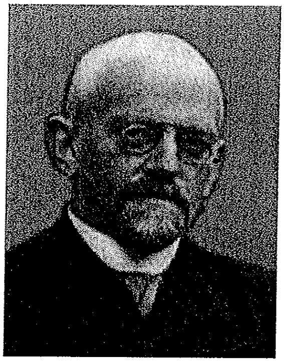

I "GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE" E I LIBRI DI TESTO DI GEOMETRIA IN ITALIA

Carmelo Mammana

IL PENSIERO DI DAVIDE HILBERT

A CENTO ANNI DAI "GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE"
E DAL CONGRESSO INTERNAZIONALE DI PARIGI

Università degli Studi di Catania – Dipartimento di Matematica – Catania 23-25 settembre 1999

LE MATEMATICHE
Vol. LV (2000) – Supplemento n. 1, pp. 227–251

I "GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE" E I LIBRI DI TESTO DI GEOMETRIA IN ITALIA

CARMELO MAMMANA

1. Introduzione.

David Hilbert cominciò ad interessarsi ai fondamenti della Geometria sin dal 1891, quando impartiva a Königsberg lezioni sulla Geometria proiettiva. Nel 1895 Egli si trasferì a Göttingen e qui Felix Klein gli chiese di scrivere una memoria in occasione dello scoprimento della statua dedicata a Gauss e a Weber. In questa occasione, siamo nel 1899, fu pubblicato un volume contenente le due memorie: D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* e E. Wiechert, *Grundlagen der Elektrodynamik*.

Indubbiamente i *Grundlagen der Geometrie* sono stati il più importante libro sulla Geometria che sia stato scritto nel secolo passato, di esso se ne sono avute parecchie edizioni e traduzioni; la "Jubiläumsausgabe" (la quattordicesima edizione) dei *Grundlagen der Geometrie* è apparsa il 24 agosto 1999 presso l'editore Teubner di Lipsia ed è stata curata dal Prof. M. Toepell, ed è un libro che, a ragione e pieno titolo, è entrato tra i classici della Matematica.

I *Grundlagen der Geometrie* possono essere considerati da vari punti di vista; in questa occasione li guarderemo come una rivisitazione degli *Elementi* di Euclide fatta in chiave moderna ed alla luce di quelli che sono stati i risultati degli studi e della ricerca scientifica sui fondamenti della Geometria che in quel tempo erano molto fiorenti in buona parte dell'Europa. Indubbiamente

Lavoro eseguito nell'ambito del progetto "Ricerche di Matematica e di Informatica per la Didattica".

i *Grundlagen der Geometrie* influenzarono e non poco gli Autori dei libri di testo di Geometria per le scuole. Anche in Italia, che vantava una abbondante trattatistica di Geometria per le scuole, l'apparizione dei *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert influenzò gli estensori dei libri di testo che ne tennero conto nella redazione dei nuovi testi, così come tennero conto anche dei risultati degli studi e delle ricerche sui fondamenti della Geometria, che contemporaneamente si erano sviluppati da parte di vari Autori in Italia.

2. La tradizione italiana nell'insegnamento della Geometria.

A differenza di altri Paesi europei, l'Italia ha avuto una tradizione tutta propria nell'insegnamento della Geometria che ha influenzato molto gli estensori dei libri di testo. È bene quindi soffermarci un momento su quella che possiamo chiamare la *via italiana nell'insegnamento della Geometria.* Questa tradizione è abbastanza recente perché il suo inizio si può fare risalire a metà dell'ottocento quando si realizzò l'unità d'Italia.

Raggiunta l'unità d'Italia e costituitasi la nuova Nazione, occorreva uniformare le varie strutture amministrative presenti nei vari Stati che avevano concorso alla formazione del nuovo Stato ed armonizzarle tra loro.

Per quanto riguarda l'organizzazione e la struttura della scuola di ogni ordine e grado, dalle materne all'università, fu deciso di estendere su tutto il territorio nazionale l'ordinamento stabilito dalla legge elaborata dal Ministro piemontese Gabrio Casati [1] che regolava gli studi nel regno piemontese.

Per quanto riguarda invece i programmi delle varie discipline fu deciso che essi fossero elaborati da apposite Commissioni, nominate ad hoc, essendo notevoli le differenze di programmi tra Stato e Stato per cui si rendeva necessario un profondo ripensamento alla base dei contenuti dell'insegnamento.

A far parte della Commissione che doveva formulare i programmi di matematica furono chiamati, tra gli altri, i matematici Luigi Cremona e Giuseppe Battaglini, professori rispettivamente nell'università di Bologna e nell'università di Napoli. La Commissione fece proprio quanto suggerivano il Cremona ed il Battaglini e propose che nei ginnasi-licei fosse introdotto, per la geometria, lo studio diretto degli *Elementi* di Euclide. Cioè che gli argomenti da trattare erano quelli sviluppati da Euclide nei suoi *Elementi*, come pure il libro di testo da adottare era il testo euclideo. Precisamente gli allievi dovevano studiare i primi sei libri degli Elementi e poi l'undicesimo ed il dodicesimo.

[1] Legge 13 novembre 1859, n. 3725.

In una pubblica lettera [2] tanto lo stesso Cremona che Francesco Brioschi, professore nel Politecnico di Milano e che allora era membro del Consiglio superiore della pubblica istruzione, chiarivano che l'introduzione come libro di testo del trattato euclideo aveva lo scopo di elevare il livello degli studi matematici nelle nostre scuole, permettendo ai giovani di usare un testo dove potessero "APPRENDERE A RAGIONARE, A DIMOSTRARE, A DEDURRE", senza ricorrere *ai mezzi celeri* o ai libri *ove la geometria è mescolata con l'aritmetica o con l'algebra.*

I nuovi programmi sono emanati nel 1867 [3] dall'allora ministro Coppino, ed è significativo quanto si legge nelle premesse agli stessi programmi:

La matematica nelle scuole secondarie classiche non è da riguardarsi solo come un complesso di proposizioni o di teorie, utili in sè, delle quali i giovanetti debbono acquistare conoscenza per applicarle poi ai bisogni della vita; ma principalmente come un mezzo di cultura intellettuale, come una ginnastica del pensiero, diretta a svolgere la facoltà del raziocinio e ad aiutare quel giusto e sano criterio che serve di lume per distinguere il vero da ciò che ne ha soltanto l'apparenza.

Ed inoltre:

Nella Geometria, per dare all'insegnamento la massima efficacia educativa, e per ridurre ad un tempo la materia entro modesti confini, basta applicare alle nostre l'esempio delle scuole inglesi, facendo ritorno agli Elementi di Euclide, che per consenso universale sono il più perfetto modello di rigore geometrico. Il metodo d'insegnamento non può essere che uno, cioè che tutte le singole parti siano strettamente collegate tra loro e svolte con ordine razionale e con processo rigorosamente scientifico. Di questo metodo è appunto Euclide insuperabile maestro.

E poi:

Si raccomanda al docente che si attenga al metodo euclideo, perché questo è il più proprio a creare nelle menti giovanili l'abitudine al rigore inflessibile del raziocinio. Soprattutto non si intorbidi la purezza della geometria antica, trasformando i teoremi geometrici in formule algebriche cioè sostituendo alle grandezze concrete (linee, angoli, superfici, volumi) le loro misure: ma avvezzi i suoi scolari a ragionare sempre sulle prime, anche là dove se ne considerano i rapporti.

---

[2] L. Cremona e F. Brioschi, *Lettera al Direttore*, Giornale di Matematiche del Battaglini, Napoli, VII, 1869.

[3] Regio decreto 10 ottobre 1867, n. 1942. Ministro Coppino.

I programmi proposti ed in particolare l'introduzione degli *Elementi* di Euclide suscitarono molte critiche e molti clamori, tanto più che proprio in quel tempo andava rafforzandosi in Inghilterra una forte e vivace opposizione ad Euclide che portò, poco più tardi, alla fondazione di tre Associazioni che avevano per programma il rinnovamento dell'insegnamento della matematica ed in particolare della geometria in Inghilterra: il *Committee of the British Association*, il *Body of Head Master*, e l'*Association for the improvement of geometrical teaching*. È bene osservare che, per quanto risulta da una dichiarazione fatta all'Hirst nel 1869 dal Cremona [4] l'introduzione degli Elementi di Euclide come libro di testo fu dovuta non tanto per il convincimento che il trattato euclideo rappresentasse senz'altro la perfezione, quanto per il desiderio di liberare la scuola da una quantità di libercoli male pensati e peggio scritti, che non potevano non recare all'insegnamento della geometria danni gravissimi, e per l'assoluta mancanza di un buon manuale moderno che, per dirla appunto col Cremona e con l'Hirst, potesse considerarsi come un EUCLID REVISED e non come un EUCLID DISFIGURED [5].

Così, sul finire, del 1870 il Ministero limitò con una sua circolare ai primi sei libri l'obbligo dell'adozione del testo euclideo e lasciò liberi gli insegnanti di scegliere un buon trattato moderno per la geometria solida. Dopo il Ministero, chiarì che la disposizione riguardante l'uso del libro di Euclide era da intendersi non come l'imposizione pura e semplice del testo euclideo originale, ma come la necessità di avere un libro che serbasse di quella classica opera la bontà e la purezza del metodo, pur sottoponendola alle necessarie semplificazioni od estensioni e ai necessari emendamenti.

Però, se da una parte la nuova scuola italiana aveva bisogno di programmi nuovi e validi che dettassero obiettivi e contenuti uguali per tutte le scuole nelle varie regioni d'Italia, dall'altra la situazione italiana precedente aveva portato ad una dipendenza dell'editoria italiana dai testi di Autori stranieri, determinando così l'assenza totale di una trattatistica prettamente italiana. È emblematico quanto scriveva Cremona [6] a tale proposito nel 1860:

Ora che il giogo straniero non ci sta più sul collo a imporci gli scelleratissimi testi di Moznok, Toffoli, ecc., che per più anni hanno inondato le nostre scuole, e le avrebbero del tutto imbarbarito se tutti i maestri fossero stati docili

---

[4] *Un discorso del prof. Hirst sopra Euclide come libro di testo*, Giornale di matematiche del Battaglini, 1871, vol. IX, pag. 180

[5] L. Cremona e F. Brioschi, *Lettera al Direttore*, Giornale di Matematiche del Battaglini, Napoli, VII, 1869.

[6] L. Cremona, *Considerazioni di storia della Geometria*, Politecnico, Milano, 1860, n. 6.

a servire gli interessi della ditta Gerold, ora sarebbe ormai tempo di gettare al fuoco anche certi libracci di matematica che tuttora si adoperano in qualche nostro liceo e che fanno un terribile atto di accusa contro chi li ha adottati.

Diciamolo francamente: noi non abbiamo buoni libri elementari che siano originali italiani e giungano al livello dei progressi odierni della scienza. Forse ne hanno i Napoletani che furono sempre e sono egregi cultori delle matematiche; ma come si può aversene certa notizia se quel paese è più diviso da noi che se fosse la China?

In particolare, per quanto riguarda la geometria, i principali testi adoperati erano traduzioni o s'ispiravano ancora al trattato di Legendre, *Eléments de géométrie*, che, edito per la prima volta a Parigi nel 1784, aveva avuto una larghissima diffusione e numerose edizioni (ancora nel 1840 abbiamo la 19^a edita a Bruxelles). Più recenti e più aggiornati erano i trattati di Amiot e di Bertrand, dei quali il primo tendeva a fare entrare nell'ambito dell'insegnamento secondario i nuovi concetti della geometria proiettiva (sezione armonica, involuzioni, polari reciproche); questi trattati erano stati tradotti in italiano, il primo dal Novi, il secondo dallo stesso Novi e dal Betti, ricevendo un giudizio favorevole da parte del Cremona:

I migliori libri, anzi gli unici veramente buoni che un coscienzioso maestro di matematica elementare possa adottare nel suo insegnamento, sono i trattati di Amiot, Bertrand e Serret, così bene tradotti ed ampliati da quei valenti toscani.

Questa situazione riguardante l'editoria matematica preoccupò e non poco il Ministero della pubblica istruzione in quanto non indicando più il libro di Euclide come libro cui gli insegnanti potessero fare riferimento nel loro insegnamento, non aveva libri ritenuti validi da potere segnalare. Il Ministero pertanto bandì concorsi *per un trattato di geometria elementare che si attenesse rigorosamente al metodo euclideo e contenesse quella parte di scienza posteriore all'Euclide che ormai si trovava in tutti gli Elementi di Geometria adoperati come testi nelle scuole classiche delle nazioni più colte*. I concorsi banditi furono due, l'uno nel novembre del 1871 e l'altro nel gennaio del 1875, ma non sortirono l'effetto voluto perchè in entrambi i concorsi nessun concorrente fu dichiarato meritevole di premio.

Queste sollecitazioni ministeriali, i nuovi programmi di insegnamento, l'impegno per un radicale rinnovamento nell'insegnamento di studiosi quali Battaglini, Brioschi e sopratutto Cremona, gli studi critici sui fondamenti della matematica, che portano ad una revisione dei fondamenti dell'analisi da parte del Dini e dei fondamenti della geometria da parte del Veronese, del Peano e del Pieri, stimolano la produzione di testi per le scuole. *E da siffatto ambiente trae origine una spiccata caratteristica dei testi scolastici italiani di matematica* *rispetto agli stranieri e cioè una preminente preoccupazione del rigore logico tanto nella sistemazione generale del trattato quanto nella cura dei particolari; caratteristica che non ha mai cessato di sussistere nei suoi aspetti essenziali e veramente giovevoli ai buoni studi, perché rispondenti allo spirito nazionale italiano* [7]. Nascono così trattati quali quello di Sannia e D'Ovidio [8], di Faifofer [9], di De Paolis [10] che contribuirono ad educare a quel giusto pensiero tante generazioni di giovani.

In questo modo nasce quella che è stata chiamata giustamente la

TRADIZIONE ITALIANA NELL'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA,

tutta ispirata e solidamente fondata su quel principio, dettato da Brioschi e Cremona:

APPRENDERE A RAGIONARE, A DIMOSTRARE, A DEDURRE.

3. Libri di testo italiani di Geometria prima dei Grundlagen der Geometrie.

Tutti gli stimoli indirizzati agli Autori dei libri di testo sortirono il loro effetto. Furono pubblicati vari libri di Geometria che si ispiravano al metodo euclideo.

Il metodo euclideo, prescindendo dalle lacune che si possono riscontrare nei classici Elementi, e di cui non è da meravigliarsi se pensiamo alla loro secolare vetustà, è un metodo spiccatamente razionale e deduttivo. Sono poste delle definizioni e dei postulati della massima generalità e poi si cerca di ottenerne le conseguenze più interessanti mediante una serie di teoremi, in rigorosa concatenazione logica tra di loro che, data la forma rigidamente dogmatica, non lascia mai intravedere l'origine e le motivazioni delle singole proposizioni e la via che condusse a scoprirle.

Così, nei primi trattati di Geometria elementare (Sannia e D'Ovidio, Faifofer, De Paolis, ...) s'introducono per esempio le nozioni generalissime di linea e di superficie, e tra la linee e le superficie si fissano poi, mediante postulati, la retta e il piano; e prima di parlare delle parti in cui una retta è divisa da un suo punto o un piano da una sua retta, si parla delle parti in cui una linea è divisa da un suo punto o una superficie da una sua linea.

---

[7] L. Brusotti, *Questioni didattiche*, Enciclopedia delle Matematiche elementari, Milano, Hoepli, v. III, p. II.

[8] A. Sannia e E. D'Ovidio, *Elementi di Geometria*, Napoli, Pellerano, 1869.

[9] A. Faifofer, *Elementi di Geometria*, Venezia, tip. Emiliana, 1878.

[10] R. De Paolis, *Elementi di Geometria*, Torino, Loescher, 1884.

In tutti i trattati che prenderemo in considerazione in questo paragrafo e nel successivo esamineremo principalmente quelli che sono i concetti primitivi che sono alla base della trattazione e come viene sviluppata l'uguaglianza tra le figure, ritenendo questi gli elementi più significativi di ogni trattazione.

Tutti i trattati esaminati si riferiscono ai programmi di Geometria nei licei classici e scientifici, non prenderemo in esame altri trattati per altri tipi di scuole perché in tali scuole i programmi prevedono obiettivi diversi.

Esamineremo, ora, i trattati di Sannia e D'Ovidio e di Faifofer, perché sono stati i testi che hanno avuto, fra tutti, il maggior numero di adozioni nelle scuole e per molti anni, e quello di De Paolis per le idee innovative che propugnava.

Il trattato di De Paolis segue la tendenza *fusionista* che allora aveva non pochi sostenitori. Ecco che cosa il De Paolis scriveva nella prefazione del suo libro:

Scrivendo questi Elementi mi proposi un doppio scopo: abbandonare l'antica separazione della Geometria piana dalla solida, tentare di stabilire rigorosamente le verità della Geometria e le teorie dell'equivalenza, dei limiti, della misura. È naturale che io dovessi sempre cercare il rigore scientifico, ed apparirà dalle seguenti considerazioni perché volli fondere la Geometria piana colla solida.

Esiste molta analogia tra certe figure del piano e certe figure dello spazio, studiandole separatamente rinunziamo a conoscere tutte le cose che questa analogia ci insegna, e cadiamo volontariamente in ripetizioni inutili. Di più obbligandoci a cercare le proprietà di una linea o di una superficie, senza potere utilizzare gli enti geometrici posti fuori della linea o della superficie stessa, limitiamo le forze di cui possiamo disporre, e rinunziamo spontaneamente a materiali geometrici coi quali si potrebbero semplificare le costruzioni e le dimostrazioni. Infatti, come si può costruire il punto medio di un dato segmento senza uscire dal segmento stesso? [...]

Non si obietti che per i principianti sia più facile concepire un angolo che un diedro, un triangolo che un triedro; è perché si costringe la mente degli allievi a pensare e disegnare solamente figure piane nei primi anni dei loro studi geometrici, se trovano in seguito difficoltà, quando sono costretti a pensare e disegnare figure solide.

Per il De Paolis sono concetti primitivi la nozione di punto, di retta, di piano che chiama *elementi fondamentali*. L'uguaglianza delle figure è basata sul concetto di movimento che è regolato dal seguente postulato:

1° In tutto lo spazio è possibile il movimento delle figure geometriche, e senza deformazione.

2° *Una figura si può muovere tenendo fisso uno dei suoi punti.*

3° *Una figura si può muovere tenendo fissi tutti i suoi punti situati sopra una stessa retta.*

4° *Per fissare una figura è necessario e sufficiente fissare tre dei suoi punti, non situati sopra una stessa retta.*

Il testo di De Paolis si distingue anche per la presenza di un'appendice contenente note critico storiche, tra esse è da segnalare la diciannovesima nella quale è svolta una teoria delle parallele indipendente dal postulato di Euclide con una prima idea della geometria non euclidea.

Questo trattato ebbe favorevole accoglienza presso i docenti che incominciarono a sperimentare la fusione tra planimetria e stereometria. Ma i programmi ministeriali prescrivendo una netta scansione della disciplina per anno, interruppero le esperienze di fusione che in quell'epoca si stavano conducendo. Pertanto le sperimentazioni cessarono e il libro di De Paolis non venne più adottato nelle scuole.

I trattati di Sannia e D'Ovidio e di Faifofer ebbero una larghissima diffusione nelle scuole e furono adottati per molti decenni, come indicano le molte edizioni che ne furono fatte anche per rimanere sempre coerenti con i programmi vigenti.

Sia Sannia e D'Ovidio che Faifofer scrivono i loro trattati mantenendo una netta distinzione tra Geometria piana e Geometria solida, rimangono, però, sempre fedeli allo spirito ed al metodo euclideo. Per questi Autori i concetti di punto, retta, piano sono assunti come primitivi e le loro proprietà sono assegnate come postulati.

Ecco come Sannia e D'Ovidio introducono la retta:

Fra le linee consideriamo in primo luogo la retta. Tutti abbiamo una idea della retta, ma non sappiamo definirla. E però ne segnaleremo le proprietà caratteristiche mediante i seguenti postulati:

1° *Fra le linee ve ne è una, chiamata retta, la quale possiede tutte le seguenti proprietà.*

2° *Ciascun punto della retta la divide in due parti, che si estendono senza interruzione e senza limite.*

3° *Una delle due parti in cui una retta è divisa da un suo punto, rotando intorno a questo punto, può venire a passare per un punto qualunque dello spazio.*

4° *Per due punti passa una retta sola.*

5° Un punto può muoversi nella retta in guisa da venire ad occupare prima una data posizione e poi un'altra, e senza mai ritornare in una posizione già occupata.

6° Se in una retta due punti stanno da bande opposte di un terzo, un punto che si muova sulla retta andando dal primo al secondo, dovrà passare pel terzo.

7° Una retta può muoversi senza mutar posizione, modo che tutti i suoi punti si muovano su di essa in una stessa direzione assegnata.

8° Due punti di una retta dividono la retta in tre parti: una limitata dai due punti e le altre due illimitate.

La nozione di uguaglianza, sia negli *Elementi* di Sannia e D'Ovidio che negli *Elementi* di Faifofer, viene introdotta in base alla nozione intuitiva di movimento, assunto come primitivo e soddisfacente certi postulati.

Ecco come Faifofer parla del movimento:

Col mezzo dei sensi ci formiamo l'idea del movimento, idea del movimento che non sappiamo definire. Determiniamo l'uso che intendiamo farne mediante il seguente:

Postulato del movimento:

1° Qualunque figura si può muovere nello spazio senza deformazione, e in modo che un suo punto assegnato vada a coincidere con un'altro punto assegnato dello spazio.

2° Una figura può muoversi (senza deformazione) pur rimanendo fisso uno dei suoi punti.

3° Una figura può muoversi (senza deformazione) pur rimanendo fissi due dei suoi punti.

Faifofer prevedendo le obiezioni che una tale definizione di movimento poteva determinare sente la necessità di giustificare la scelta fatta, ed in nota scrive:

Intendiamo dire che la figura in qualunque nuova posizione assunta col movimento, è uguale a quella che era prima del movimento. (Nell'ordinaria definizione di eguaglianza di due figure è fatto uso del concetto d'uguaglianza. Non conoscendo definizione immune da codesto difetto, non ne abbiamo dato nessuna).

In definitiva la nozione di uguaglianza a cui Sannia e D'Ovidio e Faifofer si riferiscono nei loro trattati è la seguente:

Due Figure son dette uguali quando possono portarsi, con un movimento, a coincidere.

Nei due trattati la materia sviluppata è molto ampia e le nozioni e le questioni affrontate sono molte e varie; ricca è anche la raccolta di esercizi proposti agli allievi; nel trattato di Sannia e D'Ovidio gli esercizi sono proposti distinguendo quelli che sono considerati come teoremi, quelli che sono considerati come luoghi, e quelli che sono considerati come problemi.

Naturalmente oltre i tre testi qui considerati, contemporaneamente parecchi altri trattati sono stati pubblicati, in buona parte che si ispiravano ai testi qui considerati. I tre qui presi in esame sono stati, però, indubbiamente i più significativi, per quel periodo, sia per le problematiche e i temi che hanno affrontato sia per le soluzioni proposte.

Alla fine di questa sezione vorrei osservare come, nella loro generalità, tutti i trattati pubblicati in questo periodo hanno per titolo *Elementi di Geometria* come a richiamare lo stretto legame cogli *Elementi* di Euclide sia nei contenuti, sia nel metodo con cui tali contenuti sono sviluppati.

4. I libri di testo italiani di Geometria dopo la pubblicazione dei Grundlagen der Geometrie.

Anche dopo la pubblicazione dei *Grundlagen der Geometrie* notevole è stata la trattatistica italiana per quanto riguarda la Geometria. Esamineremo, soltanto, i più significativi trattati pubblicati in quel periodo e che mostrano come i vari Autori risentano del travaglio che la scuola italiana stava attraversando in quel momento e dei riflessi delle ricerche sui fondamenti della Geometria condotte in quel periodo da vari studiosi italiani e stranieri.

Nel 1900 dal Ministro della pubblica istruzione Gallo sono emanati nuovi programmi [11] di insegnamento. In tale programma per la prima volta non si fa più esplicito riferimento agli *Elementi* di Euclide, ma vengono elencati i diversi argomenti che dovranno essere svolti nelle varie classi; inoltre il criterio di distribuzione degli argomenti non segue quello euclideo, ma lo modifica accettando per alcune nozioni il metodo *fusionista*: per esempio è previsto lo studio dell'*equivalenza di figure piane e solide*, della *similitudine di figure piane e solide*, della *teoria della misura e sua applicazione ai poligoni piani, al cerchio e alla sua circonferenza, ai solidi poliedrici e rotondi e alle rispettive parti più notevoli.* Tuttavia il metodo fusionista non viene prescritto anche perché allora assai vivace era il dibattito sull'opportunità di introdurre o meno il metodo fusionista nell'insegnamento secondario.

---

[11] Regio decreto del 24-10-1900, n. 361.

Particolare importanza hanno le istruzioni didattiche introdotte nelle premesse ai programmi perché oltre a riportare *testualmente e per intero* le vecchie indicazioni didattiche dei precedenti programmi ne vengono introdotte delle nuove:

Le disquisizioni sui fondamenti della scienza sono escluse dalla scuola, ma l'insegnante non mancherà di far notare agli allievi le analogie e le differenze che passano fra alcuni enti, a man mano che se ne svelano le proprietà.... ed alla fine del corso di studi potrà richiamare brevemente l'attenzione degli alunni sulla natura e sull'ufficio di alcune proposizioni elementari e sul nesso delle proprietà che appartengono ad una data teoria.

Traspare chiaro, da quanto indica il Ministero, sia la preoccupazione di evitare che nelle scuole secondarie vengano impartiti e senza le necessarie cautele, i risultati di quella *critica dei principi* che in quel periodo era particolarmente rivolta ai fondamenti della matematica e sia il desiderio di riservare la fase terminale degli studi secondari ad una riflessione sui fondamenti.

Proprio in quegli anni la revisione dei fondamenti della Geometria suscitava un grande interesse presso gli studiosi e trovava i suoi maggiori esponenti in M. Pasch, G. Veronese, G. Peano, M. Pieri e D. Hilbert:

– Pasch con i suoi *Vorlesungen über neuere Geometrie* [12] affrontò per primo il problema dei fondamenti individuando le condizioni cui deve soddisfare una esposizione deduttiva per essere veramente rigorosa. Egli inoltre fu il primo a dare un insieme di assiomi per l'ordinamento dei punti sulla retta;

– il secondo nei suoi *Fondamenti di Geometria* [13] esponeva per la prima volta sinteticamente la geometria degli spazi lineari ad *n* dimensioni con un sistema di postulati valido per le tre geometrie, ellittica, parabolica ed iperbolica, ed indipendente dal postulato di Archimede;

– il terzo con i suoi *Principi di Geometria* [14] e i suoi *Fondamenti della Geometria* [15] effettua una revisione critica dei fondamenti alla luce dei metodi e con il simbolismo della logica matematica pervenendo a risultati interessanti e suscettibili di applicazioni didattiche;

---

[12] M. Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie,* Lipsia, 1882

[13] G. Veronese, *Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee,* Padova, Tip. Del Seminario, 1891.

[14] G. Peano, *I principi di Geometria logicamente esposti,* Torino, F.lli Bocca, 1889

[15] G. Peano, *Sui fondamenti della Geometria,* Rivista di matematica, vol. IV, 1894

– il quarto nei lavori *Della Geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo* [17] e *La geometria elementare istituita sulle nozioni di "punto" e "sfera"* [17] sviluppa con semplicità e rigore la possibilità di ottenere tutta quanta la geometria elementare partendo dalle nozioni di punto e sfera;

– l'Hilbert, infine, nei suoi *Grundlagen der Geometrie* [18] dà una sistemazione della Geometria sia rigorosa dal punto di vista assiomatico, sia elementare dal punto di vista didattico, e che permette di costruire, quando si elimina uno dei cinque gruppi in cui i postulati sono elencati, differenti tipi di geometria, non euclidea, non archimedea, ecc...

È chiaro quindi, come da una parte gli insegnanti delle scuole secondarie, provenienti da ambienti universitari dove le questioni critiche erano di viva attualità, avessero la tendenza a trasferire le loro conoscenze e le loro abitudini critiche nell'insegnamento, e come dall'altra parte il legislatore sentisse viva la necessità ed il bisogno di impedire che tale tendenza si concretizzasse a danno dei giovani allievi. La preoccupazione maggiore del legislatore è quella di evitare che le questioni critiche siano presentate nel momento didatticamente più delicato dell'insegnamento, all'inizio dello studio razionale della geometria, dove per altro le stesse questioni si presentano più frequentemente per la loro natura, mentre si dichiara pienamente favorevole ad una revisione critica, da farsi alla fine del corso degli studi, quando cioè la maggiore maturità degli allievi e la quantità di materia studiata permettono loro di ottenere una più esatta visione di una teoria.

Però il pressante invito che proveniva dagli estensori dei programmi non sembra che sia stato accolto ed opportunamente sviluppato dagli Autori di libri di testo o dagli stessi insegnanti, nè sembra che siano state adeguatamente recepite le raccomandazioni ministeriali; i trattati pubblicati in questo periodo non rinunziano all'impostazione critica, pur sforzandosi di contemperare questa con le esigenze didattiche.

Così, Veronese pubblica nel 1900, in collaborazione con P. Cazzaniga, un trattato [20] di geometria elementare in cui si ritrovano i suoi studi critici sui fondamenti della geometria.

---

[17] M. Pieri, *Della Geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo. Monografia del punto e del moto.* Memorie della R. Accademia della Scienze di Torino, (2), 49, 1898-99.

[17] M. Pieri, *La geometria elementare istituita sulle nozioni di "punto" e "sfera".* Memorie Soc. Ital. Scienze (detta dei XL) (3), 15, 1908.

[18] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie,* Leipzig, Teubner, 1889.

[20] G. Veronese, *Elementi di Geometria* (trattati colla collaborazione di P. Cazzaniga), Verona-Padova, F.lli Drucker, 1900.

Il Veronese ha la preoccupazione di presentare un sistema di proposizioni astratte, indipendenti dal loro significato geometrico, logicamente determinate. Siccome però i postulati della geometria devono esprimere le nozioni primitive che relativamente alle forme geometriche vengono in noi suscitate dall'osservazione degli oggetti che rappresentano quelle forme nel campo dei sensi, così ogni postulato è preceduto da alcune considerazioni (osservazioni empiriche) fatte sugli oggetti suddetti. Si tratta di considerazioni che non hanno nessun legame necessario collo sviluppo teorico della materia, ma presentano soltanto interesse didattico perchè destinate ad agevolare all'alunno la migliore comprensione dei postulati che le seguono, cosicchè esse possono venir modificate a piacere dall'insegnante ed anche tralasciate. Ed è molto importante notare che quelle osservazioni non hanno nessun legame necessario con lo sviluppo teorico della materia perché *dal sistema di proposizioni geometriche contenute nel testo, facendo astrazione dall'intuizione spaziale (vale a dire dal loro significato geometrico) rimane un sistema di verità astratte logicamente ben determinato come nell'aritmetica.* Così creata l'idea astratta del punto, i primi postulati che ammette sono:

I. Esistono punti distinti.

II. Esiste un sistema lineare detto segmento rettilineo, o retta limitata, tale che:

1) *Tra due segmenti qualsivogliano a e b di esso considerati in un dato verso, ha luogo uno ed uno solo dei due fatti, il primo dei quali esprimiamo dicendo che: a è uguale a b, e l'altro dicendo che: a non è uguale a b.*
2) *Se a è uguale a b, a e b si possono far corrispondere univocamente nel medesimo ordine in modo che le parti dell'uno siano pure uguali alle parti corrispondenti dell'altro.*

La linea retta o semplicemente *retta* viene definita come la figura data da un gruppo di segmenti rettilinei soddisfacenti a certe proprietà. Originali poi sono la definizione di rette parallele ed il relativo postulato:

- *Due rette diconsi parallele se una di esse contiene due punti opposti a due punti dell'altra rispetto al punto di mezzo di una loro trasversale comune.*
- **Postulato.** *Se due rette sono parallele, esse sono figure opposte l'una all'altra rispetto al punto di mezzo di ogni loro segmento trasversale.*

L'uguaglianza delle figure, poi, è fondata sulla nozione primitiva dell'uguaglianza fra segmenti e sul concetto di corrispondenza nella sua generale accezione in modo tale da considerare anche quelle figure cosiddette simmetriche le quali seguendo il metodo del movimento debbono essere tolte dal dominio del concetto generale di uguaglianza a cui ovviamente appartengono.

Infine la distribuzione della materia segue un percorso *fusionista* per certi argomenti.

Il testo del Veronese, originale e di alto valore scientifico, forse per il suo discostarsi parecchio dai trattati tradizionali non ha avuto presso i docenti e gli studenti quell'accoglimento che indubbiamente meritava.

Nel 1901 M. De Franchis, a soli ventisei anni, redige un testo di Geometria che in forma definitiva è pubblicato nel 1909 [20]. Si tratta di una poderosa opera che contiene uno svolgimento esclusivamente logico-deduttivo della geometria elementare e che si differenzia dai trattati in quel tempo in auge, e ciò non tanto per gli argomenti trattati che sono quelli stessi affrontati dai vari Autori, quanto per l'impostazione che viene data e per il modo come è affrontata e sviluppata l'intera materia.

Il De Franchis assume solo due enti primitivi: il punto e il segmento, definisce poi i prolungamenti di un segmento e chiama retta la figura costituita da un segmento e dai suoi prolungamenti.

Detta poi *ombra* (secondo una denominazione di Peano) di una figura K rispetto a una figura H la figura costituita dal prolungamento dei segmenti i quali congiungono i punti di H coi punti di K, tali prolungamenti essendo presi dalla parte dei punti di K, il De Franchis definisce semipiano come l'ombra di una retta rispetto ad un punto esterno ad essa e piano come l'insieme di due semipiani opposti.

La nozione di uguaglianza De Franchis la basa sulla considerazione di un certo gruppo di trasformazioni (o corrispondenze) biunivoche puntuali dello spazio in sè. Egli considera il gruppo delle corrispondenze biunivoche dello spazio in sè che conservano l'allineamento tra punti, la congruenza tra segmenti corrispondenti e tali che o non hanno punti uniti (le traslazioni e le elicomozioni), o hanno una retta di punti uniti (le rotazioni), o hanno tutti i punti uniti (l'identità). Cioè quello che noi oggi chiamiamo il gruppo delle isometrie dirette dello spazio. Tali corrispondenze sono chiamate dal De Franchis *movimenti* e gli permettono di ottenere la sovrapponibilità delle figure piane e spaziali (si osservi che in tal modo, per esempio, due triedri opposti al vertice non sono uguali secondo De Franchis, perché non sovrapponibili).

Ecco come il De Franchis introduce i movimenti:

Diconsi movimenti le operazioni fatte sui punti di una qualunque figura e che soddisfano alle seguenti proprietà:

1. *Ogni movimento è un'operazione biunivoca.*
2. *Il prodotto di due movimenti è un movimento.*

---

[20] M. De Franchis, *Geometria elementare,* Sandron, Palermo, 1909

3. Dato un movimento, l'operazione inversa di esso è pure un movimento.

4. Se un movimento porta (ossia trasforma) due punti A e B, rispettivamente in due punti C, D, ogni punto del segmento AB viene portato in un punto del segmento CD.

5. Nessun movimento può trasformare un segmento AB in un segmento contenuto in AB e che non sia tutto AB.

6. Dato un angolo, non esiste un movimento fatto su di esso che lasciando inalterato il vertice, trasformi l'angolo in una sua parte, che non sia tutto l'angolo.

7. Un segmento AB, può mercè un movimento, trasformarsi in guisa che uno qualunque dei suoi estremi vada a coincidere coll'origine di una semiretta data, mentre l'altro estremo va a giacere sulla stessa semiretta.

8. Se un triangolo ha due vertici sull'origine di un semipiano, esiste un movimento fatto sul triangolo, che lascia fermi quei vertici e conduce il rimanente vertice a giacere sul semipiano.

9. Se tre punti di una figura i quali non siano in linea retta, restano inalterati con un movimento, questo lascia inalterati anche tutti gli altri punti e perciò è l'identità.

Postulato. *Esistono i movimenti.*

Ne segue la definizione di uguaglianza:

Se una figura a si può portare a coincidere, mercè un movimento, con una figura b, si dice che le figura a e b sono uguali e scrivesi a=b.

Il metodo scelto dal De Franchis è veramente notevole per il rigore, la precisione e oggi per la sua attualità: come è noto uno degli aspetti più attuali nello studio della Geometria elementare è quello di considerare le proprietà invarianti delle figure rispetto ad un gruppo di trasformazioni.

Da questi brevi cenni sul trattato appare chiaro come il De Franchis seguisse nella scelta della postulazione quanto aveva indicato Peano; inoltre l'avere costruito tutto a partire dalla nozione di punto e segmento fa apparire il testo del De Franchis come una riedizione in chiave moderna degli *Elementi* di Euclide. Ricordiamo che Euclide per retta intende il segmento.

Da quanto abbiamo rapidamente illustrato, credo traspaia come il testo scritto dal De Franchis sia un testo che non nasce come imitazione di altri testi, ma piuttosto come una qualche cosa di meditato e pensato autonomamente. In due punti se ne può riscontrare la particolare importanza:

I. Nel fatto che il De Franchis cerchi sempre di inquadrare le varie questioni in teorie, per quanto possibile, generali, raggiungendo con ciò lo scopo di presentare una costruzione unitaria ed armonica della Geometria e non fatta da tanti aspetti che a prima vista appaiono slegati.

II. Nell'avere affrontato per la prima volta a livello didattico il problema della uguaglianza delle figure coll'utilizzo delle trasformazioni secondo le vedute che Klein da una parte e Peano dall'altra andavano sviluppando.

Ne è venuta una trattazione rigorosa e chiara che forse per il fatto che trattavasi per la prima volta in cui sono affrontati questi argomenti è risultata un poco pesante specialmente dal lato didattico, data la poca familiarità che gli allievi avevano con certi concetti quale quello di trasformazione. Oggi, che gli indirizzi per lo studio della Geometria sono rivolti a considerare le proprietà invarianti delle figure rispetto agli elementi di un gruppo di trasformazioni, la trattazione di De Franchis acquista un valore di modernità, ha una particolare importanza e rappresenta uno dei modi per come presentare queste cose agli allievi.

G. Marletta nei suoi *Principi di Geometria euclidea* [21] affronta le varie questioni sulla postulazione e i fondamenti della geometria elementare e poi scrive un testo [22] che incontrò un grande favore presso le scuole tanto che una sua edizione fu fatta in occasione del cinquantenario della prima.

La trattazione, estesa al programma tradizionale di geometria per le scuole secondarie superiori è tutta sviluppata secondo le norme di rigore dettate dalla critica sui fondamenti così che il libro occupa un buon posto fra quei testi di geometria elementare che, in questo ultimo periodo, hanno iniziato ed affermato brillantemente il rinnovamento scientifico-didattico nel nostro paese.

Seguendo il Peano, Marletta assume come primitivi solo i concetti di punto e di segmento, e definisce tutte le altre figure, fondando lo sviluppo logico delle loro proprietà sopra un sistema di postulati che appare didatticamente conveniente. Ai postulati necessari ne sono aggiunti, per semplicità e snellezza di trattazione alcuni altri che in realtà sono teoremi, e lo stesso Autore indica quali fra le proposizioni dimostrate nelle prime pagine del testo potrebbero essere assunte come primitive per avviare più rapidamente lo sviluppo della materia tutta.

La definizione di rette parallele è nuova ed originale; infatti secondo Marletta due rette si dicono parallele se esiste un semipiano avente una di esse per origine e contenente tutti i punti dell'altra. Quanto poi l'esistenza di una (ed una sola) retta parallela ad una retta data e passante per un punto dato è

[21] *Periodico di matematica per l'insegnamento secondario*, a. XX

[22] G. Marletta, *Trattato di Geometria elementare ad uso delle scuole secondarie superiori*, Catania, Giannotta, 1912.

affermata da un postulato. Questa definizione di rette parallele è indipendente dalla nozione di piano ed anzi permette di definire in maniera diversa il piano.

Per quanto riguarda l'uguaglianza delle figure il Marletta non si è discostato dal Veronese, ma con l'intervento di opportuni postulati egli è riuscito a semplificare la definizione generale di uguaglianza e a rendere più agile tutta la trattazione.

L'accoglienza che il testo del Marletta ha avuto testimonia che la via scelta nel trattare i vari argomenti risultava didatticamente efficace.

Nel 1903 F. Enriques e U. Amaldi pubblicavano un testo [23] che tra tutti quelli che furono editi in quel periodo è stato quello che ha avuto maggior fortuna presso gli insegnanti e gli allievi. Un'ultima edizione del testo si è avuta nel 1990 a quasi cento anni dalla prima.

Il ritorno al titolo *Elementi di Geometria* per il loro testo sta ad indicare da parte degli Autori che si intende essere in collegamento ideale cogli *Elementi* di Euclide.

L'idea che gli Autori tengono presente nello scrivere il trattato è la seguente. La Geometria nelle scuole secondarie deve non solo coltivare la facoltà del ragionare, ma ben anche sviluppare lo spirito di osservazione negli allievi; e pertanto il trattato risulta costruito in questo modo.

Presentate una serie di osservazioni dedotte dal campo fisico, il risultato ne è espresso mediante l'enunciazione di postulati. Enunciati i postulati, vengono fatte deduzione logiche mediante definizioni e teoremi per ritornare poi da capo alle osservazioni di carattere intuitivo.

E così senza mai confondere l'esercizio delle due facoltà, quella del ragionare e quella dell'osservare, si può, pur rispettando il rigore scientifico, non rinunziare al valido sussidio dell'intuizione, che risparmia ragionamenti astrusi e discussioni noiose ai principianti.

Indubbiamente i *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert sono stati tenuti presenti ed hanno influenzato la progettazione di tutto il testo: così gli enti fondamentali della geometria sono i *punti*, le *rette*, i *piani* che vengono pensati tutti contenuti nello *spazio*. Sono poi enunciati i postulati di appartenenza e di ordine e le relative proprietà. Ma dove si nota maggiormente l'influsso dei *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert è a proposito della nozione di uguaglianza. Come Hilbert, Enriques ed Amaldi introducono la nozione di uguaglianza come primitiva per i segmenti e gli angoli, venendo poi a definirla, caso per caso, per le figure che successivamente si presentano: triangoli, poligoni, cerchi, ecc...

Così due *triangoli* sono detti *uguali* quando i lati e gli angoli dell'uno

[23] F. Enriques U. Amaldi, *Elementi di Geometria ad uso delle scuole secondarie superiori*, Bologna, Zanichelli, 1903.

sono ordinatamente uguali ai lati e agli angoli dell'altro. Definita in tal modo l'uguaglianza di due triangoli, ne viene postulato il primo criterio (*due lati e l'angolo compreso uguale*), e di esso viene data la verifica e la giustificazione mediante il movimento. La teoria dell'uguaglianza viene in tal modo basata sopra pochi postulati, verificati col movimento, ma è resa indipendente dal movimento e da ogni altra operazione fisica, essendo tutta deduzione logica dai postulati.

Enriques ed Amaldi ritengono che una tale teoria risulta pienamente in linea collo spirito euclideo. Osservano gli Autori che l'uso del movimento, nel senso fisico, negli *Elementi* di Euclide è ristretto a poche proposizioni (per riconoscere ad esempio, l'uguaglianza di due triangoli aventi uguali due lati e l'angolo compreso) cosicchè esso *appare affatto eccezionale: Euclide ha sentito che vi si racchiude un passaggio estralogico, perchè si astiene dal ricorrervi anche nei casi in cui avrebbe conferito al discorso un'evidenza immediata* [24].

Enriques ed Amaldi sono quindi dell'avviso che volendo seguire Euclide senza alterarne lo spirito, bisogna enunciare esplicitamente quei postulati da lui adoperati senza dirlo, ed in particolare assumere come ha fatto Hilbert, come postulato il risultato del ragionamento intuitivo di Euclide per il primo criterio di uguaglianza dei triangoli. Essi ritengono inoltre che il *concetto generale di corrispondenza costituisca una difficoltà per le giovani menti.*

Se, col loro metodo, non è data, sin da principio, la definizione generale di uguaglianza, gli Autori adoperano il movimento come mezzo intuitivo per riconoscere i primi casi di uguaglianza delle figure elementari, la cui definizione si riconduce al confronto di segmenti ed angoli, mentre è riservato ad un ultimo capitolo lo studio delle similitudini e dei movimenti, come trasformazioni del piano e dello spazio.

In conclusione Enriques ed Amaldi hanno scritto un testo che oltre ad essere un modello di rigore, è riuscito a contemperare bene le esigenze scientifiche con quelle didattiche in modo tale da raggiungere, insieme con l'esattezza logica, una chiarezza ed una semplicità insperate.

Il trattato di Enriques ed Amaldi fu preso a modello da vari Autori di libri di Geometria, e si ebbe un fiorire di testi che poco hanno di originale.

F. Severi, nel 1927, pubblica un trattato di Geometria [25] per le scuole medie che, sebbene apparso a distanza di parecchi anni dei trattati esaminati, ben si inserisce nella rassegna e nei confronti che abbiamo fin qui fatto.

Il Severi si prefigge di scrivere un testo che sia quanto più vicino agli

[24] F. Enriques U. Amaldi, *Elementi di Geometria*, Bologna, Zanichelli, 1929, parte II, p. 169

[25] F. Severi, *Elementi di Geometria*, Firenze, Vallecchi, 1927

Elementi di Euclide ma nel contempo rigoroso e in linea con la critica e le ricerche sui fondamenti che si erano sin ad allora avute, e nel quale lo studente si trovasse a suo agio nello studiarlo.

Il Severi lascia all'intuizione quel giusto spazio allo scopo di far sorgere quasi spontaneamente nella mente dello studente le definizioni e le prime proposizioni relative agli enti che si studiano; scrive per studenti e non per maestri, e, quindi, fa in modo che il postulato nasca dall'esperienza e che la definizione sia la più semplice possibile, quella che paia così semplice da non far neppure supporre nella mente di un principiante che possa esisterne un'altra.

Così i concetti di punto, di retta, e di piano, enti astratti, si considerano come già acquisiti dall'intuizione. Dice il Severi:

La rappresentazione mentale di questi enti astratti ci conduce ad attribuire loro talune proprietà, aventi carattere d'immediata evidenza.

Per due punti dati passa una sola retta.

Per tre punti dati, non allineati, passa un sol piano.

La retta passante per due dati punti di un piano giace interamente in esso.

Tali proprietà che si sono poste a priori, come derivanti direttamente dall'intuizione, diconsi "postulati".

Il Severi mette a base del concetto di uguaglianza la seguente osservazione empirica del movimento (nel senso fisico) di una figura rigida:

Sia F una figura di un piano α. Se con un movimento si porta α in una nuova posizione, α', la figura F va a finire in una nuova posizione F', per guisa che un punto di F, che inizialmente occupava la posizione A, viene portato in un punto A' di F'; e viceversa ogni punto di F' è posizione finale di un determinato punto di F. Di più, se alla figura F appartiene un segmento AB, questo viene portato in un segmento $A'B'$ di F'.

Il movimento genera dunque una *corrispondenza* biunivoca tra i punti delle figure F, F', cioè una relazione che associa ad ogni punto di F (posizione iniziale) un punto di F' (posizione finale) e ad ogni punto di F' (posizione finale) un punto di F (posizione iniziale). La corrispondenza associa inoltre ad ogni segmento rettilineo dell'una figura, un segmento rettilineo dell'altra: si chiama una relazione di *uguaglianza*.

Dunque, *due figure F, F' si dicono uguali, e si scrive $F = F'$, se esse si corrispondono in un movimento*, cioè se sono posizione iniziale e posizione finale di una medesima figura (rigida).

Si dice altresì, se $F = F'$, che esiste *un movimento che sovrappone o porta a coincidere F con F'.*

Il Severi enuncia quindi i postulati che servono a definire logicamente il concetto di movimento, che, dal punto di vista logico, è assunto come *primitivo*, cioè come un dato dell'intuizione. Ecco i postulati che definiscono il movimento:

Ogni figura è uguale a se stessa.

Se una figura è uguale ad un'altra, questa è uguale a quella.

Due figure uguali ad una terza, sono uguali tra loro.

Un movimento porta un piano in un piano; un semipiano in un semipiano; una retta in una retta; una semiretta in una semiretta; un segmento in un segmento.

Esiste un sol movimento, che porta α *coincidere con* α'*, in guisa che la semiretta* AB *vada sulla semiretta* AB' *ed il semipiano* α_0 *in* α'_0.

Un segmento non può essere uguale ad una sua parte.

In tal modo tutta la trattazione dell'uguaglianza delle figure piane acquista una forma piana e facile per gli allievi, pur restando sufficientemente rigorosa.

Sostanzialmente al Severi è parso naturale che tra il riscontro dell'imperfezione logica della trattazione euclidea, però molto vicina all'intuizione, e la non intuibilità a priori della trattazione hilbertiana, impeccabilmente logica, dovesse trovare posto un tentativo di dare assetto logico anche in una trattazione elementare alla forma più facilmente intuibile.

Il Severi è tra quelli che nella prima gioventù sono stati a contatto diretto (nella scuola e nello studio) coi critici dei fondamenti della matematica; ha vissuto i primi anni della vita di studioso nel periodo in cui erano nelle mani di tutti gli scritti di Pasch, Peano, Pieri, Veronese, Cantor, Hilbert, Dedekind, e nel quale si stavano ponendo per opera di Peano e Russell i fondamenti della logica matematica. In quel periodo sembrava che tutto quanto in fatto di fondamenti era stato scritto in antecedenza dovesse essere visto con diffidenza, se non addirittura buttato a mare. In quel tempo Poincarè nei suoi memorabili scritti filosofici doveva sostenere una lotta vivace per far riconoscere all'intuizione il diritto di entrare a testa alta nella costruzione dell'edificio matematico.

Orbene il Severi ha voluto e ha saputo fare un'opera che non s'appoggiasse sull'uno piuttosto che sull'altro indirizzo critico.

Coraggiosamente Egli è tornato alle fonti più pure dell'antichità e del secolo XIX, le ha passate al vaglio della critica moderna, evitando di prendere in considerazione quei rigorismi che, per il loro eccesso, finiscono col rimanere sterili; ed ha costruito un'opera veramente nuova, sotto certi aspetti originale e veramente utile per la scuola.

Purtroppo l'avvento della seconda guerra mondiale ed i movimenti internazionali per il rinnovamento dell'insegnamento della matematica susseguenti, non hanno permesso che il testo del Severi raggiungesse quella diffusione che meritava ed incidesse nell'insegnamento della Geometria.

La seconda guerra mondiale blocca ogni attività editoriale ed impedisce ogni scambio culturale tra i vari stati. Con la fine della guerra si riprendono i contatti e l'ambiente matematico internazionale viene scosso da intensi movimenti tendenti a rinnovare radicalmente tutto l'insegnamento matematico secondario ed a introdurre in esso i caratteri e lo spirito di quella che allora fu chiamata *matematica moderna.*

Nascono una serie di sperimentazioni che si modificano di anno in anno, ma nessuna si afferma. Scompaiono, nel silenzio come se non fossero mai state scritte, le indicazioni metodologiche che erano state il momento qualificante dei vari programmi italiani ed avevano influenzato tutta la trattatistica italiana. Non si parla più di quel trinomio *apprendere a ragionare, a dimostrare, a dedurre* che era stato il portabandiera dell'insegnamento della matematica in generale e della geometria in particolare. Si dice che è necessario avviare i giovani al processo di matematizzazione della realtà nei suoi vari aspetti (fisici, economici, biologici, sociali, ecc.) oltre che dare loro una formazione di base a livello preuniversitario.

Da tutto ciò ne viene che è necessario affiancare o meglio ancora sostituire il tradizionale metodo logico-deduttivo con un metodo operativo, basato sulla risoluzione dei problemi, tale da abituare l'alunno alla creatività da una parte e dare all'insegnamento stesso un carattere interdisciplinare dall'altro. Non occorre più sviluppare una teoria, ma acquisire quei metodi e quegli strumenti occorrenti per affrontare i problemi, ripromettendosi di inquadrare poi in una teoria le singole nozioni.

Si tratta, in definitiva, di un ribaltamento completo di quanto si pensava prima, ma ancora, a mio modo di vedere, non è stata tracciata chiaramente quale deve essere la via da seguire. Se si vuole concludere con una parola siamo in un momento non di *fusione* che doveva essere il punto di arrivo, ma in un momento di *confusione*.

5. Conclusione.

Come abbiamo visto la apparizione dei *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert è coincisa con l'inizio di un periodo in cui si assiste alla pubblicazione da parte di vari Autori di nuovi testi di Geometria per l'insegnamento nella scuola secondaria.

Sono testi in cui gli Autori traducono in proposte didattiche le ricerche personali sui fondamenti della Geometria o in cui gli Autori illustrano didatticamente il sistema ipotetico deduttivo sviluppato da altro ricercatore. Sono testi, però, che hanno in comune un unico intento: quello di sviluppare logicamente e rigorosamente la Geometria come un sistema ipotetico deduttivo.

Inoltre, è merito degli Autori avere scritto dei testi meditati, rigorosi che tengono presenti le indicazioni programmatiche e le richieste metodologiche prescritte dai programmi di insegnamento e che risultano, per quanto possibile, di facile comprensione per gli studenti.

Fra tutti i vari testi di questo periodo la migliore fortuna la ha avuta il testo di Enriques ed Amaldi e ciò è testimoniato sia dal gran numero di adozioni nelle scuole, sia dal lungo tempo in cui è stato adottato nelle scuole, ma anche dalle varie e molteplici imitazioni.

In tale testo il quadro sviluppato dai *Grundlagen der Geometrie* risulta perfettamente fuso colla via italiana nell'insegnamento della Geometria. Si può pertanto dire che i *Grundlagen der Geometrie* hanno avuto un influsso notevole e fondamentale nella stesura di libri di testo italiani di geometria.

Un discorso a parte va fatto per il testo di Severi, esso non nasce come trasposizione didattica di ricerche sui fondamenti della Geometria dell'Autore o di altro ricercatore ma come un tentativo di fondere assieme risultati elaborati in vari contesti. Questo poteva essere un esempio che indicava una via da seguire nella concezione e nella stesura di libri di testo. Purtroppo, come si è visto, il lodevole tentativo non ha avuto un seguito per cause esterne.

I vari movimenti di rinnovamento dell'insegnamento della matematica in generale e della geometria in particolare sviluppatisi negli ultimi decenni, hanno avuto come conseguenza che quelle che erano state le motivazioni che stavano alla base dell'insegnamento non fossero più valide. Ciò ha fatto si che la geometria è scesa da quel piedistallo da cui dominava la matematica senza trovare una nuova precisa collocazione nell'ambito dell'insegnamento. Per esempio, non si è ancora chiarito il ruolo che le trasformazioni elementari hanno in un curriculum di geometria: se esse rientrano tra i fondamenti in modo da costruire così una geometria secondo la visione dinamica di Klein [26], o da essere uno degli argomenti di studio, alla pari degli altri, in un programma di geometria.

Da tutto ciò ne segue che, in questi ultimi tempi, si hanno da una parte libri di testo di geometria che in un qualche modo si richiamano alla vecchia via italiana e si rifanno alla tradizione e dall'altra libri in cui la geometria è fusa con l'aritmetica e l'algebra, relegando con ciò la geometria ad un ruolo puramente

[26] F. Klein, *Vergleichende Batrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Math. Ann. XLIII, 1893.

operativo nella soluzione dei problemi.

È chiaro che un ripensamento e un chiarimento su quello che è il ruolo della geometria nell'insegnamento delle varie discipline che formano il bagaglio culturale e formativo dei giovani si impone e con una certa urgenza. Sono pienamente convinto che in tale ambito progetti come quello dei *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert o analoghi hanno ancora una grande validità e possono giocare un ruolo da protagonisti.

Carmelo Mammana
Dipartimento di Matematica e Informatica
V.le A. Doria, 6
95125 - Catania (Italy)
e-mail: mammana@dipmat.unict.it