determinarono il sorgere e gli sviluppi di questo calcolo. Si tratta, per intenderci, della formazione e della determinazione di una struttura di calcolo algebrico che ha per oggetti enti geometrici (segmenti orientati), e che oggi assimileremo allo spazio vettoriale con l'aggiunta di una operazione di prodotto generale tra vettori. I matematici italiani che maggiormente si interessarono a questo calcolo furono Giusto Bellavitis (1803 - 1880), che partendo dalla lettura della *Géométrie de position* di Lazare Carnot e dalle idee di Bueé sulla natura dei numeri complessi, ideò il calcolo delle equipollenze, e Giuseppe Peano (1858 - 1932) e il suo allievo Cesare Burali-Forti (1861 - 1931) che rielaborando le idee della *Ausdehnungslehre* (1844, 1862) di Hermann Grassmann giunsero ad una forma di calcolo geometrico ben interpretabile nell'ambito della geometria elementare. Una delle caratteristiche dell'approccio di questi nostri matematici fu quella di preoccuparsi in modo non secondario a dedurre nell'ambito di questo contesto i teoremi della geometria euclidea e della geometria proiettiva. Dal punto di vista fondazionale si tratta dunque di assegnare una struttura algebrica geometrica e di stabilire poi mediante il calcolo che ne scaturisce i teoremi della geometria elementare (euclidea e proiettiva).

1.1. Il metodo delle equipollenze di Giusto Bellavitis.

Cominciamo con esaminare il contributo di Bellavitis². La definizione

¹ Si rimanda, anche per le indicazioni bibliografiche relative alle fonti ed alla letteratura critico storiografica, a P. Freguglia *Dalle equipollenze ai sistemi lineari. Il contributo italiano al calcolo geometrico*, con appendici di S. Briccoli e G. Canepa, Ediz. Quattro Venti, Urbino, 1992. Vedi anche U. Bottazzini *Va pensiero*, Il Mulino, Bologna, 1994.

² Ibid, cap.li I e II, in particolare vedi G. Bellavitis *Sopra alcuni teoremi di Geometria* in *Annali Regno Lombardo Veneto*, vol. II, 1832; G. Bellavitis *Sopra alcune applicazioni di un nuovo metodo di geometria analitica*, in *Poligrafo*, Verona, gennaio, 1833; G. Bellavitis *Elementi di geometria, trigonometria e geometria analitica*, Tipografia del Seminario, Padova, 1862.

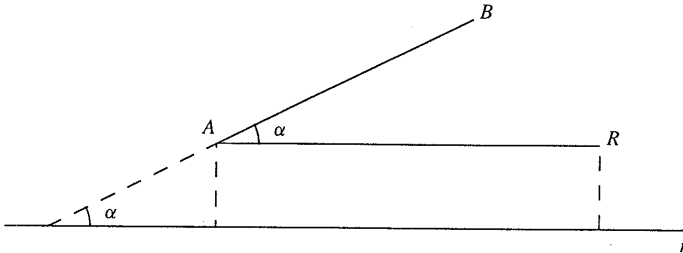
euclidea di parallelismo (termine I, 23) viene tacitamente assunta. La struttura proposta da Bellavitis non è esplicitamente assegnata in modo assiomatico, ma leggendo i suoi lavori e le leggi principali da lui date si può stabilire il seguente sistema.

[P. 1]: Due angoli che hanno lati rispettivamente paralleli sono eguali.

Bellavitis considera come insieme sostegno l'insieme dei segmenti orientati nel piano. Si diranno allora *equipollenti* due segmenti orientati AB e CD se hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso. L'equipollenza in questione verrà espressa con la seguente scrittura:

$$AB \underline{\cong} CD$$

Sia ora r una retta assegnata per posizione. Diremo *inclinazione* di AB , in simboli $\text{inc } AB$, l'angolo orientato $\angle BAR$. Nella Figura 1:



$$\text{inc } AB = \alpha$$

Figura 1

$$[P. 2]: \text{inc } BA = \text{inc } AB \pm 180^\circ$$

$$[P. 3]: AB + BC \underline{\cong} AC \text{ ovvero } AB + BC + CA \underline{\cong} 0 \text{ (regola del parallelogramma)}$$

$$[P. 4]: \text{Esistenza del segmento orientato } 0 \text{ (nullo): } AB + 0 \underline{\cong} 0 + AB$$

$$[P. 5]: AB + BA \underline{\cong} 0 \text{ ovvero } AB \underline{\cong} -BA$$

Per la somma $+$ tra segmenti orientati vale sia la proprietà associativa sia quella commutativa. Si hanno quindi le seguenti definizioni:

[Def. 1]: $AB \underline{\cong} tCD$, dove $t \in \mathbb{R}$ che esprime il fatto che AB e CD hanno la stessa direzione. Inoltre la lunghezza ed il verso di tCD dipendono da t .

[Def. 2]: Vengono introdotti il prodotto e la divisione tra segmenti orientati, pertanto scriviamo:

$$AB \underline{\circ} (CD \cdot EF)/GH$$

quando:

- i) $gr AB = ((gr CD) \cdot (gr EF))/(gr GH)$,
dove $gr XY$ sta per lunghezza di XY
- ii) $inc AB = inc CD + inc EF - inc GH$

Bellavitis stabilisce poi alcuni lemmi di base che chiama canonici. Ne richiameremo tre per il fatto che interverranno nella dimostrazione dei due teoremi di geometria elementare che riporteremo.

Canone 2°. Se i termini di una equipollenza binomiale (ad es. $mIL \underline{\circ} nMN$) hanno inclinazioni differenti (cioè $inc IL \neq inc MN$), allora ogni termine di essa è nullo.

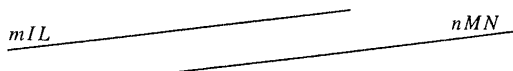


Figura 2

Canone 3°. Se due termini (ad es. LM e MN) di una equipollenza trinomiale

$$LM + MN + NL \underline{\circ} 0$$

hanno uguale inclinazione (cioè $inc LM = inc MN$), allora il terzo termine (cioè NL) ha una inclinazione che si differenzia di 180° da quella degli altri due. La lunghezza di NL sarà uguale alla somma delle lunghezze degli altri due.



Figura 3

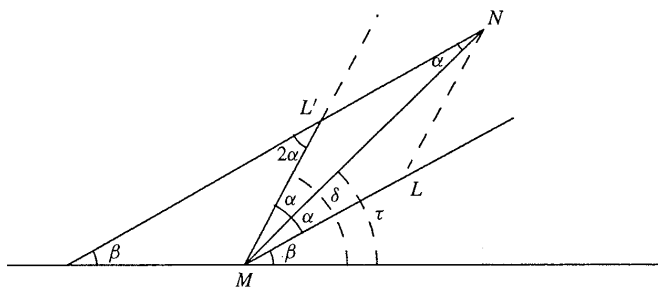
Canone 4°. Se confrontiamo i termini di una equipollenza trinomiale con i termini della equipollenza identica

$$LM + MN + NL \underline{\cong} 0 \text{ ovvero (vedi Figura 4) } NL' + MN + L'M \underline{\cong} 0$$

e constatiamo che $\text{inc } ML + \text{inc } LN = 2\text{inc } MN$, ovvero $\text{inc } L'N + \text{inc } ML' = 2\text{inc } MN$ (essendo le tre inclinazioni differenti) allora sarà:

$$\text{gr } LM = \text{gr } NL \text{ ovvero } \text{gr } N'L = \text{gr } ML'$$

e viceversa, se $\text{gr } LM = \text{gr } NL$ allora $\text{inc } LM + \text{inc } NL = 2\text{inc } MN$.



$$L'M + MN + NL' \underline{\cong} 0; LM \underline{\cong} NL'; NL \underline{\cong} L'M$$

$$\text{inc } ML = \text{inc } L'N = \beta; \text{inc } ML' = \delta; \text{inc } MN = \tau$$

Figura 4

In base a quanto precede è ora possibile dimostrare il **teorema di Pitagora**. Terremo presente la Figura 5. Dato un triangolo ABD , sia AC la sua mediana. Risulterà:

$$AB + BC \underline{\cong} AC$$

cioè:

$$(1.1) \quad AB \underline{\cong} AC + CB \quad \text{e} \quad AD \underline{\cong} AC - CB$$

moltiplicando membro a membro le (1.1) si ottiene:

$$AB \cdot AD \underline{\cong} (AC + CB)(AC - CB) \underline{\cong} AC^2 - CB^2$$

ovvero:

$$(1.2) \quad AB \cdot AD + CB^2 - AC^2 \underline{\cong} AB \cdot AD + CB^2 + AC \cdot CA \underline{\cong} 0$$

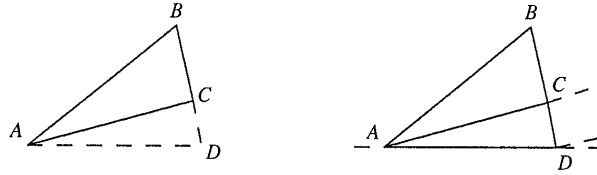


Figura 5

Se ora supponiamo che CB sia perpendicolare ad AC , cioè che:

$$(1.3) \quad \text{inc } CB = \text{inc } AC \pm 90^\circ$$

risulta pure che:

$$(1.4) \quad 2\text{inc } CB = 2\text{inc } AC \pm 180^\circ$$

Abbiamo poi che:

$$(1.5) \quad \text{da } CB^2 \cong CB \cdot CB \text{ segue } 2\text{inc } CB = \text{inc } CB + \text{inc } CB$$

e

$$(1.6) \quad \begin{aligned} &\text{da } -AC^2 \cong AC \cdot CA \text{ segue} \\ &\text{inc } AC + \text{inc } CA = \text{inc } AC + \text{inc } AC \pm 180^\circ = 2\text{inc } AC \pm 180^\circ \end{aligned}$$

Se ora confrontiamo (1.5) con (1.6) troviamo che gli ultimi due monomi del membro a sinistra della (1.2) hanno la stessa inclinazione. Per cui possiamo applicare il **Canone 3°** alla (1.2) ed avremo pertanto:

$$(1.7) \quad \begin{aligned} &gr(AB \cdot AD) = (gr CB)^2 + (gr AC)^2 \text{ e} \\ &\text{inc}(AB \cdot AD) = (2\text{inc } AC \pm 180^\circ) \pm 180^\circ = 2\text{inc } AC \end{aligned}$$

Dal momento che, essendo $\text{inc } AC \pm 90^\circ = \text{inc } DB$, si ha $2\text{inc } AC \pm 180^\circ = 2\text{inc } DB$ o $2\text{inc } AC = 2\text{inc } DB \pm 180^\circ$, da cui:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} &\text{inc}(AB \cdot AD) = \text{inc } AB + \text{inc } AD = 2\text{inc } DB \pm 180^\circ \\ &\text{e } \text{inc } AB + \text{inc } DA \pm 180^\circ = 2\text{inc } DB \pm 180^\circ \end{aligned}$$

così:

$$(1.8.1) \quad \text{inc } AB + \text{inc } DA = 2\text{inc } DB$$

Ma abbiamo anche che

$$(1.9) \quad AD + DB \underline{\cong} AB \quad \text{ovvero} \quad BA + DB + AD \underline{\cong} 0$$

Tenendo presente (1.8.1) e (1.9) possiamo allora applicare il **Canone 4°**. Risulterà pertanto:

$$(1.10) \quad gr AB = gr AD$$

Se infine sostituiamo (1.10) in (1.7) otteniamo la tesi, cioè:

$$(1.11) \quad (gr AB)^2 = (gr CB)^2 + (gr AC)^2$$

Bellavitis è altresì in grado di dimostrare anche il teorema di Desargues sui triangoli omologici (“Se i vertici di due triangoli ABC e $A'B'C'$ sono in linea retta con il punto fisso S , i punti di incontro T, U, V dei loro lati corrispondenti sono essi pure in linea retta”). La dimostrazione di questo fondamentale teorema di geometria proiettiva procede utilizzando soprattutto la precedente [*Def. 1*] ed il **Canone 2°**. Si parte dal constatare (vedi Figura 6) che si ha:

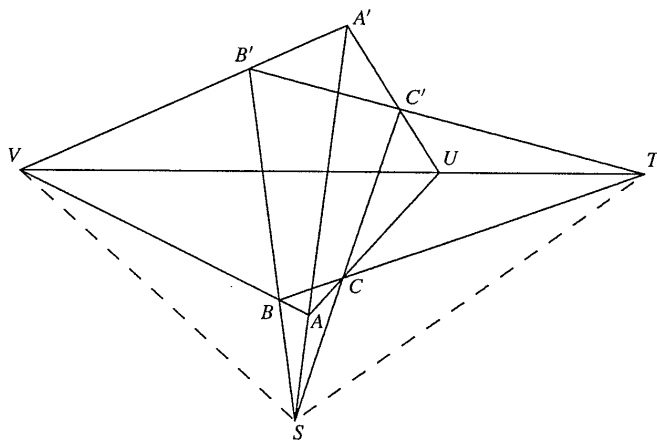


Figura 6

$$(1.12) \quad SA' \underline{\cong} aSA, \quad SB' \underline{\cong} bSB, \quad SC' \underline{\cong} cSC$$

dove a, b, c sono coefficienti numerici. A sua volta la condizione che V appartenga alla retta AB è espressa da

$$(1.13) \quad AV \underline{\cong} nAB$$

Avremo quindi tenendo presenti (1.12) e (1.13):

$$(1.14) \quad \begin{aligned} SV \underline{\cap} SA + AV \underline{\cap} SA + nAB \underline{\cap} \\ SA - nBA \underline{\cap} SA - n(SA - SB) \underline{\cap} (1 - n)SA + nSB \end{aligned}$$

Ma V deve appartenere anche ad $A'B'$ per cui analogamente si avrà:

$$(1.15) \quad SV \underline{\cap} (1 - m)SA' + mSB' \underline{\cap} a(1 - m)SA + bmSB$$

Confrontando (1.14) e (1.15) otteniamo:

$$(1.16) \quad (1 - n)SA + nSB \underline{\cap} a(1 - m)SA + bmSB$$

applicando ora il **Canone 2°** si ha che:

$$(1.17) \quad (1 - n) = a(1 - m) \text{ e } n = bm$$

Dal sistema (1.17) si ricava il valore di m e lo si sostituisce nella (1.15). Otteniamo così:

$$(1.18) \quad SV \underline{\cap} [(1 - b)/(a - b)]SA' + [(a - 1)/(a - b)]SB'$$

In modo del tutto analogo si ottiene:

$$(1.19) \quad ST \underline{\cap} [(1 - c)/(b - c)]SB' + [(b - 1)/(b - c)]SC'$$

$$(1.20) \quad SU \underline{\cap} [(1 - a)/(c - a)]SC' + [(c - 1)/(c - a)]SA'$$

Ricaviamo quindi SB' da (1.19) e SA' da (1.20) e sostituiamo le rispettive espressioni in (1.18). Avremo allora

$$(1.21) \quad (a - b - ac + bc)SV + (c - a + ab - bc)SU + (b - c - ac - ab)ST \underline{\cap} 0$$

Poiché si ha $SV \underline{\cap} TV + ST$; $SU \underline{\cap} TU + ST$, sostituendo in (1.21) a conti fatti risulta:

$$(1.22) \quad (a - b - ac + bc)TV + (c - a + ab - bc)TU \underline{\cap} 0$$

Dal **Canone 2°** sappiamo che se $mTV \underline{\cap} nTV$ allora $\text{inc } TV = \text{inc } TU$ (essendo $a - b - ac + bc = m$ e $c - a + ab - bc = n$). Dunque la (1.22), stabilendo che TV ha la stessa inclinazione di TU , ci dice che i punti T, U, V sono allineati, per cui è dimostrato il teorema di Desargues.

1.2. *Il calcolo geometrico nella scuola di Peano.*

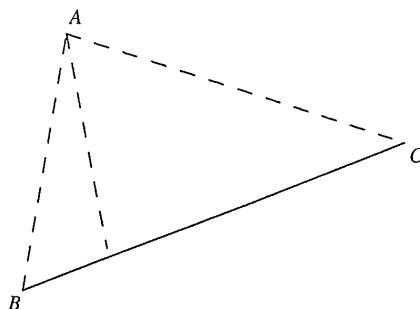
L'*Ausdehnungslehre* di Hermann Grassmann fu studiata ed elaborata, come si diceva, da Giuseppe Peano e la sua scuola³. Una serie di interessanti lavori sono dedicati dallo stesso Peano a questo argomento a partire dal 1888 con l'ampio saggio *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*⁴. Peano traduce con un linguaggio più vicino a quello della geometria elementare i concetti astratti grassmanniani. La nozione di *forma* (o *formazione*) *geometrica* è la base di tutto l'impianto teorico proposto. Siano allora $m, n, p, \dots, q$ numeri reali, allora una *forma geometrica* sarà una espressione di questo tipo:

$$(1.23) \quad m\alpha + n\beta + p\gamma + \dots + q\tau$$

in cui se $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ e τ denotano *punti* si dirà di prima specie (o primo grado), se denotano *linee*, di seconda specie, se denotano *superfici*, di terza specie e se, infine, individuano *volumi*, di quarta specie. Nell'impostazione peaniana non si hanno forme di specie superiore alla quarta, nel senso che non si considerano generalizzazioni a dimensioni superiori alla terza. Un punto verrà denotato con una lettera maiuscola, ad es. A , una linea con AB , una superficie (triangolo) con ABC , un volume con $ABCD$. Chiameremo *prodotto progressivo* tra una forma di specie i ed una forma di specie j , supposto che $i + j \leq 4$ (nel caso del piano dovremmo supporre che $i + j \leq 3$), la somma dei prodotti di ogni termine della prima per ogni termine della seconda. Risulterà allora che un punto A è la forma di prima specie più semplice e che un segmento (orientato) AB è il prodotto progressivo di due punti, come pure che un triangolo ABC lo è di tre punti oppure di un segmento BC per il punto A . D'altro canto la forma di prima specie $B - A$ rappresenta anch'essa un segmento orientato. Si ha inoltre che $AB = -BA$ e che quindi $AA = 0$. Il prodotto progressivo interpreta l'operazione di *proiezione*, come si può constatare facilmente sia nel caso del

³ P. Freguglia *Dalle equipollenze [...] op. cit. cap.li III e IV.*

⁴ Vedi G. Peano *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Fratelli Bocca ed., Torino, 1888. Per quanto concerne i contributi della scuola di Peano in questo settore, tra i vari lavori realizzati da Cesare Burali-Forti e Roberto Marcolongo, si segnala C. Burali-Forti, R. Marcolongo *Elementi di calcolo vettoriale*, Zanichelli ed., Bologna, 1909 e C. Burali-Forti *Geometria analitico-proiettiva*, ed. Petrini, Torino, 1926. Per la letteratura vedi anche U. Bottazzini *Sul Calcolo Geometrico di Peano*, in Atti del Convegno internazionale di Storia della Logica, San Gimignano 4-8. XII. 1982, CLUEB, Bologna, 1983.



$$A(BC) = ABC$$

Figura 7

prodotto AB (proiezione dal punto A al punto B) sia nel caso del prodotto ABC (vedi Figura 7, proiezioni dal punto A ai punti del segmento BC).

Inoltre se A e B sono due punti non uguali, individuanti una retta, un punto C su questa può essere espresso dalla espressione:

$$(1.24) \quad C = xA + yB \text{ dove } x \text{ e } y \text{ sono due opportuni numeri reali}$$

da cui moltiplicando a destra prima per B e poi a sinistra per A e dividendo per AB si ottiene:

$$(1.25) \quad C = (CB/AB)A + (AC/AB)B$$

In questo contesto per alcuni particolari prodotti progressivi uguagliati a zero si possono stabilire interessanti interpretazioni geometriche, come ad esempio:

$ABCD = 0$ i quattro punti A, B, C, D sono complanari;

$ABC = 0$ i tre punti A, B, C sono allineati, ovvero giacciono su una stessa retta;

$AB = 0$ i due punti A, B coincidono;

$A\alpha = 0$ il punto A giace sul piano α , cioè appartiene al piano α ;

$Aa = 0$ il punto A giace sulla retta a , cioè appartiene alla retta a ;

$ab = 0$ le rette a e b giacciono su uno stesso piano, cioè o si incontrano o sono parallele;

$abc = 0$ le tre rette a, b, c hanno un punto in comune.

Peano è in grado di dimostrare grazie a questo apparato di calcolo geometrico alcuni fondamentali teoremi di geometria proiettiva che riguardano l'allineamento fra punti. Peraltro nel lavoro del 1888 egli farà qualche tentativo di applicazione

della logica (ancora assai vicina all'impostazione booleana e quindi non ancora trasformata adeguatamente, come farà in seguito) alle dimostrazioni⁵. Cominciamo dal teorema di Menelao-Tolomeo. Con riferimento alla Figura 8 si deve dimostrare che se i lati AB , BC , CA di un triangolo vengono intersecati da una trasversale rispettivamente nei punti A' , B' , C' allora

$$(1.26) \quad AC' \cdot BA' \cdot CB' = BC' \cdot CA' \cdot AB'$$

e viceversa. La (1.26) si può anche scrivere così:

$$(1.27) \quad [(AC' \cdot BA' \cdot CB') / (BC' \cdot CA' \cdot AB')] = -1$$

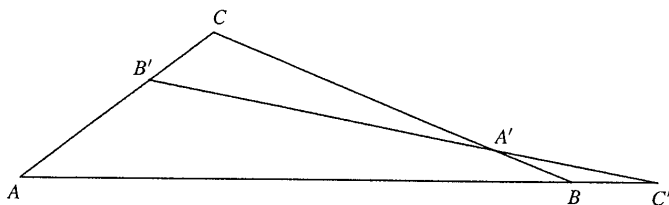


Figura 8

Assimileremo il prodotto ordinario al prodotto progressivo che scriveremo così“.” o con giustapposizione. La dimostrazione procede sfruttando l'ipotesi che se una retta interseca un lato di un triangolo, il relativo punto individuato è allineato con i punti estremi del lato (che sono anche due vertici del triangolo). Utilizzando la (1.25) avremo:

$$A' = (A'C/BC)B + (BA'/BC)C$$

$$B' = (B'A/CA)C + (CB'/CA)A$$

$$C' = (C'B/AB)A + (AC'/AB)B$$

Eseguendo il prodotto progressivo $A'B'C'$, a conti fatti si ha:

$$(1.28) \quad A'B'C' = [(A'C/BC)(B'A/CA)(C'B/AB) + \\ + (BA'/BC)(CB'/CA)(AC'/AB)]ABC$$

⁵ Vedi M. Borga, P. Freguglia, D. Palladino *I contributi fondazionali della scuola di Peano*, Franco Angeli ed., Milano, 1985 pp. 179-180.

Dice quindi Peano che “supposto ABC non nullo, la condizione necessaria e sufficiente affinché i tre punti A', B', C' siano in linea retta, ossia $A'B'C' = 0$, è l'annullarsi del coefficiente (tra parentesi quadre nella (1,28)) di ABC ”. Ma ciò equivale esattamente alla (1.27). “Dunque se i punti A', B', C' che stanno rispettivamente sui lati BC, CA, AB del triangolo ABC sono in linea retta, si ha la (1.28) e viceversa”.

Passiamo ora ad un'altra fondamentale operazione del calcolo geometrico proposta da Peano, il *prodotto regressivo*, che interpreta l'operazione geometrica di *intersezione* o *sezione*. Ci limiteremo al caso piano. Esso viene così definito da Peano.

“Alla scrittura $AB * CD$ attribuiremo il significato:

$$AB * CD = (ACD)B - (BCD)A$$

perciò la scrittura $AB * CD$ rappresenta una formazione di prima specie che è collineare con AB [...]. Ad essa daremo il nome *intersezione* o *prodotto regressivo*”. Analogamente si potrà estendere predetta definizione allo spazio. La condizione per avere il prodotto regressivo è che, se i e j indicano rispettivamente la specie di due formazioni, sia per lo spazio $i + j > 4$ e, nel piano $i + j > 3$. In realtà Peano utilizza tanto per il prodotto progressivo che per quello regressivo lo stesso segno. Il teorema di Desargues sui triangoli omologici viene agevolmente dimostrato (vedi Figura 9) considerando opportune identità⁶ e giungendo quindi all'identità:

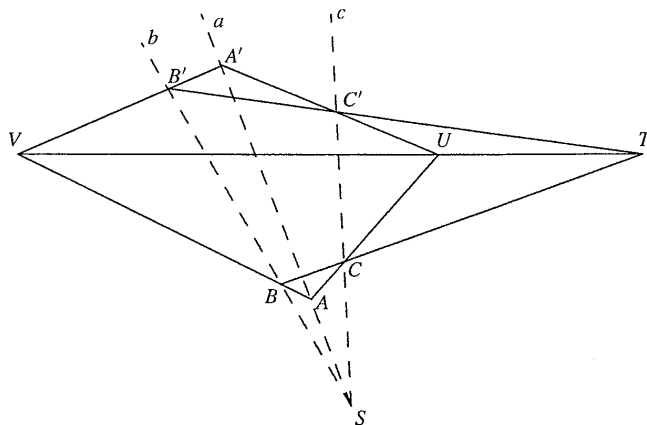


Figura 9

⁶ Vedi P. Freguglia *Dalle equipollenze* [...] op. cit. pp. 101–102

$$(1.29) \quad (BC * B'C')(CA * C'A')(AB * A'B') = \\ = ABC \cdot A'B'C'(AA' \cdot BB' \cdot CC') = 0$$

dove (i triangoli) ABC e $A'B'C'$ sono diversi da zero. La (1.29), tenendo presente che implica:

$$(BC * B'C')(CA * C'A')(AB * A'B') = 0$$

e

$$(AA' \cdot BB' \cdot CC') = 0$$

si legge complessivamente così:

$$(BC * B'C')(CA * C'A')(AB * A'B') = TUV = 0,$$

che vuol dire “i punti T, U, V di incontro dei lati corrispondenti $BC, B'C'$; $CA, C'A'$; $AB, A'B'$ sono collineari”, *se e solo se*

$$(AA' \cdot BB' \cdot CC') = abc = 0,$$

che si legge “le congiungenti AA', BB', CC' i vertici corrispondenti passano per un punto S ”.

A sua volta viene dimostrato anche il teorema di Pascal sull'esalatero (vedi Figura 10) considerando l'espressione:

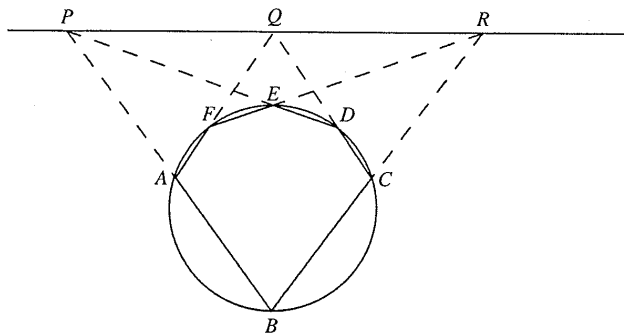


Figura 10

$$(1.30) \quad (AB * DE)(BC * EX)(CD * AX) = 0$$

la quale mette in relazione sei punti $ABCDEX$. Comparendo nella (1.30) soltanto prodotti (progressivi e regressivi) essa è a primo membro (come dice Peano) un monomio. Inoltre è di secondo grado in ogni punto in quanto ogni punto compare in essa due volte, essendo definito il grado di un monomio rispetto ad una formazione (in questo caso le formazioni considerate sono punti) come il numero delle volte che compare quella formazione nel monomio. Pertanto se sono assegnati cinque punti, la (1.30) diventa una equazione di secondo grado nel sesto punto. Poiché la (1.30) risulta verificata per $EX = 0$ o $AX = 0$, il luogo dei punti da essa individuato passa per i punti E ed A ; passa anche per D perché si ha identicamente $(AB * DE)(BC * ED)(CD * AD) = 0$. Ciò accade in modo del tutto analogo per $X = B$ e per $X = C$. Per cui la (1.10) rappresenta la conica individuata dai cinque punti $ABCDE$. Quando $X = F$ i sei punti distinti A, B, C, D, E, F che appartengono alla conica, individuano un esagono in essa inscritto. Tutto questo coincide con l'ipotesi del teorema di Pascal ("se un esagono è inscritto in una conica"). Ma la (1.30) ci dice pure che i punti che scaturiscono dalle intersezioni delle tre coppie di lati opposti dell'esagono giacciono su una stessa retta. E questa è la tesi del teorema di Pascal ("le tre intersezioni delle coppie dei lati opposti appartengono ad una stessa retta"). Per come è scritta la (1.30) vale pure il viceversa. *Dualmente* (sostituendo ai punti le rette ed alle rette i punti, in simboli sostituendo le lettere maiuscole con le minuscole e le minuscole con le maiuscole), come fa Burali-Forti, si può ricavare il teorema di Brianchon.

Mentre il calcolo proposto da Bellavitis procede, nonostante la presenza di aspetti calcolativi rilevanti, seguendo il tradizionale schema dimostrativo e risolutivo geometrico, il calcolo proposto da Peano e Burali-Forti è più strettamente calcolativo, sintetico e compatto. Addirittura nel caso visto del teorema di Pascal ci si riduce di fatto alla interpretazione di una sola espressione.

1.3. *Il calcolo con segmenti nei Grundlagen.*

Grazie al suo sistema di assiomi Hilbert è in grado di dimostrare sia il teorema di Pascal sia il teorema di Desargues (sui triangoli omologici). In particolare mediante gli assiomi di collegamento (compresi quelli dello spazio) e l'assioma forte delle parallele può dimostrare il teorema di Desargues e d'altra parte, in alternativa (cioè con i soli assiomi di collegamento piani), senza l'assioma sulla congruenza dei triangoli non risulta possibile dimostrare in geometria piana predetto teorema.

Il commento hilbertiano alle dimostrazioni di questi fondamentali teoremi conduce ad importantissime considerazioni da parte dell'autore sul ruolo fondamentale di essi. Fra l'altro ciascuno di questi teoremi mette rispettivamente

“in condizioni di introdurre nella geometria un calcolo con i segmenti in cui le regole di calcolo per i numeri reali valgono tutte inalterate”⁷. Ci soffermeremo sul caso del calcolo tra segmenti che Hilbert costruisce sulla base del teorema di Desargues⁸ onde stabilire un confronto con quanto visto in precedenza a proposito di calcolo geometrico. Hilbert si riferisce a segmenti non orientati, dal momento che tiene presente l’impostazione geometrico elementare euclidea⁹. Egli afferma che con una geometria basata su “tutti gli assiomi lineari e piani, tranne gli assiomi di congruenza e della continuità” si può introdurre un calcolo con i segmenti ragionando nel seguente modo (vedi Figura 11). Si prendano nel piano due rette r e r' che si intersecano in un punto O . Considereremo quei segmenti che hanno un estremo in O e l’altro estremo su una delle due rette. Il punto O verrà considerato come segmento zero, cioè $0 = OO$. Sia quindi $E \in r$ e $E' \in r'$, stabiliremo allora che $OE = OE' = 1$. La retta EE' verrà chiamata *retta unità*. Siano poi $A \in r$ e $A' \in r'$ e la retta AA' sia parallela alla retta EE' ; diremo fra loro uguali i segmenti OA e OA' . Viene ora definita da Hilbert la somma fra i segmenti OA e OB appartenenti a r con la seguente procedura. Si tracci per A' la parallela a r e per B la parallela a r' . Le parallele poc’anzi costruite si intersecheranno in un punto A'' . Per questo punto tracciamo una parallela a EE' che intersecherà r e r' rispettivamente in C e C' ; allora $OC = OC'$ si chiama somma dei segmenti OA e OB .

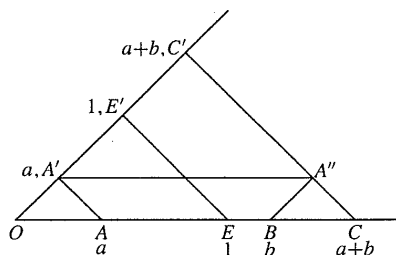


Figura 11

⁷ Vedi D. Hilbert *Fondamenti della geometria, con supplementi di Paul Bernays*, trad. ital. di Pietro Canetta, Introduzione all’edizione italiana di Carlo Felice Manara, Feltrinelli, Milano, 1970, p. 61

⁸ Ibid, pp. 90 e seg.

⁹ Ibid. p. 12, dove si asserisce esplicitamente “Il segmento era stato definito semplicemente come sistema di punti A, B ed era stato indicato con AB , ovvero con BA'' . Hilbert parlerà di segmenti orientati in un altro contesto, vedi ibid p. 77.

Questa costruzione è in effetti una procedura definitoria della somma fra segmenti, dove l'assioma forte delle parallele gioca un ruolo cruciale. Se valessero gli assiomi di congruenza si potrebbe dimostrare che i triangoli $OA'A$ e $BA''C$ sono congruenti e quindi che $OA = BC$, pertanto si dedurrebbe $OC = OB + BC = OB + OA$, laddove si intendesse per somma tradizionalmente la giustapposizione tra segmenti su una medesima retta. Ma, secondo la strategia hilbertiana, è proprio l'analisi dell'articolazione dell'utilizzo degli assiomi che anche nel caso dell'introduzione di un calcolo tra segmenti permette il chiarimento fondazionale. Subito dopo la precedente definizione, Hilbert osserva che "sotto l'ipotesi della validità del teorema di Desargues, la somma tra due segmenti può essere ottenuta in modo più generale", nel senso che il punto C (vedi Figura 11) con il quale si stabilisce la somma fra OA e OB su r risulterà indipendente dalla scelta della retta unità EE' . Hilbert propone allora la seguente ulteriore procedura definitoria della somma tra segmenti (vedi Figura 12). Si fissano, come nella Figura 11, due rette r e r' intersecantesi in un punto O . Si scelga allora $A'_0 \in r'$ e si tracci per B la parallela a r' e per A'_0 la parallela ad r , verrà così determinato il punto A''_0 . Si tracci quindi la parallela per A''_0 ad AA'_0 , viene allora individuato il punto C su r che definisce la somma tra OA e OB .

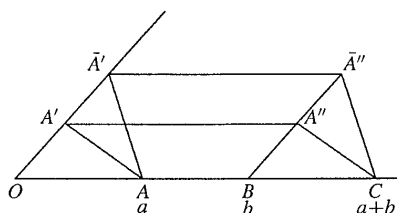


Figura 12

Completiamo la figura (vedi Figura 12) in modo tale che il punto C definito su r lo sia anche in modo che CA'' sia parallelo ad AA' . Ora se dimostriamo che CA''_0 è parallelo ad AA'_0 allora ci riconduciamo alla situazione della Figura 11 corrispondentemente al fatto che in quest'ultima $CA''//A'A//EE'$ venivano costruiti una volta assegnato EE' . La costruzione della Figura 12 non dipenderà dunque da un EE' . La dimostrazione richiesta si ottiene utilizzando proprio il teorema di Desargues (in particolare per la seconda parte dell'enunciato di questo teorema¹⁰). Infatti i triangoli $AA'A'_0$ e $CA''A''_0$ sono stati costruiti in

¹⁰ L'enunciato del teorema di Desargues sui triangoli omologici dato da Hilbert (vedi

modo tale che le rette congiungenti i vertici corrispondenti sono parallele e che inoltre i lati corrispondenti $A'A'_0$, $A''A''_0$ e AA' , CA'' sono pure paralleli, dunque anche AA'_0 e CA''_0 risulteranno paralleli.

Rispetto a Bellavitis e a Peano, per Hilbert il calcolo tra segmenti scaturisce dal teorema di Desargues (o di Pascal) dopo aver dimostrato questo teorema sulla base del suo sistema di assiomi, che non concerne propriamente un calcolo tra segmenti. Bellavitis e Peano, come abbiamo già osservato, partono invece da un sistema, che implicitamente possiamo considerare assiomatico, che stabilisce come tale il calcolo tra segmenti e tramite questo vengono dimostrati i teoremi di Desargues e di Pascal. Si tratta dunque di posizioni epistemologiche ben diverse.

2. I modelli euclidei delle geometrie non euclidee.

La prima metà dell'Ottocento aveva visto il nascere, nel modo che potremmo definire consapevole, per opera soprattutto di Lobachevsky, Gauss, i Bolyai, delle geometrie non euclidee. Nella seconda metà del secolo in questo settore prevale l'esigenza di dare a questa geometria un'interpretazione "intuitiva" in ambito euclideo. L'opera che realizzò principalmente questo obiettivo fu il *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* di Eugenio Beltrami del 1868 e la *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante* (1868 - 69).

2.1. Il Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea di Eugenio Beltrami.

Dice Beltrami ¹¹:

[...] noi abbiamo cercato, per quanto le nostre forze lo consentivano, di dar ragione a noi stessi dei risultati a cui conduce la dottrina di Lobatskevsky; e seguendo un processo che ci sembra in tutto conforme alle buone tradizioni della ricerca scientifica, abbiamo tentato di trovare un substrato reale a quella dottrina, prima di ammettere per essa la necessità di un nuovo ordine di enti e di concetti. Crediamo di aver raggiunto questo intento per la parte planimetrica di quella dottrina, ma crediamo impossibile raggiungerlo in quanto al resto.

p. 86 di op. cit.) dice "Se due triangoli sono disposti in un piano in modo tale che i lati corrispondenti siano tra loro paralleli, allora le rette congiungenti i vertici corrispondenti passano tutte per uno stesso punto, ovvero sono tra loro parallele e viceversa".

¹¹ Vedi prima pagina di E. Beltrami *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* (1868).

Abbiamo sottolineato le parole “substrato reale” che altro non è che il contesto della geometria euclidea, la quale viene a priori ritenuta non-contraddittoria e perfettamente corrispondente, grazie alla sua profisicità, alla realtà fisica. Questa interpretazione va intesa però nel senso che le due geometrie, quella sulla superficie a curvatura costante negativa (geometria che è nell’ambito di quella euclidea) e quella piana non-euclidea di Lobachevsky, coincidono limitatamente a regioni opportune delle rispettive superfici. Beltrami raggiunge il suo risultato mediante la *rappresentazione piana* della superficie a curvatura costante negativa considerata, che viene vista come una varietà ad ∞^2 coppie di numeri u, v , in cui l’elemento lineare, cioè la distanza fra due punti infinitamente vicini (u, v) e $(u + du, v + dv)$ è data da:

$$ds^2 = [R^2((a^2 - v^2)du^2 + 2uvdudv + (a^2 - u^2)dv^2)]/(a^2 - u^2 - v^2)$$

dove R ed a sono costanti arbitrarie.

Si hanno tutti i punti della superficie in questione per i valori di u e v tali che $u^2 + v^2 < a^2$, delimitati cioè dal contorno di equazione:

$$u^2 + v^2 = a^2$$

Riportiamo altri passi significativi della memoria di Beltrami:

[...] se indichiamo con x, y le coordinate rettangolari dei punti di un piano ausiliare, le equazioni

$$x = u, \quad y = v$$

stabiliscono una rappresentazione della regione considerata, rappresentazione nella quale a ciascun punto di quella regione corrisponde un punto unico e determinato del piano e reciprocamente; e tutta la regione trovasi rappresentata dentro un cerchio di raggio a col centro nell’origine delle coordinate, che chiamiamo *cerchio limite*. In questa rappresentazione le geodetiche della superficie sono rappresentate dalle corde parallele ai due assi coordinati. [...]

Conseguentemente possiamo formulare le regole seguenti:

I. A due corde distinte che s’intersecano dentro il cerchio limite corrispondono due geodetiche che si intersecano in un punto a distanza finita sotto un angolo differente da 0° e da 180° .

II. A due corde distinte che s’intersecano sulla periferia del cerchio limite corrispondono due geodetiche che concorrono verso uno stesso punto a distanza infinita e che fanno in esso un angolo nullo.

III. E finalmente a due corde distinte che s’intersecano fuori del cerchio limite, o che sono parallele, corrispondono due geodetiche che non hanno alcun punto comune su tutta l’estensione (reale) della superficie.

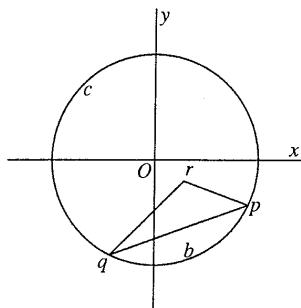


Figura 13

Questa modellizzazione (euclidea) della geometria non-euclidea richiama consapevolmente, come lo stesso Beltrami mette in luce in un passo di una lettera da lui inviata a Hoüel il 29 luglio 1869, la teoria dell'assoluto di Cayley. Beltrami sostiene quasi "l'identità tra la geometria pseudosferica e la teoria di Cayley sull'origine analitica dei rapporti metrici, grazie all'utilizzo della conica (o della quadrica) assoluta"¹². Anche in una lettera a Enrico D'Ovidio del 25 dicembre 1872 il Nostro riprende questo tema aggiungendo che questa circostanza dipendeva dal fatto che¹³

[...] nella Geometria proiettiva (analitica) si ammette già per dato che le equazioni lineari rappresentino linee di minima distanza, cosicchè questa Geometria studia, inconsapevolmente, gli spazi di curvatura costante. Io ho avuto torto di non pubblicare questa osservazione, che fu poi fatta da Klein e corredata da lui di molti sviluppi, a molti dei quali io non avevo punto pensato.

Il risultato di Beltrami fu criticato in merito alla adeguatezza del modello medesimo a rappresentare l'intero piano di Lobachevsky. In questa direzione si mossero le osservazioni di Helmholtz (1870), Klein (1871) e già prima ancora (1869) in Italia di Genocchi¹⁴.

¹² Vedi L. Boi, L. Giacardi, R. Tazzioli (a cura di) *La découverte de la géométrie non euclidienne sur la pseudosphère, Les lettres d'Eugenio Beltrami à Jules Hoüel (1868 - 1881)*, éd. A. Blanchard, Paris, 1998, pp. 21-23 e p. 97.

¹³ Ibid.

¹⁴ Ibid, pp. 23-41; vedi inoltre L. Fenoglio, L. Giacardi *La polemica Genocchi-Beltrami sulle superfici pseudosferiche: una tappa nella storia del concetto di superficie*, in Angelo Genocchi e i suoi interlocutori scientifici, (a cura di A. Conte e L. Giacardi), SASTE, Cuneo, 1991.

2.2. *Le geometrie non-euclidee nei Grundlagen.*

Fu poi Hilbert nel 1901, che molto probabilmente conosceva le critiche di Helmholtz, Klein e Genocchi a dimostrare che “non esiste nello spazio una superficie sulla quale, secondo quanto proposto da Beltrami, la geometria del piano di Lobachevsky sia interamente realizzabile”¹⁵. Ma il contributo di Hilbert alla questione del V postulato euclideo e quindi alla geometria non-euclidea aveva avuto già nei *Grundlagen* ampia rilevanza. Nel capitolo secondo, dedicato alla dimostrazione di non-contraddittorietà e di indipendenza degli assiomi, utilizzando la rappresentazione cartesiana degli enti geometrico sintetici, viene messo in luce che ogni contraddizione conseguente agli assiomi viene riconosciuta tale nell’aritmetica dei numeri reali. Dice quindi Hilbert¹⁶:

L’assioma delle parallele è indipendente dai rimanenti; ciò lo si dimostra [...] nel modo più semplice come segue: si scelgano come unici elementi di una geometria dello spazio i punti, rette e piani della usuale geometria cartesiana [...] che giacciono all’interno di una sfera fissa e si definiscano le congruenze di questa geometria mediante quelle trasformazioni lineari della geometria usuale che portano in sé la data sfera. Con opportune convenzioni si riconosce che in questa geometria “non-euclidea” sono validi tutti gli assiomi tranne l’assioma euclideo [delle parallele] e, poiché la possibilità dell’usuale geometria [cartesiana] è stata dimostrata [nel precedente paragrafo 9 del cap. 2], segue anche la possibilità della geometria non euclidea.

Come è noto Hilbert dimostrerà anche l’indipendenza dell’assioma archimedeo della continuità, dando quindi la possibilità esistenziale anche alla geometria non-archimedeo. Riuscirà altresì ad individuare geometrie in cui non valgono rispettivamente il teorema di Pitagora (geometria non-pitagorica)¹⁷, il teorema di Desargues sui triangoli omologici (geometria non-desarguesiana), il teorema di Pascal (geometria non-pascaliana). Viene dunque generalizzato il problema storicamente proposto dal V postulato e dunque risolto in generale il problema dell’indipendenza nonché della non-contraddittorietà. Il canone epistemologico a cui Hilbert (come in parte e implicitamente anche Beltrami) obbedisce è quello secondo cui se siamo in possesso di una teoria (geometrica) T_0 , caratterizzata da un sistema di assiomi, dimostrata o prestabilita non-contraddittoria, e risulta vera una proposizione p di T_0 e siamo in grado di interpretare (modello) in

¹⁵ Vedi L. Boi, L. Giacardi, R. Tazzioli (a cura di) op.cit. p. 25 e D. Hilbert *Über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung*, in Transactions of the American Mathematical Society, 2 (1901), pp. 87–99.

¹⁶ Vedi D. Hilbert *Fondamenti della geometria* [...] op. cit. p. 38

¹⁷ Ibid, vedi *Appendice seconda*, pp. 137–161.

T_0 una teoria T_1 in cui vale *non-p*, allora T_1 è non-contraddittoria e se p è un assioma di T_0 , p risulterà indipendente dagli altri assiomi di T_0 . Se invece p è un teorema in T_0 , allora ad esempio p può essere dimostrata in T_0 con un numero limitato di assiomi (di T_0) e quindi essere indipendente dagli altri. Avremo pertanto con T_1 una geometria *non-piana* (ad es. appunto non-desarguesiana, non-pascaliana, ecc.).

3. I fondamenti della geometria a più dimensioni.

Se si vogliono indagare i fondamenti e gli sviluppi *ultra* euclidei (in senso lato) della geometria, concettualmente l'approccio sintetico si è mostrato storicamente (e non solo) cruciale. Come è ben noto la geometria sintetica per presentare i suoi concetti fondamentali e per svilupparsi si riferisce a enti puramente geometrici. Talché ad esempio il punto è un concetto primitivo, giustificabile epistemologicamente in vari modi, ma che non va identificato con una n -pla di numeri reali. È questo invece il punto di partenza della geometria analitica. Quella tra i sostenitori dei metodi sintetici da un lato e dei metodi analitici dall'altro è in effetti una polemica che in vari momenti e in diversi contesti è ben presente nella storia della geometria dell'Ottocento e del primo Novecento. Ricorderemo le dispute avvenute tra coloro che, primo tra tutti Cesare Burali-Forti, sostenevano la superiorità delle tecniche del calcolo geometrico sintetico nei confronti del metodo delle coordinate e chi sosteneva che questo calcolo fosse mera tachigrafia. Anche per la geometria a più dimensioni si manifestò la possibilità di studiarla secondo i due approcci poc'anzi delineati. C'è da osservare che il modo più immediato, seppur teoricamente meno appagante, fu quello algebrico analitico con cui quasi naturalmente si stabiliva di una nozione la generalizzazione a più (variabili) dimensioni. Leggendo, tanto per citare, Cauchy, Cayley, Plücker e H. Grassmann troviamo concettualizzazioni pluridimensionali. In Italia Pietro Cassani (1832 - 1905) che fu insegnante di matematica all'Istituto Tecnico di Venezia, in cui studiò Giuseppe Veronese, realizzò alcuni interessanti lavori sui fondamenti della geometria pluridimensionale che in qualche modo dovettero influenzare l'allievo¹⁸.

3.1. I fondamenti della geometria secondo Giuseppe Veronese.

¹⁸ Vedi A. Brigaglia, *Giuseppe Veronese e la geometria iperspaziale in Italia* in *Le scienze matematiche nel Veneto dell'Ottocento*, Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Venezia, 1994, pp. 231-261.

Giuseppe Veronese (1854–1917)¹⁹ succeduto nel 1881 a Bellavitis, morto nel 1880, sulla cattedra di *Geometria analitica* dell'Università di Padova, sosteneva la necessità dei metodi sintetici secondo un punto di vista che fra poco vedremo. Così scriveva Veronese nel 1884²⁰:

Il metodo [da me seguito] è principalmente sintetico e *intuitivo*, come nelle altre mie memorie sulla geometria a n dimensioni. Dico intuitivo perché per me il punto, la retta, il piano e lo spazio a tre dimensioni in quello a n dimensioni sono elementi di *natura nota*, cioè hanno sempre lo stesso significato, quello che posseggono nello spazio ordinario; e quindi i corpi a più di tre dimensioni generati con questi elementi sono essi stessi parzialmente intuitivi, perocché vengono rappresentati nella nostra mente non già mediante equazioni, ma mediante figure geometriche.

Per Veronese²¹ la geometria in quanto tale e quindi in particolare una (qualunque) geometria si deve basare su un paradigma che può essere estrinsecato secondo il seguente programma scientifico:

a) stabilire se il sistema di assiomi che caratterizza la geometria considerata è non contraddittorio e quindi se predetti assiomi sono indipendenti tra di loro, cioè se qualcuno di essi viene dedotto o meno dagli altri;

b) stabilire se il precedente sistema di assiomi è conforme alla nostra “intuizione spaziale”, cioè se non è in contrasto con le proprietà intuitive della nostra osservazione protofisica della realtà.

Sono questi i due principi epistemologici che ci devono guidare, secondo Veronese, nella scoperta geometrica. Anche Veronese affrontò sia il problema delle geometrie non-euclidee sia quello dell'assoluto. Così ad esempio per lui la geometria non euclidea, lobatschewskiana o riemanniana, risultava, grazie alla costruzione di modelli euclidei di queste geometrie, senza dubbio logicamente coerente. Inoltre, sempre grazie alla realizzazione di questi modelli, veniva fornita quella percezione spaziale che le rendeva accettabili anche da un punto di vista intuitivo. Nel 1914 Veronese, intervenendo con un breve articolo sul

¹⁹ Vedi P. Freguglia, *I fondamenti della geometria a più dimensioni secondo Veronese*, in Seminari di Geometria 1996-1997, a cura di S. Coen, Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, Bologna 1998.

²⁰ Vedi G. Veronese, *La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario*, in Memorie R. Accad. Lincei, 19, 1883-84.

²¹ Vedi G. Veronese, *Osservazioni sui principi della geometria*, in Atti R. Accad. di scienze lettere ed arti di Padova, 10, 1893-94.

Bollettino della Mathesis a proposito della polemica tra Catania e Castelnuovo relativa ai metodi di insegnamento della geometria, scrive ²²:

[...] per me è condizione essenziale che il rigore non debba andare a detrimento di quella visione intuitiva, specialmente nella geometria, senza cui non ha vita la logica, e di quell'insieme delle verità fondamentali che certamente non si avrebbe nell'insegnamento con l'applicazione dei simboli e dei procedimenti della logica matematica [...]. Così non potrei essere favorevole alla tendenza opposta, che per paura della logica matematica vorrebbe ridurre l'insegnamento della matematica ad un insegnamento approssimativo [...] e l'intuizione, senza il controllo del ragionamento, può condurci a false conclusioni [...].

Per istituire la geometria a più dimensioni si deve procedere – secondo Veronese – con lo stesso criterio epistemologico: coerenza logica e intuizione protofisica. Queste caratteristiche per il caso che qui ci riguarda vengono estrinsecate a loro volta da un lato mediante la riconduzione iterata per proiezioni agli spazi di dimensione tre e due e dall'altro mediante l'ipotesi metodologica dell'estensione dimensionale. Vediamo di seguito in cosa consistono queste due ipotesi metodologiche che specializzano al fine della determinazione delle geometrie a più dimensioni i punti a) e b) del programma scientifico di Veronese di cui poc' anzi si è detto. Cominciamo dalla prima. Poiché risulta quantomeno difficoltoso ed artificioso costruire un modello euclideo sintetico diretto a dimensione due o tre per le geometrie a più dimensioni, Veronese cercherà il riferimento, la garanzia euclidea mediante le trasformazioni proiettive e descrittive, le quali permettono di rappresentare ad esempio un oggetto dello spazio quadridimensionale nello spazio tridimensionale e quindi di seguito, sempre tramite proiezioni, nello spazio bidimensionale. In una nota ad un suo fondamentale lavoro *La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario* del 1884, dove viene studiata quella che sarà poi chiamata la *superficie di Veronese*, viene asserito:

Secondo Veronese la geometria teorica ha come obiettivo lo studio delle proprietà di uno spazio, compresi la retta e il piano, a partire da uno spazio dimensionalmente superiore. In un articolo del 1892, comparso nei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, dove peraltro polemizza con Peano, dice ²³:

²² Vedi G. Veronese, *Osservazioni intorno ad una polemica*, *Bollettino della Mathesis*, VI, 1914.

²³ Vedi G. Veronese, *A proposito di una lettera del prof. Peano*, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, VI, 1892.

La geometria descrittiva [vedi, sempre di Veronese, la memoria *Sulla geometria descrittiva a quattro dimensioni*, 1882] serve per costruire *modelli* (proiezioni) delle figure dello spazio a quattro e a n dimensioni nel nostro spazio, e per conseguenza anche le proiezioni in un piano, foglio del disegno. Non si può dunque dubitare che le figure dedotte per proiezione o per sezione da quelle dello spazio a n dimensioni non esistano. Si vede dunque che il mio punto di partenza non è soltanto sintetico, ma altresì *rappresentativo* senza alcun substrato analitico [...]. Non sono dunque più i risultati dell'analisi che rivesto del linguaggio sintetico, ma *sono le costruzioni geometriche da cui parto, a cui applico poi il metodo analitico, quando credo opportuno* [...].

Tutto l'insieme dei punti, che secondo gli assiomi dati possiamo immaginare tali e quali c'è li rappresentiamo nello spazio ordinario, è lo spazio generale. Questo spazio, considerato come già costruito o dato, ha un numero infinito attuale di dimensioni. Quindi la geometria è scienza dello spazio generale [...]. Lo spazio generale è geometricamente possibile, e quindi ha una *realtà astratta* [...]. Lo spazio ordinario è per me la nostra rappresentazione intuitiva di esso.

Dunque le dimensioni, compresa la quarta, sembrano essere delle lenti di vario tipo mediante le quali si analizza un ente geometrico la cui esistenza dipende proprio dalla dimensione. Ad esempio una retta potrà essere vista e quindi studiata in spazi di dimensione via via superiore, essa sarà sempre tale, ma avrà proprietà che via via dipenderanno dalla dimensione in cui viene collocata. Più elevata è la dimensione più ricca è la varietà degli enti geometrici che compaiono (vedi ad esempio gli ipercilindri che non possono esistere in S^3 , ma che in S^4 ce ne sono di due specie e d'altra parte in S^4 esistono pure i cilindri). È lo *spazio generale*, che ha potenzialmente infinite dimensioni, il vero ambiente metafisico della geometria che contiene, in linea di principio, tutti gli enti geometrici possibili. In Veronese c'è dunque un consapevole superamento della ipotesi kantiana della forma a priori dell'intuizione spaziale, per il fatto che quest'ultima non coincide - come lui stesso dice - con la vera geometria. Si deve dunque trovare un criterio per costruire uno spazio dietro l'altro di dimensione (finita) sempre superiore, avendo di mira lo *spazio generale*. Questo principio dell'estensione dimensionale, che peraltro ci dovrebbe dare garanzie sulla intuizione spaziale degli oggetti geometrici a dimensione superiore alla terza, viene proposto da Veronese, come pure da Henry Parker Manning, con la effettiva determinazione degli spazi n dimensionali e con la costruzione analogica di figure della dimensione n -sima a partire da figure alla dimensione $(n-1)$ -esima. Così ad esempio vale la seguente successione di figure base:

- *segmento* (geometria sulla retta, unidimensionale, determinato da due punti);
- *triangolo* (geometria del piano, bidimensionale, determinato da tre punti

non collineari e da tre lati)

– *tetraedro* (geometria dello spazio, tridimensionale, costituito da quattro punti non complanari, da tre triangoli e da sei lati)

– *pentaedro* (geometria dello spazio quadridimensionale, questa figura base sarà costituita da cinque punti che non giacciono tutti su uno stesso iperpiano, da cinque tetraedri, ecc.)

Ad esempio, nello spazio quadridimensionale vengono definite due tipi di ipersuperfici cilindriche: la *ipersuperficie cilindrica di prima specie* (costituita da tutte le rette parallele [*elementi*] passanti per i punti di una superficie [*superficie direttrice*] di un iperpiano, appartenente allo spazio quadridimensionale assegnato, non appartenenti allo stesso iperpiano a cui appartiene la superficie direttrice. La superficie direttrice può essere un piano, oppure una superficie sferica, o conica, o cilindrica. Di conseguenza si definisce l'ipersolido corrispondente, cioè l'*ipercilindro di prima specie* e la *ipersuperficie cilindrica di seconda specie* (costituita da tutti i piani [*elementi*] tra loro paralleli passanti per i punti di una curva piana [*curva direttrice*] e intersecanti il piano della curva soltanto in quei punti. Come è noto si dimostra che in S^4 due piani si intersecano in un sol punto, vedi il teorema da noi riportato alla fine del paragrafo 3.2). Si può quindi definire l'*ipercilindro di seconda specie*.

Come è facile constatare queste due definizioni estendono alla dimensione successiva uno dei componenti che contribuiscono nello spazio tridimensionale alla definizione di superficie cilindrica, dove si ha il cerchio (o una curva piana chiusa qualunque) come curva direttrice e come elementi le rette. Va anche rammentato che tramite intersezioni di due ipersuperfici di S^4 si possono ottenere superfici di S^3 . Vediamo ora come vengono generati gli iperspazi.

Per la costruzione sintetica dello spazio geometrico, Veronese si poggia su basi epistemologiche ben esplicitate. Nella sua fondamentale opera *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee, esposti in forma elementare. Lezioni per la scuola di Magistero in Matematica*, del 1891 (vedi G. Veronese²⁴), egli inizia proponendo una serie di enunciati che stabiliscono o, se si vuole, che regolano il modo di pensare del geometra e che permetteranno di generare appunto spazi via via di dimensione superiore. Questi enunciati, che scatenarono vivaci polemiche, vanno dunque visti come una sorta di paradigma che riguarda “la facoltà e l’atto del pensare”. Essi sono (*ibid.* p. 1):

E quindi, in conseguenza soprattutto dell’enunciato 3, si ha che (*ibid.*):

²⁴ Vedi G. Veronese, *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee*, Tipografia del Seminario, Padova, 1891.

1. Penso.
2. Penso **una cosa** o **più cose**.
3. Penso **prima** una cosa, **poi** una cosa. [...]

(Def.) Ciò che **corrisponde** nel pensiero ad una cosa si chiama *idea, concetto o rappresentazione mentale* della cosa. (Ind.) Una più cose o concetti si indicheranno con segni, ad esempio con lettere dell'alfabeto.

(*) “Data una cosa A determinata, se non è stabilito che A è il gruppo di tutte le cose possibili che vogliamo considerare, possiamo pensarne un'altra non contenuta in A (vale a dire fuori di A) e indipendente da A ”.

Ciò vuol dire in particolare che se A è una qualunque forma geometrica, “possiamo immaginare fuori di A un altro elemento, cioè un elemento che non appartenga ad A senza che ciò contraddica alle proprietà della forma A stessa, né conduca a contraddizioni”. Cosicché, poiché una forma geometrica, ad esempio la *retta* che è, autonomamente considerata, uno spazio ad una dimensione, è costituita di punti, possiamo anche immaginare che esista un punto P fuori di essa. Ovvero, come ulteriormente Veronese spiega²⁵, “immaginiamo *prima* uno spazio S [ad esempio la *retta*] e *poi* un punto P e consideriamo come contrassegno di confronto tra il punto P e quelli di S , l'ordine (se si vuole anche il tempo) in cui li abbiamo pensati”. Questa è ovviamente una giustificazione di natura psicologica, che tuttavia può aiutare a capire. Allora il *piano*, inteso come spazio bidimensionale S^2 sarà generato da una retta (spazio ad una dimensione S^1) ed un punto P fuori di essa, nel modo seguente²⁶:

(Def.) La figura [...] che si ottiene dal fascio di raggi, considerando come elemento [centro] il punto P , [che congiunge P con i punti della retta assegnata S^1], si chiama sistema a due dimensioni o *superficie piana* o, più semplicemente *piano* (vedi Fig. 14a).

3.2. La polemica Peano-Veronese.

La posizione fondazionale di Veronese fu fortemente avversata in particolare da Peano²⁷. Oltre la ben nota polemica sulla esistenza dei segmenti infinitamente piccoli e infinitamente grandi, grazie ai quali si prospetta l'esistenza

²⁵ Vedi G. Veronese, *Osservazioni sui principi della geometria*, in Atti R. Accad. di scienze lettere ed arti di Padova, 10, 1893-94, vedi nota 1 a p. 5.

²⁶ Vedi G. Veronese, *Fondamenti di geometria* [...] op. cit., pp. 281-3 segg.

²⁷ Vedi G. Peano, *Recensione al volume di G. Veronese, Fondam. di geom. a più dims.* [...] in Rivista di matematica, 2, 1892.

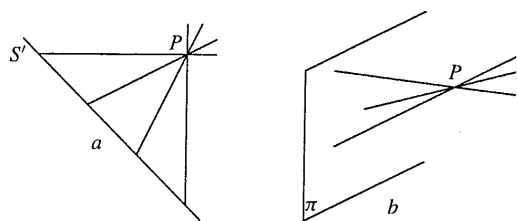


Figura 14

della geometria non-archimedeica (indipendenza del postulato di Archimede) che Veronese ritiene possibili, anche nei confronti degli spazi pluridimensionali la disputa fu assai aspra²⁸. Peano sostiene che il principio (*), sopra riportato, non significa altro che affermare:

(**) Data una classe A , se essa non contiene tutti gli oggetti, allora essa non contiene tutti gli oggetti.

Peano evince che in conclusione Veronese possa giungere ad affermare che “fuori di *tutti* i numeri ci siano ancora dei numeri [di stessa natura] e in tal modo si generano gli infiniti, e fuori di *tutti* i punti ci sono ancora dei punti e per tal via si generano gli spazi a più dimensioni!”. Le contestazioni di Peano²⁹ risultano sostanzialmente corrette, dal momento che l’impianto logico-epistemologico del Veronese è indubbiamente poco comprensibile ed in alcuni casi conduce a confusioni. Peano fu d’altronde il primo tra i matematici italiani dell’epoca a considerare l’importanza della logica formale per lo studio dei fondamenti della matematica ed in particolare della geometria. E Peano si ricondusse doverosamente a quanto le ricerche logiche del tempo proponevano fuori d’Italia, dando poi un suo apporto originale. Veronese invece ebbe una sorta di vera e propria avversione per la logica simbolico formale. In un ampio saggio dal titolo “Studio storico e critico dei principi della geometria” che è una

²⁸ Vedi G. Gemignani, *L’infinitesimo attuale: una polemica di cento anni fa*, in Peano e i fondamenti della matematica, (Atti del relativo convegno, Modena 22-24 ottobre 1991) (a cura del Gruppo di Storia delle Matematiche dell’Università di Modena), Accademia Nazionale di Scienze Lettere ed Arti, Mucchi, Modena, 1993. Vedi anche D. Palladino op. cit. nota successiva.

²⁹ Vedi D. Palladino, *La scuola di Peano e la scuola di geometria algebrica: due posizioni a confronto tra Otto e Novecento*, Appendice a M. Borgia, P. Freguglia, D. Palladino, *I contributi fondazionali della scuola di Peano*, F. Angeli, Milano, 1985, pp. 244–250.

delle appendici al suo libro *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee*, dopo aver accennato alle intuizioni di Descartes e di Leibniz ed alle opere di Boole e Schröder a proposito della creazione del calcolo logico simbolico, scrive:

[...] L'interesse teorico di una tale dottrina nello studio della logica non ci pare si possa contrastare, ma bensì che se ne esageri l'importanza [...]. Noi non possiamo esaminare questo calcolo che nelle sue applicazioni, che furono fatte nei principi della matematica e in particolare della geometria, specialmente dall'egregio prof. Peano. E dobbiamo esprimere subito la nostra convinzione che anche se si avesse un linguaggio completo di segni logici per esprimere tutte le verità conosciute delle scienze matematiche nell'ordine che ci pare migliore e atto ad esprimere con semplicità le nuove, vi sarebbe sempre una differenza notevolissima tra l'interesse logico di questo sistema di segni e l'interesse matematico.

Ritornando all'oggetto della polemica, relativa al principio (*), Veronese intendeva dire che ad esempio la retta, considerata come spazio a sé stante, non contenesse *tutti* i punti della nostra percezione spaziale. Il principio che sovrasta l'idea generatrice di iperspazi sembra riassumersi nella seguente posizione: comunque si concepisca uno spazio a sé stante, esso non contiene tutti i punti della nostra percezione spaziale. Ecco allora con le parole di Veronese come si arriva per generazione successiva allo spazio a quattro dimensioni (*ibid.* pp. 385–386 e pp. 458–459):

(Def.) Sia dato un piano π , e un punto P fuori di esso. Congiungiamo il punto P coi punti del piano π ; le rette che così si ottengono, considerate quali elementi, determinano una figura che chiamasi *stella di 1^a specie*; P centro e π piano direttore di essa. La indicheremo col simbolo $(P\pi)$. [...]

(Def.) Se nella stella consideriamo il punto quale elemento, la figura risultante si chiama *spazio a tre dimensioni* o semplicemente *spazio*. Lo indicheremo [...] con il simbolo $(P\pi)$ (vedi Figura 14b).

(Def) Sia dato uno spazio a tre dimensioni S^3 e un punto S^0 fuori di esso [...]. Congiungendo tutti i punti dello spazio S^3 con il punto S^0 , le rette che così si ottengono, considerate quali elementi, determinano una figura che chiameremo *stella di 2^a specie*, di cui S^0 è il centro e S^3 lo spazio direttore. La indicheremo con il simbolo (S^0S^3) . [...]

(Def.) Se nella stella di seconda specie si considera il punto come elemento, la figura risultante è a quattro dimensione rispetto al punto quale elemento. Chiameremo questa figura *spazio a quattro dimensioni*.

La generalizzazione alla n -ma dimensione, cioè allo spazio euclideo ad n dimensioni viene descritta da Veronese nel libro secondo della seconda parte

dei suoi *Fondamenti di geometria*. Riprendendo il confronto con Peano, si può osservare che nei suoi *I principi di geometria logicamente esposti* del 1889, antecedenti di due anni alla pubblicazione del volume di Veronese, egli dà due fondamentali assiomi che permettono, almeno fino alla terza dimensione, la realizzazione teorica di quanto proposto da Veronese. Infatti l'assioma 12 asserisce:

$$r \in 2. \supset: x \in 1. x - \in r. - =_x \Lambda$$

dove **2** denota l'insieme delle rette, **1** l'insieme dei punti e Λ la classe vuota. Pertanto la precedente espressione logico-simbolica peaniana si legge così: "se r è una retta allora non è vuota la classe degli x che sono punti e che non appartengono alla retta r ", in altre parole data una retta r esiste almeno un punto x che non appartiene a r . A sua volta l'assioma 16 dice:

$$h \in 3. \supset: a \in 1. a - \in h - =_a \Lambda$$

dove **3** è la classe dei piani, pertanto la precedente espressione peaniana stabilisce che se h è un piano, si può sempre assegnare un punto a che non appartiene ad h .

Sembra dunque abbastanza naturale la formulazione in termini peaniani di un assioma che ci porta alla quarta dimensione, sempre che si abbia la convinzione epistemologica (ed ontologica) che essa debba esistere. A livello formale potremmo scrivere così:

$$s \in 4. \supset: a \in 1. a - \in s - =_a \Lambda$$

dove **4** è la classe degli spazi tridimensionale, cioè degli iperpiani. Di questi ne esiste almeno uno in base all'assioma precedente. E quindi generalizzando:

$$s \in (n + 1). \supset: a \in 1. a - \in s - =_a \Lambda$$

dove $(n + 1)$ è la classe degli spazi n dimensionale.

Vediamo ora un esempio di come si procede nello studio di proprietà geometriche nello spazio quadridimensionale (nel caso si tratterà di proprietà di incidenza). Veronese, in *Fondamenti di geometria*, dimostra che due piani in S^4 si incontrano in un punto.

(Teor., 122, VI): *Due piani S^2 e S_1^2 di S^4 si incontrano in un punto X^0 ; se si incontrano in una retta giacciono in un iperpiano S^3 di S^4 .*

Dimostrazione: (vedi Figura 15) Dimostriamo dapprima la prima parte dove si asserisce che in generale due piani in S^4 si incontrano in un punto X^0 .

Consideriamo l'iperpiano S^3 nel quale giace S^2 . Il piano S_1^2 incontrerà a sua volta S^3 in una retta X^1 (per il Teor. 122, III,). X^1 (che in generale non giace in $S^2 \subset S^3$) e S^2 si incontreranno in un punto X^0 , in quanto (per il Teor. 83, I, sempre del testo di Veronese) una retta X^1 ed un piano S^2 dello spazio S^3 hanno un solo punto in comune se la retta non giace nel piano. Ma X^1 appartiene anche a S_1^2 . Dunque X^0 è comune ai due piani S^2 e S_1^2 .

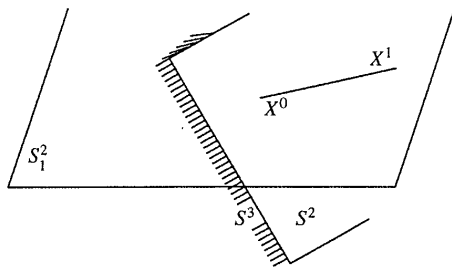


Figura 15

Dimostriamo ora la seconda parte. Partiamo dall'ipotesi che S^2 e S_1^2 si incontrano in una retta, cioè hanno in comune una retta. Potremmo allora scegliere rispettivamente su S^2 e S_1^2 due altri punti. Determineremo allora con uno di essi (da una parte e insieme alla retta intersezione) S^2 e con l'altro fuori da S^2 (e in S_1^2) un S^3 .

Con il metodo geometrico analitico questa dimostrazione, partendo dalle equazioni di due iperpiani di $\mathbf{R}^4$, è altrettanto interessante per i risvolti interpretativi in termini geometrici delle espressioni e calcoli algebrici coinvolti.

Il sistema geometrico proposto da Veronese è, come è stato opportunamente rilevato³⁰, anomalo rispetto alla tradizione logico espositiva. Vengono date proposizioni da assumere a priori che l'autore classifica, secondo un proprio canone epistemologico, in *assiomi*, che sono ricavati direttamente dalla intuizione e come tali sono necessari, e *ipotesi* che non contraddicono gli assiomi e sono intuitivamente possibili. Studi successivi, più vicini a noi, hanno affrontato le basi assiomatiche della geometria quadridimensionale ed in generale n -dimensionale. Tra le assiomatizzazioni più recenti della geometria quadridimensionale sintetica a nostro avviso quella proposta nel 1961 da Paul Rossier³¹ è tra quelle che risentono maggiormente delle idee di Veronese.

³⁰ Ibid.

³¹ Vedi P. Rossier, *Géométrie synthétique moderne*, Lib. Vuibert, Paris, 1961.

4. La revisione assiomatica secondo Peano e la sua scuola.

Il contributo di Peano e della sua scuola allo studio dei fondamenti della geometria è assai rilevante, tanto che i lavori in questo settore, in particolar modo quelli ad opera di Peano e di Pieri, costituiscono dei punti di riferimento obbligati per gli studiosi della problematica storica sui fondamenti ed in particolare sull'assiomatizzazione della geometria.

4.1. *L'assiomatica peaniana.*

I lavori di Peano che riguardano direttamente l'assiomatica della geometria sono *I principi di geometria logicamente esposti* del 1889 e *Sui fondamenti della geometria* del 1894³², i quali si collocano storicamente tra le *Vorlesungen über neuere Geometrie* di Pasch del 1882 e le *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert del 1899. Nel primo dei due lavori citati, Peano dichiara di volersi limitare a ritrovare deduttivamente le proposizioni principali della geometria di posizione, ossia quelle che riguardano le relazioni di appartenenza e di ordine.

L'intento dell'Autore è quello di stabilire un minimo numero di enti geometrici come primitivi (dai quali poter definire poi tutti gli altri) ed un numero il più possibile ristretto di proposizioni primitive, cioè assiomi (da cui dimostrare tutte le altre).

Come concetti primitivi, Peano dichiara di assumere quelli di "punto" e "segmento", anche se, in effetti, egli si riferisce più propriamente al concetto di "punto" ed alla relazione ternaria $c \in ab$, che significa "c è un punto interno al segmento ab" o "c sta tra a e b". Tipograficamente troviamo in originario il simbolo ϵ al posto del simbolo $\in$.

Mediante questa relazione Peano è in grado di definire le nozioni di retta e di piano. Ma vediamo come prende le mosse la trattazione peaniana.

La classe dei punti è denotata con **1**. Se *a* e *b* sono punti, si definiscono i due

³² Per questo paragrafo abbiamo ripreso, con qualche ampliamento, parti degli articoli M. Borga, P. Freguglia, D. Palladino, *Il problema dei fondamenti della matematica nella scuola di Peano*, Epistemologia, VI (1983) e P. Freguglia, *Il contributo di G. Peano agli studi sui fondamenti della geometria*, in Atti del convegno "La storia delle matematiche in Italia", Cagliari, 29-30 set. e 1 ott. 1982. Rimandiamo anche a M. Borga, P. Freguglia, D. Palladino, *I contributi fondazionali della scuola di Peano*, op. cit. in particolare al cap. III. I lavori peaniani qui ricordati sono *I principi di geometria logicamente esposti*, Fratelli Bocca, Torino, 1889 e *Sui fondamenti della geometria* in Rivista di Matematica, IV (1894) pp. 51-90.

seguenti insiemi di punti, chiamati *raggi*:

$$a'b =: \mathbf{1} \cdot [x \in](b \in ax)$$

$$ab' =: \mathbf{1} \cdot [x \in](a \in xb)$$

Cioè $a'b$ è l'insieme dei punti x tali che b è interno al segmento ax , mentre ab' è l'insieme dei punti x tali che a è interno al segmento xb (vedi Figura 16).

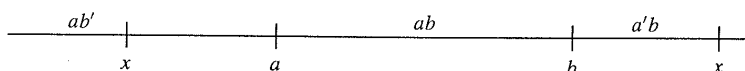
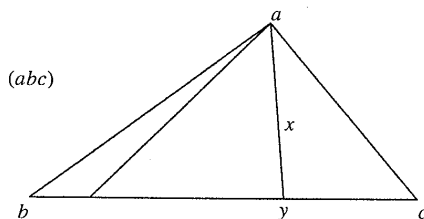


Figura 16



$$ak = abc \quad k \equiv bc$$

Figura 17

Se a è un punto e k una classe di punti, Peano denota con ak l'insieme dei punti x tali che esiste un y in k per cui $x \in ay$. Ad esempio se k coincide con il segmento bc (vedi figura 17), con ak , ossia con abc denotiamo l'insieme dei punti interni al triangolo di vertici a, b, c . Peano in particolar modo in *I principi di geometria logicamente esposti* (come d'altronde negli *Arithmetices principia*) utilizza sistematicamente la sua "logica matematica" che, come asserisce, "in studi di questo genere è strumento pressoché indispensabile". Gli assiomi da lui introdotti e studiati sono tratti, nonostante l'apporto di alcune non indifferenti modifiche, dalle *Vorlesungen* del Pasch.

Vediamo ora gli assiomi assunti da Peano cominciando da quelli relativi ai segmenti.

Assiomi preliminari sui segmenti:

$$(0.1.) a, b \in \mathbf{1} . \supset . ab \in K\mathbf{1}$$

cioè, se a e b sono punti, allora il segmento ab è una classe di punti. Inoltre “[...] Il segno = fra due punti indica la loro identità o coincidenza”, quindi:

$$(0.2.) a, b, c, d \in \mathbf{1} . a = b . c = d : \supset . ac = bd$$

cioè, se a, b, c, d , sono punti ed a sia uguale a b e c sia uguale a d , allora il segmento ac è uguale al segmento bd .

Assiomi della geometria sulla retta:

- 1) $\mathbf{1} = \Lambda$; cioè, la classe dei punti non è vuota.
- 2) $a \in \mathbf{1} . \supset \therefore x \in \mathbf{1} . x- = a : - =_x \Lambda$; cioè, se a è un punto, esiste allora almeno un punto x diverso da a .
- 3) $a \in \mathbf{1} . \supset aa = \Lambda$; cioè, non esiste alcun punto fra punti coincidenti.
- 4) $a, b \in \mathbf{1} . a- = b : \supset . ab- = \Lambda$; cioè, fra due punti distinti esiste almeno un punto.
- 5) $a, b \in \mathbf{1} . \supset . ab = ba$; cioè, “se il punto c giace fra a e b , esso giace pure fra b e a ; ossia il segmento ab è identico al segmento ba ”.
- 6) $a, b \in \mathbf{1} . \supset . a- \in ab$; cioè, “il punto a non giace fra a e b ; ossia l’estremo di un segmento non è interno al segmento stesso”.
- 7) $a, b \in \mathbf{1} . a- = b . \supset . a'b- = \Lambda$; cioè, “dati due punti a e b distinti, esistono punti del raggio $a'b$; ossia un segmento si può prolungare da una qualunque delle due parti”.
- 8) $a, d \in \mathbf{1} . c \in ad . b \in ac . \supset . b \in ad$; cioè, se c è un punto che sta fra a e d e b un punto che sta fra a e c allora b sta fra a e d .
- 9) $a, d \in \mathbf{1} . b, c \in ad . \supset : b \in ac . \cup . b = c . \cup . b \in cd$; cioè, “se a e d sono punti e b e c stanno fra a e d , allora: o b sta fra a e c , oppure b coincide con c , oppure b sta fra c e d .”
- 10) $a, b \in \mathbf{1} . c, d \in a'b . \supset : c = d . \cup . c \in bd . \cup . d \in bc$; cioè, “se c e d sono punti del prolungamento di ab , allora o essi coincidono, o c sta fra b e d , ovvero d sta fra b e c .”
- 11) $a, b, c, d \in \mathbf{1} . b \in ac . c \in bd . \supset . c \in ad$; cioè, “se b sta fra a e c , e c fra b e d , allora c sta fra a e d .”

Quindi per la geometria del piano e dello spazio vengono aggiunti altri assiomi (vedi in parte quanto già riportato per il confronto con Veronese, nel paragrafo precedente).

Viene peraltro dimostrato (prima di introdurre gli assiomi 15 e 17) il teorema di Desargues per *triangoli omologici* che viene così enunciato:

“Se tra dieci punti $e, a, b, c, d, h, m, n, f, x$, di cui i primi quattro non complanari, passano nove tra le relazioni:

$$\begin{aligned} h \in ad, h \in bc, e \in am, n \in ed, n \in mh, f \in mb, \\ n \in cf, a \in xb, c \in xd, e \in xf \end{aligned}$$

allora passerà pure la rimanente”³³.

Questo teorema anche nel caso piano è per Peano dimostrabile utilizzando l'assioma 16 (che è un assioma della geometria dello spazio). Si prova ciò esibendo un modello relativo ad una superficie in cui valgono gli assiomi piani 1., ..., 14, ma non vale sempre la proposizione sui triangoli omologici³⁴. “Arrivati al teorema di Desargues (sui triangoli omologici) si può continuare senz'altro lo studio della geometria di posizione [...] si possono introdurre, mediante definizioni, i punti impropri o ideali, ecc. seguendo per esempio il Pasch nella sua opera citata (*Vorlesungen*)”.

In *Sui fondamenti della geometria* Peano riprende ed amplia le tematiche trattate in *I principi di geometria logicamente esposti*. Nella prima parte vengono ripresentati più schematicamente i risultati che aveva esaminato ne *I principi*. Le idee primitive sono le stesse (“punto” e “ $c \in ab$ ”) e le proposizioni primitive sono in tutto 17 (come abbiamo già visto); viene aggiunto l'assioma della continuità sulla retta. Anche se vi è lo stesso impiego di simboli per esprimere le varie proposizioni, l'uso degli strumenti logici è meno massiccio e le dimostrazioni sono condotte in modo più intuitivo, facendo uso del linguaggio comune. La definizione di retta risulta semplificata.

Definizione. Essendo a e b due punti distinti, dicesi retta determinata da a e da b la figura formata dal segmento ab , dai suoi estremi a e b , e dai suoi prolungamenti $a'b$ e $b'a$. (segue espressione simbolica)

La seconda parte del lavoro costituisce un ampliamento essenziale del sistema geometrico de *I principi*, in quanto viene introdotta la nozione di congruenza. Questa è ricondotta al concetto di “movimento” (nel senso che due figure sono considerate congruenti se esiste un “movimento” che fa passare da una all'altra), a sua volta inteso come una speciale affinità, caratterizzata da opportuni assiomi.

³³ Peano osserva: “Di questi dieci punti uno comparisce nelle dieci relazioni, tre volte come interno; due punti compaiono ciascuno due volte come interni ed una come estremi del segmento; tre punti compaiono ciascuno una volta come interni e due come estremi; quattro punti compaiono sempre come estremi”.

³⁴ Peano mette pure in evidenza che questa proposizione continua a valere per le superfici a curvature costante.

4.2. *Confronto Peano-Pasch.*

Cerchiamo ora di vedere un po' più da vicino ciò che differenzia la trattazione peaniana da quella di Pasch. Riguardo al sistema di assiomi, Peano stesso stabilisce un ben articolato confronto. I primi due assiomi del Pasch dicono:

1. Tra due punti si può tirare sempre una linea retta ed una soltanto.
2. Esiste sempre (almeno) un punto che giace all'interno di un segmento rettilineo dato.

Quest'ultimo assioma è del tutto equivalente al quarto assioma di Peano. Per quanto riguarda il primo, Peano osserva l'ambiguità insita nell'espressione "due punti" che ivi compare. Infatti si potrebbero indicare ora "due punti qualunque" ora "due punti distinti". Per cui traducendo nel linguaggio logico (peaniano) la prima parte del primo assioma potremmo avere rispettivamente:

$$a, b \in 1 \cdot \supset \cdot ab \in K1$$

oppure:

$$a, b \in 1 \cdot a - = b \cdot \supset \cdot ab \in K1$$

In questo secondo caso vengono esclusi i segmenti nulli. A parere di Peano, se si tiene presente il secondo assioma le parole di Pasch vanno intese come nella seconda delle due formulazioni interpretative. Peano vede ancora un'altra ambiguità nell'espressione "due punti": essa può indicare o la successione (disposizione) di due punti oppure l'insieme (combinazione) dei due punti. Nel primo caso l'interpretazione logicosimbolica della seconda parte del primo assioma di Pasch è:

$$a, b, c, d \in 1 \cdot a = b \cdot c = d \cdot \supset \cdot ac = bd$$

che è l'assioma 0.2 sui segmenti di Peano. Se invece assumiamo la seconda delle indicazioni possibili avremo:

$$a, b, c, d \in 1 \cdot a \cup c = b \cup d \cdot \supset \cdot ac = bd$$

che comprende anche l'assioma peaniano sopra richiamato. È questa seconda interpretazione, a parere di Peano, quella autentica. L'assioma terzo delle *Vorlesungen* nel linguaggio logico (peaniano) è così trascrivibile:

$$a, b \in 1 \cdot c \in ab \cdot \supset \cdot a - = c \cdot a - = b \cdot a - \in bc$$

Questa espressione raggruppa tre proposizioni tra le quali una equivalente al sesto ed un'altra al terzo degli assiomi peaniani. Inoltre gli assiomi IV, V, VI, VII, VIII del Pasch corrispondono senza differenziazione rispettivamente agli assiomi VIII, IX, VII, X, XI di Peano. Fin qui le idee primitive utilizzate sia da Pasch sia da Peano sono "punto" e la relazione ternaria " $c \in ab$ ". Ma Pasch considerò, fra le idee primitive, a differenza di Peano, anche quella di "porzione di piano", per cui l'assiomatica successiva (dall'ottavo assioma delle *Vorlesungen*) si differenzia necessariamente da quella peaniana. Peano, dunque, compie una revisione critico-logica del sistema proposto da Pasch. Da un lato chiarifica ambiguità e complessità di formulazione negli assiomi e dall'altro (ed è il fatto tecnicamente più importante) riduce l'apparato delle idee primitive eliminando proprio tra queste quella intuitivamente meno immediata.

Un altro significativo versante del confronto tra Pasch e Peano riguarda la trattazione del *trasporto* o *moto* ("movimento") delle figure geometriche e quindi della *congruenza*. In questo modo la discussione si sposta dai fondamenti della geometria di posizione a quelli della geometria metrica. A p. 101 delle *Vorlesungen*, Pasch stabilisce i seguenti dieci postulati del moto (o movimento) che Peano riporta:

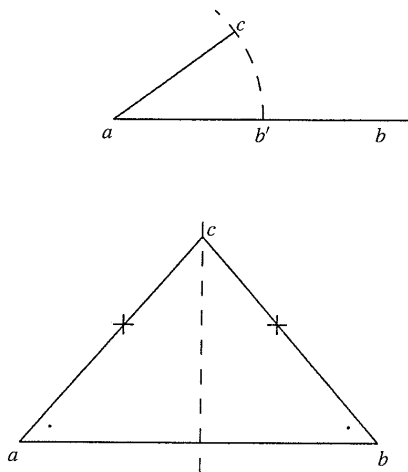


Figura 18

- I. Un segmento ab si può trasportare in modo che a coincida con b e b con a (cioè ogni segmento si può rovesciare).
2. Dati tre punti a, b, c non collineari, si può portare il raggio ac su ab ; ed il punto c verrà ad assumere una posizione b' sul raggio ab , tale che ab' sia congruente ad ac (vedi figura 18).

3. Date due terne di punti a, b, c e a_1, b_1, c_1 se le figure (a, b, c) e (a_1, b_1, c_1) sono congruenti, e se c giace nel segmento fra a e b allora anche c_1 giace fra a_1 e b_1 .
4. Se il punto c_1 giace fra a e b , e si prolunga il segmento ac_1 del segmento c_1c_2 congruente ad ac_1 , e questo d'un nuovo segmento c_2c_3 eguale ai precedenti, e così via, si arriverà sempre ad un segmento c_nc_{n+1} che conterrà il punto b .
5. Se nella figura abc i segmenti ac e bc sono congruenti, allora anche le figure abc e bac sono congruenti. In conseguenza l'angolo abc si può rovesciare (vedi figura 18).
6. Se due figure sono congruenti, anche le parti omologhe sono congruenti.
7. Due figure congruenti ad una terza sono congruenti fra loro.
8. Date due figure congruenti α e β e preso un punto x , si può determinare un punto y in guisa che la figura che si ottiene unendo alla figura α il punto x sia congruente colla figura ottenuta aggiungendo alla β il punto y .
9. Dato un triangolo fgh , ed un segmento ab congruente ad fg , ed un semipiano limitato dalla retta ab , si può in questo semipiano determinare uno ed un sol punto c , tale che il triangolo abc sia congruente ad fgh .
10. Se a, b, c, d sono punti non complanari, ed e è un punto diverso da d , le figure $abcd$ ed $abce$ non sono congruenti.

Peano ha un'altra concezione del movimento delle figure, lo considera come una *trasformazione* di punti in punti. In questo modo toglie a questa nozione ogni possibile senso fisico. Come fra poco vedremo egli basa tutto sulla nozione di *affinità* che è concetto puramente matematico. Per Peano una *affinità* è "una corrispondenza m fra punto e punto nello spazio, tale che se il punto e giace tra a e b anche fra i loro corrispondenti mc , ma ed mb passa la stessa relazione". Discende subito che se m è una affinità allora, se a e b sono punti distinti, lo saranno pure ma ed mb . Inoltre il "prodotto" tra due affinità è ancora un'affinità, l'*identità* (cioè quella trasformazione che fa ad ogni ente corrispondere sé stesso) è un'affinità. Ovviamente si potrà definire un'affinità *inversa* di una assegnata. Nel *gruppo* delle affinità Peano individua il *sottogruppo* dei "moti" stabilendo i seguenti postulati:

1. Ogni "moto" è un'affinità.
2. L'identità è un "moto".
3. Se m è un "moto" anche la trasformazione inversa m è pure un moto; cioè se la figura A si può portare a coincidere con la B , anche la B si può

portare a coincidere con la A . Ossia se la figura A è congruente alla figura B anche la B è congruente alla A .

4. "Se m ed n sono 'moti', anche la loro successione è un 'moto' ", cioè se la figura A può portarsi a coincidere colla B , e la B può portarsi a coincidere colla C , anche la A può portarsi a coincidere con la C ; in altri termini due figure congruenti ad una terza sono congruenti fra loro.
5. Dati due punti a e b , si può portare a in b .
6. Dati tre punti a, b e b_1 , si può, tenendo fisso il punto a , far coincidere il raggio ab con il raggio ab_1 .
7. Dati i due punti distinti a e b , e i punti c e c_1 , fuori della retta ab , si può, tenendo fisso il punto a e il raggio (a, b) , far coincidere il semipiano (ab, c) con (ab, c_1) .
8. Assegnati i punti a, b, c non collineari ed i punti a_1, b_1, c_1 altrettanto non collineari, si può allora sempre determinare univocamente un moto che trasformi a in a_1 , il raggio ab nel raggio a_1b_1 , ed il semipiano (ab, c) nel semipiano (a_1b_1, c_1) .

Come si può immediatamente osservare il primo postulato di Peano equivale, proprio per la definizione di *affinità*, al terzo postulato di Pasch. Altre analogie si possono facilmente cogliere. Ma diversa è l'impostazione seguita da Peano che lega - come dicevamo - la nozione di movimento tra figure geometriche e quindi quella di congruenza, ad una nozione cardine per la matematica: quella di trasformazione tra punti. Anche per Pasch la congruenza diventa una relazione del tutto astratta (indipendente dal movimento fisico), ma è autonomamente impostata, senza connessioni a schemi matematici fondamentali generali. Interessante osservare quanto dice Piero Benedetti in uno dei volumi dell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* (1937) a tal proposito³⁵:

Si deve però riconoscere che, spogliata l'idea del movimento della sua essenza intuitiva, essa diviene superflua, identificandosi logicamente con quella di *figure congruenti*, che si può assumere direttamente come primitiva. Così fa M. Pasch, il quale considera la congruenza come una relazione primitiva tra gruppi finiti di punti, stabilendo alcuni postulati riguardanti coppie, terne e quaterne di punti [...].

Possiamo rilevare che quanto sostiene Benedetti condurrebbe a vedere come superflui gli studi fatti da Pasch, Peano e quindi Pieri e da Hilbert (tanto per citare) orientati decisamente alla rigorizzazione dell'idea di "moto" in geometria.

³⁵ Vedi P. Benedetti, *Fondamenti di geometria*, in *Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi* (a cura di L. Berzolari, G. Vivanti e D. Gigli) vol. II, parte II, Edit. Ulrico Hoepli, Milano, 1937, p. 25.

Pertanto merito di Pasch e di Peano è proprio quello di aver caratterizzato la nozione di moto, equivoca se solo intuitivamente applicata in geometria.

4.3. *Le ricerche in Italia sui fondamenti della geometria proiettiva.*

L'allievo di Peano che maggiormente sviluppò le tematiche relative all'assiomatica geometrica fu sicuramente Mario Pieri (1860-1913). Egli realizzò interessanti ed apprezzati (ad es. da B. Russell) contributi³⁶, coevi ad Hilbert, sui fondamenti della geometria proiettiva ed elementare rimanendo sostanzialmente nell'ambito della visione fondazionale della scuola peaniana. Per la geometria proiettiva Pieri considera come concetti primitivi da assumere quelli di "punto proiettivo" "retta proiettiva" e "segmento proiettivo", oppure quelli di "punto proiettivo" e "congiungente due punti proiettivi". Pieri afferma³⁷:

C'è dunque in queste parole l'intendimento di indagare logicamente la geometria, in termini puramente deduttivi appunto, svincolandola dalla intuizione protofisica dalla quale tuttavia provenivano i relativi concetti basilari. In Italia, nel periodo da noi considerato, sui fondamenti della geometria proiettiva (oltre Peano e Pieri) lavorò un buon numero di matematici quali Riccardo De Paolis (1854 - 1892), allievo di Cremona e di Beltrami, che si riconduce a von Staudt³⁸, Gino Fano (1871-1952), allievo di Corrado Segre. Fano non parte più da enti primitivi, dando così un approccio iniziale sostanzialmente non diverso da quello hilbertiano, egli infatti scrive³⁹:

Inoltre si dedicarono ai principi della geometria proiettiva Giuseppe Veronese⁴⁰

³⁶ Si rimanda a M. Borge, P. Freguglia, D. Palladino, *I contributi fondazionali [...]*, op. cit. cap.lo III e Appendice; vedi fra i lavori di Pieri, *Sui principi che reggono la geometria di posizione*, Note I, II, III, in Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 30 (1894-95), pp. 607-641, 31 (1895-96), pp. 381-399, 31 (1895-96), pp. 457-470 e inoltre *I principi della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo*, in Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino (2), 48 (1897-98), pp. 1-62 e *La geometria elementare istituita sulle nozioni di 'punto' e 'sfera'*, in Memorie della Soc. ital. delle Scienze (detta dei XL), (3), 15 (1908), pp. 354-450.

³⁷ Vedi M. Pieri, *I principi della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo*, op. cit. pp. 1-2.

³⁸ Vedi R. De Paolis, *Sui fondamenti della geometria proiettiva* in Atti della Reale Accademia dei Lincei, (3), 9, pp. 489-503.

³⁹ Vedi G. Fano, *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni*, in Giornale di matematica, 30, pp. 106-132.

⁴⁰ Vedi in particolare G. Veronese, *Die Anzal der unabhängigen Gleichungen, die*

Si è tenuta per molto tempo la Geometria proiettiva come un semplice prolungamento della Geometria elementare; e dai più si preferisce tuttora di stabilirne i principi con successive estensioni dei concetti che reggono la Geometria elementare, desunti dall'osservazione del mondo esterno e in tutto conformi alle idee, che si acquistano per induzione sperimentale da certe qualità di oggetti e fatti fisici. A questo modo la Geometria tutta quanta, serbando pure nei metodi quel carattere deduttivo che le appartiene dall'antichità più remota, si presenta come in aspetto di *Fisica dell'estensione*, anzi che prender posto accanto all'Analisi fra le discipline puramente matematiche.

Un altro e più moderno criterio - il cui sviluppo naturale in quanto concerne i principi par che tenda ad un fine ben distinto da quello - vuol che la Geometria di posizione (e con essa le geometrie metriche astratte che ne derivano) sia da considerarsi come scienza *puramente deduttiva* indipendente da ogni altro corpo di dottrine matematiche o fisiche, e però anche dagli assiomi od ipotesi della Geometria elementare e da ogni sussidio di misure con unità mobili nello spazio, ecc. Quest'altra via, mostrata da G.C. von Staudt (nella *Geometrie der Lage* e ne' *Beiträge zur G. der L.*) indi proseguita, nei loro studi ulteriori, da A. Cayley, F. Klein, R. De Paolis ed altri (e in qualche modo da tutti gli scritti celebri sulla Geometria non-euclidea, e sugli spazi comunque estesi) conduce ormai pianamente ad una Geometria di posizione in tutto speculativa ed astratta, i cui soggetti sono mere creazioni del nostro spirito, e semplici atti della nostra volontà i postulati (senza escluder ch'essi abbiano spesso la lor prima radice in qualche fatto esteriore): onde arbitrari gli uni e gli altri; almeno in quanto non li coordiniamo ad un fine prestabilito, che debba esser guida al pensiero. Così p. es. si stimerà conveniente il proposito che la Geometria di posizione riesca governata in ogni sua parte da certe leggi fondamentali - come i principi di *proiezione* e di *dualità* - le quali, per così dire, la informano e le imprimono il carattere; e che per via d'interpretazioni opportune (dico alla luce d'alcune *definizioni del nome*) si possa intraveder facilmente ne' suoi risultati il complesso dei fatti componenti l'ordinaria Geometria elementare e le geometrie metriche sorelle.

Qui non è luogo a discuter sui pregi dell'uno o dell'altro di questi processi ideali: a parer mio son tutti due conseguenti e legittimi, e per vie diverse concorrono all'opera di consolidar nuove basi all'edificio geometrico.

Una *varietà* di enti di qualsiasi natura; enti che chiameremo, per brevità, punti, indipendentemente però, ben inteso, dalla loro stessa natura. [...] Io preferisco addirittura riservare [...] il nome di postulati [...] a quelle proprietà che (opportunamente scelte) dovremo ammettere per caratterizzare gli enti stessi e poterne poi dedurre nuove proprietà di questi.

(come abbiamo in parte già visto) e Federigo Enriques⁴¹. La posizione enrique-

zwischen den allgemeinen Charakteren einer Curve im Raume von n Dimensionen stattfinden, in *Mathematische Annalen*, 18, (1881), pp. 448-458 e anche *Sulla Geometria descrittiva a quattro dimensioni*, in *Atti Istituto Veneto di Scienze, Lett. e Arti*, (5) 8 (1881-82), pp. 987-1024.

⁴¹ Vedi in particolare F. Enriques, *Sui fondamenti della geometria proiettiva*, in

siana che leggiamo nell'introduzione alle *Lezioni di geometria proiettiva* (1898) non si discosta da quella peaniana: nozioni primitive, ispirate dall'esterno, e deduzione logica. Enriques sostiene infatti che:

[...] Dall'ordine delle cose esterne, nella rappresentazione data alla mente dai sensi, scaturisce il concetto di spazio. La Geometria studia questo concetto già formato nella mente del geometra, senza porsi il problema (psicologico ma non matematico) della sua genesi. Sono dunque oggetto di studio nella Geometria, i rapporti intercedenti fra gli elementi (*punti, linee, superficie, rette, piani ecc.*) che costituiscono il concetto complesso di spazio: a tali rapporti si dà il nome di *proprietà spaziali o geometriche*.

In virtù dei rapporti intercedenti fra i vari elementi del concetto di spazio, alcuni di questi possono essere *definiti* (logicamente) mediante altri: così p. e. il piano può essere definito mediante la retta e il punto ecc. Tuttavia alcuni elementi debbono essere introdotti *come elementi primi o fondamentali* della Geometria, senza definizione, giacché non si potrebbe dare una definizione (logica) di tutti senza cadere in un circolo vizioso.

La scelta degli elementi fondamentali della Geometria non è *a priori* determinata; si scelgono come tali gli elementi più semplici rispetto alla *intuizione psicologica*, cioè quelli di cui la nozione si trova formata nella nostra mente come contenuto del concetto di spazio: tali sono p. e. il punto, la retta e il piano.

Si considera generalmente come criterio teorico di perfezione (logica) lo scegliere il minimo numero possibile di elementi geometrici come fondamentali; ma questo criterio non ha valore imperativo [...]. Si chiamano *postulati* le proprietà geometriche date (immediatamente) dall'intuizione; teoremi le proprietà che se ne deducono logicamente (e quindi si appoggiano mediatamente sull'intuizione).

Enriques dice poi che "la Geometria proiettiva ha per oggetto lo studio delle proprietà grafiche"⁴²

5. Conclusioni.

Vorremmo innanzi tutto mettere in luce storicamente il fatto che Pasch, dopo aver influenzato direttamente con la sua opera sia Peano sia Hilbert, abbandonò la posizione epistemologica secondo la quale la fondazione della geometria è autonoma rispetto a quella dell'aritmetica. In una lettera a Frege

Rendiconti Istituto Lombardo, (2) 27 (1894), pp. 550-567 e *Lezioni di geometria proiettiva*, Zanichelli ed., Bologna, 1898.

⁴² Per ulteriori approfondimenti si rimanda a M. Avellone, A. Brigaglia, C. Zappulla, *I fondamenti della geometria proiettiva in Italia da De Paolis a Pieri*, preprint n. 73 (1998) del Dipartimento di Matematica ed applicazioni dell'Università degli Studi di Palermo, ed ancora a M. Borga, P. Freguglia, D. Palladino, *I contributi fondazionali* [...] op. cit.

dell'11 febbraio 1894 viene significativamente illustrata la sua posizione, a quella data, sui fondamenti della geometria.

[...] Posso concordare completamente con la sua [di Frege] esigenza che non debbano tollerarsi ipotesi tacitamente assunte. Ho compiuto nel 1882 un tentativo di rispettare tale esigenza per la geometria, nel mio libro *Vorlesungen über neuere Geometrie*; oggi però, da un punto di vista generale, dissento in parte delle motivazioni che allora mi muovevano.

La rigorosa fondazione della geometria dovrà essere preceduta da quella dell'aritmetica. A questo proposito non sono finora riuscito a convincermi di scorgere nell'aritmetica solo una parte della logica.

Abbiamo già visto in Fano l'idea di considerare gli oggetti geometrici come astratti, rispetto all'intuizione che li ha generati, e determinati soprattutto dalle loro proprietà. In realtà troviamo ciò anche in qualche passo di Pasch, di Peano e di Pieri. Pasch nelle sue *Vorlesungen* sostiene che:

Se si vuole che la geometria sia veramente deduttiva, il processo di deduzione deve essere totalmente indipendente dal significato dei concetti geometrici, così come deve essere indipendente dalle figure; si possono considerare solo le relazioni fra i concetti geometrici espresse nelle proposizioni e nelle definizioni utilizzate.

D'altro canto Peano dice ad esempio "Il segno 1 leggesi *punto*", e Pieri quando specifica la categoria di *astratto* in geometria, sostiene che vuol dire "prescindere da ogni interpretazione *fisica* delle premesse, e quindi anche dalla loro *evidenza ed intuitività geometrica*"⁴³. Tuttavia questi autori legittimarono le *nozioni primitive*. Con Hilbert c'è un deciso atteggiamento formale. Ma riteniamo che anche da Hilbert la geometria non sia stata certamente intesa come un "gioco formale". Anche per lui il riferimento ad Euclide non era casuale. Con Hilbert d'altra parte le problematiche metateoriche per la geometria sono esplicitamente contemplate e trattate, dando nuovi spunti alla ricerca sui fondamenti. Anche se tematiche come quelle dell'indipendenza furono affrontate dalla scuola di Peano.

Il "programma fondazionale peaniano" è diverso certamente da quello sia di Frege sia di Hilbert. Per Peano il programma di rigorizzazione del corpus matematico non prevede necessariamente la ricerca di un'unitarietà teorica di tutte le conoscenze matematiche attorno ad alcuni concetti basilari di natura logica. Secondo il Nostro la matematica è costituita da varie branche, ognuna delle

⁴³ Si rimanda a M. Borga, P. Freguglia, D. Palladino, *I contributi fondazionali [...]*, op. cit. pp. 50 e segg.

quali può essere autonomamente ed indipendentemente considerata rispetto alle altre. Così quasi contemporaneamente, alla fine degli anni '80 dell'Ottocento, Peano scrive i suoi lavori principali sui fondamenti della matematica: sull'aritmetica, sulla geometria e sul calcolo geometrico (base per la meccanica). Questi lavori, a parte talune connessioni senz'altro significative, sono sviluppati senza la ricerca di possibili concetti unificanti, come invece accadeva in Frege. La posizione di Peano e della sua scuola, molto simile a quella di Pasch, è tutto sommato "neoeuclidea". A parte l'utilizzo di un apparato logico linguistico, di una ideografia logica, ed un modo di esprimersi implicitamente formale, ciò che conta in Peano è aver ben determinato nozioni primitive (la cui origine è empirica) e assiomi (postulati) e sviluppare dunque la relativa teoria nel rispetto più assoluto del rigore logico. Per quanto riguarda il giudizio diretto almeno di alcuni (indubbiamente di rilievo) rappresentanti della scuola peaniana, non si può non rammentare quanto scrive Cesare Burali-Forti nella sua *Logica matematica* (pubblicata nel 1919):

[...] È a proposito di merce estera, conviene far notare come, specialmente dagli italiani (!), si citi e si usi il caotico ed impreciso sistema geometrico dell'Hilbert, quasi non esistessero i sistemi semplici, chiari precisi (ma sono italiani!), e ben superiori a quello dell'Hilbert, di M. Pieri.

Paolo Freguglia,
Dipartimento di Matematica,
Università di L'Aquila
e-mail: fregugli@univac.it