L'ATTUALITÀ DI DAVID HILBERT

TAVOLA ROTONDA COORDINATA DA VINICIO VILLANI

IL PENSIERO DI DAVIDE HILBERT

A CENTO ANNI DAI "GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE"
E DAL CONGRESSO INTERNAZIONALE DI PARIGI

Università degli Studi di Catania – Dipartimento di Matematica – Catania 23-25 settembre 1999

LE MATEMATICHE
Vol. LV (2000) – Supplemento n. 1, pp. 253–274

L'ATTUALITÀ DI DAVID HILBERT

TAVOLA ROTONDA COORDINATA DA VINICIO VILLANI

Qui di seguito sono riportati gli interventi alla Tavola rotonda, per i quali i relatori hanno fornito una rielaborazione scritta. Purtroppo la carenza di documentazione ci ha impedito di includere alcuni interessanti interventi estemporanei da parte del pubblico.

Abbiamo altresì omesso il testo di un'ulteriore domanda, nella quale il coordinatore della tavola rotonda aveva sollevato il problema di un confronto (fondazionale e didattico) fra le varie assiomatiche elaborate per la geometria elementare dopo quella di Hilbert, in quanto l'argomento non è stato ripreso in alcun intervento specifico.

I contributi dei Proff. M. Toepell e B. Artmann, originariamente scritti in tedesco, sono stati tradotti in italiano da V. Villani.

VINICIO VILLANI

I relatori che hanno parlato a questo convegno hanno tratteggiato con grande efficacia i principali contributi dati da David Hilbert ai più svariati settori della ricerca matematica.

Ma inevitabilmente rimane negli ascoltatori il desiderio di approfondire qualche tema, o di trovare risposte a qualche interrogativo specifico.

Nel corso di questa tavola rotonda rivolgerò ai relatori, e più in generale a tutti i presenti, alcune domande - spero di interesse generale - volte ad inquadrare in una prospettiva storica l'influsso che l'opera di Hilbert ha esercitato ed esercita tuttora sulla matematica e sul suo insegnamento.

Dati i tempi ristretti a disposizione, passo subito alla prima domanda, per la quale prendo spunto dalla soluzione di Hilbert al problema sui sistemi di invarianti.

Anche la matematica è soggetta a mode: così si alternano periodi nei quali vengono apprezzate dimostrazioni costruttive ed altri nei quali si privilegiano ragionamenti esistenziali. Al giorno d'oggi sembra prevalere, sotto l'effetto dell'avvento dell'informatica, l'interesse per i procedimenti algoritmici e costruttivi. Quale ruolo potranno giocare nel futuro della matematica i ragionamenti di tipo esistenziale?

FABRIZIO CATANESE

Innanzi tutto approfitto del fatto di sedermi qui al tavolo dei relatori per fare un'osservazione da un lato pertinente al tema sollevato, dall'altro anche collegata alla conferenza del collega Mammana. La mia osservazione è questa: visto che durante i miei studi al Liceo Classico ho avuto la fortuna di studiare sul libro di testo (di Geometria) di Enriques-Amaldi, volevo dare una testimonianza dei motivi del suo successo. Nella mia memoria è rimasto impresso il loro metodo espositivo, in cui c'era il testo principale esposto in maniera estremamente chiara, una presentazione teorica senza pecche scritta in caratteri grandi; a questa seguiva un testo fitto, scritto in caratteri piccoli, pieno di complementi, di excursus di carattere storico, da cui si imparava tanto di più. Il bello era cioè questa combinazione parallela di assiomatizzazione da una parte, di vivace storia del pensiero dall'altra. Questo metodo è stato seguito da Enriques anche nel suo famosissimo e bellissimo libro *"Le superficie algebriche"*, dove lui spiega da una parte la teoria in maniera chiarissima, poi però si e ci diletta veramente con queste note storiche. Enriques ha avuto a mio avviso tanto successo anche perchè ha capito che le due cose non possono essere separate: l'assiomatizzazione fa una scelta; questa scelta può riflettere, come dice Villani, una moda, ed allora cerchiamo di capire che l'assiomatizzazione è stata fatta oggi in questo modo, però domani questa scelta si può cambiare. È importante discutere del divenire di questa scelta, la combinazione parallela di assiomatizzazione e di coscienza storica è una sintesi dialettica fra un approccio di tipo statico ed uno di carattere dinamico, su cui avrò occasione di ritornare.

Analogamente, allora, io sono d'accordo con Villani che oggigiorno l'uso dei computer, con la possibilità da loro offerta di una potenza di calcolo enormemente superiore a quella di ieri ci ha orientato verso una grossissima riscoperta di un certo tipo di matematica: se vogliamo, di molta matematica pre-Hilbert. Voglio essere breve, ed allora citerò un solo nome esemplare: quello del "Dubliner" Arthur Cayley. Una ragione per citare questo grande mi è anche offerta dal lavoro che ho svolto negli ultimi anni per scrivere una recensione sul libro di Gelfand-Kapranov e Zelevinski dal titolo *"Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants"*. Questo libro mi è piaciuto molto, e la recensione, piuttosto lunga, uscirà tra breve (con un grosso ritardo) sul Bulletin della American Mathematical Society: alcuni dei punti di vista che vado qui telegraficamente ad enunciare sono appunto esposti in questa recensione. In sostanza, uno degli asserti degli autori di questo libro è che dentro le opere di Cayley, dalle prime in cui viene introdotta quella che oggi si chiama la forma di Chow, alle ultime dedicate a questioni di grafi e di combinatorica, c'erano già in nuce molte delle nozioni ed idee fondamentali su cui la ricerca di oggi va avanti, sia a livello teorico che di applicazioni. Secondo un principio di V. Arnold, i nomi nella matematica non vengono mai attribuiti agli inventori: così la forma di Chow è stata inventata da Cayley per le curve dello spazio a tre dimensioni, e poi estesa al caso generale da E. Bertini prima, da van der Waerden e Chow solo molto tempo dopo. Quindi si dà il nome di Chow che è quello che ha perfezionato tecnicamente questa bellissima idea di Cayley: parimenti, Gelfand e coautori ci spiegano che Cayley ha avuto l'idea rivoluzionaria di definire la nozione di determinante per un complesso omologico di applicazioni lineari (tale definizione estende chiaramente la nozione di determinante di una applicazione lineare, ed è stata riscoperta da vari autori nel secolo ventesimo: Franz, Reidemeister, De Rham, Whitehead, Milnor ...). Questo concetto, e le regole di calcolo date da Cayley, portano direttamente a formule esplicite ed algoritmi assai potenti nella teoria della eliminazione. È interessante notare che questo processo passa attraverso una geometrizzazione combinatoria di certe formule algebriche, le quali assiomatizzano costruttivamente la geometria dei corpi convessi, delle loro triangolazioni, dei loro volumi, sottovolumi, volumi misti, etc. Insomma, la geometria dei corpi convessi e dei punti a coordinate intere in essi contenuti non solo ci portano a formule ed algoritmi che si implementano effettivamente sul calcolatore, ma ci spingono anche a riflettere sul significato della parola "calcolare". Ebbene, allora si ritorna indietro? Basta leggere il libro sopra citato per capire però che una riscoperta non è un ritorno all'antico: è vero che gli autori ci fanno rileggere le opere di Cayley, però non ci fanno nessuno sconto su alcuna delle teorie moderne inventate fino ad ora in questo secolo. Di tutte le nozioni che ci siamo sorbiti ed abbiamo cercato di acquisire, i fasci, l'algebra omologica, la categoria derivata, le connessioni logaritmiche ed il problema di Riemann-Hilbert, i teoremi sulla monodromia..: qualcosa speri che non sia servito, e che magari si possa dimenticare, ed invece serve proprio tutto. Ora il libro è di 540 pagine, ma presuppone ad esempio, inter alias, completamente il libro di Hartshome *Algebraic Geometry*. Quello che è allora interessante da un certo punto di vista è come i metodi astratti e quelli concreti lavorano in perfetta combinazione ed armonia: questo significa, dal punto di vista matematico, che siamo sicuri che sono stati costruiti degli strumenti astratti che però servono veramente, che continuano a dare nuove interessanti applicazioni e generare nuovo progresso. Casomai, per finire, il problema che voglio porre è quello, diciamo, "della strada alla conoscenza": qui si costruisce sempre di più, sempre più in alto, bisogna sapere tutto, e poi aggiornarsi, e poi darsi alle applicazioni. Mi chiedo come faranno i giovani del futuro.

GABRIELE LOLLI

Sul tema delle dimostrazioni esistenziali, vorrei invitare a leggere le riflessioni che ha fatto Hilbert stesso, uno dei protagonisti della loro introduzione nella matematica, con la sua dimostrazione sugli invarianti. Nella raccolta di scritti *Ricerche sui fondamenti della matematica* si vedano in particolare le pp. 282–84 (del 1927) e anche le pp. 186–87 (del 1917).

VINICIO VILLANI

Nei primi decenni del '900 le discussioni sui fondamenti della matematica e sulla logica matematica coinvolgevano matematici di primo piano. Al giorno d'oggi mi sembra invece che la maggior parte dei matematici ha un atteggiamento agnostico su tali problematiche: probabilmente molti tra noi non saprebbero neppure con chiarezza per quale "partito" schierarsi, nè quali partiti esistono. Come si spiega questo disinteresse? Quali motivazioni "forti" potrebbero indurre i matematici a schierarsi? E quale "partito" è prevedibile che raccolga i consensi più autorevoli?

GABRIELE LOLLI

Se è vero che nella matematica si alternano "mode", è anche vero che esistono passaggi fatali, da cui non si torna indietro, e che non sono ripetibili. Quello che è successo negli studi sui fondamenti all'inizio del secolo ventesimo è stato dovuto a una particolare congiuntura e coincidenza di circostanze. Il concetto stesso, il problema dei "fondamenti" è derivato dai tumultuosi sviluppi del secolo precedente, riassumibili in almeno tre fattori: l'astrazione, l'infinito, il metodo assiomatico, di cui abbiamo parlato. I matematici vivevano allora un problema pressante di "come fare matematica", o "cosa è matematica", bene illustrato dal rimprovero di Gordan a Hilbert: "Questa non è matematica, è teologia". C'erano "divieti", come lamentava Hilbert, oltre che pericoli.

Una circostanza fortunata (per usare le parole dello stesso Hilbert) è stata il simultaneo perfezionamento della logica, dovuta in parte alle stesse esigenze e sviluppi, in parte a un clima culturale tipico della scienza e della filosofia del tempo (con l'idea di fondazioni definitive e assolute). Questa combinazione, di problemi e di strumenti disponibili, ha favorito il fatto che molti grandi matematici si siano interessati della questione (per esempio Hermann Weyl non avrebbe potuto sviluppare la posizione predicativista suggerita da Poincaré senza un uso decisivo di sottigliezze logiche).

Le posizioni di filosofia della matematica che sono state tramandate come classiche (platonismo, formalismo, intuizionismo) sembrano obsolete, chiuse, e lo sono. Questo non significa che la loro elaborazione non abbia prodotto risultati e ricadute importanti (il concetto di effettività, con la teoria delle funzioni ricorsive, le raffinatezze del metodo assiomatico arricchito delle scoperte della teoria dei modelli, i vari tipi di costruttivismo), e che non debbano quindi essere conosciute. Hilbert metteva anche la gnoseologia tra i campi da cui la matematica doveva alimentarsi, e cosi è stato. Ma, al di là degli arricchimenti tecnici prodotti, queste posizioni rappresentano ormai solo opzioni culturali soggettive, senza un riferimento attuale a problemi urgenti. Ai giorni nostri, avendo rinunciato a impossibili sogni di certezze assolute definitive, e accettato - grazie anche all'insistente lezione di Hilbert - che tutta la matematica è buona e legittima ("nessuno ci caccerà dal paradiso di Cantor") - siamo molto più interessati ad altri problemi, quali ad esempio il corretto inserimento e armonizzazione della ricerca basata sul calcolatore nel panorama generale.

Non è detto che in questo quadro non ci siano più battaglie importanti (comunque sempre legate a questioni emergenti dalla pratica). In effetti il calcolatore e alcuni tipi di ricerche svolte con il suo ausilio hanno suggerito una posizione di filosofia nuova (relativamente nuova, grazie al riferimento al calcolatore, perchè in altri tempi era già stata proposta, ultimo John Stuart Mill) una sorta di empirismo o sperimentalismo. La ricerca matematica si svolgerebbe in modo non essenzialmente diverso da quello delle altre discipline empiriche. Laddove non si voglia limitare a indicare il peso crescente di ricerche di tipo quasi sperimentale, ma voglia assurgere a una posizione filosofica, questa tendenza per legittimarsi non poteva che attaccare, e lo ha fatto, il pilastro della matematica tradizionale, rappresentato dalla dimostrazione (anche a questo proposito è sempre d'attualità il pensiero di Hilbert).

A qualcuno potrà sembrare una tempesta in un bicchier d'acqua, soprattutto se non ne ha sentito parlare. Ma se si considera, rispetto ai tempi di Hilbert, la crescita numerica della comunità, e la sua settorializzazione, non sorprende che molti matematici ignorino le aspre questioni dibattute da altri colleghi; nel caso in esame chi è stato investito maggiormente è chi si occupa di didattica, perchè la disputa è collegata a programmi di riforma curricolare e didattica, con risvolti anche sociali, in particolar modo negli Stati Uniti (ad esempio il progetto dell'*Harvard Calculus*).

Per quel che riguarda tendenze di più lungo periodo, è naturalmente difficile fare profezie. È legittimo pensare che (le questioni teoriche collegate con) i calcolatori resteranno a lungo con noi, con conseguenze imprevedibili, perchè in alcuni campi ci si è per ora appena affacciati sull'ignoto, ad esempio con la dimostrazione automatica (altro argomento che già ha sollevato vivaci discussioni fondazionali). Se si allarga lo sguardo alla cultura circostante, che è sempre in relazione con la matematica, come lo era a fine Ottocento, sembrerebbe possibile azzardare che novità significative sulla nostra conoscenza del fare matematica potranno venire nel prossimo futuro dalle ricerche delle scienze cognitive. La neurofisiologia incomincia a essere in grado di ottenere informazioni su quello che succede nel cervello durante l'attività di calcolo; finora erano disponibili solo o teorie psicologiche molto superficiali e preconcette, o poche intuizioni geniali di von Neumann sulla esistenza nel cervello di una inesplorata logica del continuo alla base anche della rappresentazione degli interi e del trattamento del discreto. Gli - ancora pochi - esperti della materia ritengono di aver rotto la barriera della totale ignoranza che ci paralizzava, di avere alcuni punti bene assodati e di disporre ora degli strumenti per accumulare conoscenze in quadri sempre più integrati (si può vedere S. Dehaene, *The Number Sense*, Oxford Univ. Press, 1997, ma anche una esposizione più divulgativa in B. Butterworth, *Intelligenza matematica*, Rizzoli, 1999). Non si può che guardare con attenzione a queste ricerche.

ALFREDO FERRO

Ritengo che se David Hilbert fosse vissuto ai nostri giorni non sarebbe stato insensibile alla seguente domanda: *siamo sicuri che ciò che costituisce l'insieme dei risultati fondamentali della Matematica non ha degli errori nascosti, frutti di disattenzione o eccessiva complessità combinatoria?* Tale problema si pone oggi e si porrà con sempre più urgenza con il proliferare dei risultati e delle teorie e con il crescere della complessità delle dimostrazioni stesse. Quindi è ragionevole supporre che una soluzione soddisfacente alla domanda iniziale rappresenterebbe un analogo dei *Principia Mathematica* di Whitehead e Russell. Infatti mentre quest'opera voleva dimostrare che tutta la Matematica poteva essere fondata su pochi principi universalmente riconosciuti, una moderna soluzione al problema posto sopra consisterebbe nella progettazione di un sistema (semi) automatico, la cui correttezza è stata adeguatamente controllata, per mezzo del quale matematici opportunamente addestrati possano controllare la correttezza delle dimostrazioni matematiche contenute nei testi fondamentali di riferimento delle varie discipline, in un tempo (assimilabile alla lunghezza della dimostrazione) ovviamente maggiore della dimostrazione formale "a mano" ma secondo un fattore non troppo elevato. A mio parere nessuno dei sistemi di "proof checking" oggi esistenti soddisfa pienamente i requisiti ora esposti. Un tentativo molto promettente è in corso di realizzazione presso la New York University da parte del celebre matematico ed informatico Jacob T. Schwartz. Utilizzando il formalismo della Teoria degli Insiemi, ed una nutrita serie di meccanismi di inferenza elaborati negli ultimi trenta anni dagli esperti di Logica Computazionale e Deduzione Automatica, Schwartz sta simulando un'eventuale verifica completa, semi-automatica ed interattiva del Teorema dell'Integrale di Cauchy a partire da fatti elementari di teoria degli insiemi. Dallo stato attuale della simulazione si può evincere che la sessione completa di tale verifica sarà dell'ordine delle 300-400 pagine. Se si pensa che il libro di Landau *Foundation of Analysis* è di circa 100 pagine, si può calcolare che una dimostrazione tradizionale possa essere di circa 150 pagine. Quindi il rapporto è dell'ordine di 2 o 3, che appare certamente accettabile. Aspettiamo quindi gli sviluppi completi di questo ed altri lavori che possano iniziare un nuovo capitolo di indagine sui Fondamenti della Matematica nello spirito del grande David Hilbert.

VINICIO VILLANI

Con i *Grundlagen der Geometrie* Hilbert ha sancito una netta separazione tra gli aspetti intuitivi e la sistemazione teorica dell'intero edificio della geometria elementare. D'altra parte lo stesso Hilbert ha inserito numerose figure nei *Grundlagen* e qualche decennio più tardi è stato co-autore del libro *Anschaufiche Geometrie* (Geometria intuitiva).

Resta il fatto che i due punti di vista (quello della formalizzazione rigorosa e quello del ricorso all'intuizione) sono, almeno in apparenza, antitetici.

Quali implicazioni didattiche sono derivate in Germania per l'insegnamento della geometria, ai vari livelli scolari?

MICHAEL TOEPELL

Come risulta dalla relazione di Carmelo Mammana: "I *Grundlagen der*

Geometrie e i libri di testo di Geometria in Italia", dopo la pubblicazione dei *Grundlagen der Geometrie* si è registrato un cambiamento anche nelle presentazioni della geometria nei libri di testo per la scuola. Sono state elaborate nuove sistemazioni e sono stati individuati nuovi punti nodali, il cui influsso si estende fino al presente.

1. *Assiomatica nei testi universitari.*

Intorno al 1900 si richiedeva che i sistemi di assiomi della geometria soddisfacessero a tre requisiti: completezza, coerenza, indipendenza. Mentre i requisiti della *completezza* e della *coerenza* erano stati assicurati da Hilbert, il problema dell'*indipendenza* non era stato ancora del tutto chiarito. In relazione a quest'ultimo aspetto, Giuseppe Peano (1858-1932) è da ritenersi il primo che – in un suo lavoro del 1889 [1] – parlò del concetto di indipendenza. Dopo che Hilbert ebbe dimostrato nel 1899 l'indipendenza tra i diversi gruppi di assiomi, fu Oswald Veblen (1880-1960) a costruire, nella sua tesi di dottorato, un sistema geometrico di assiomi completamente indipendenti. Veblen provò, facendo ricorso ad opportuni modelli per tutti gli assiomi, che "No axiom can be deduced from the other axioms" [2]. Analogamente a quanto Gino Fano (1871-1952) aveva fatto nel 1892, Veblen utilizzò solo un concetto primitivo, il "punto" e una relazione fondamentale, quella ternaria dell'ordinamento per tali punti.

Dopo Veblen, anche Alfred Tarski (1901-1983) utilizzò i "punti" come unici concetti primitivi. Quanto alle relazioni fondamentali, Tarski utilizzò – analogamente a Hilbert – la relazione di ordine e la congruenza dei segmenti. Ciò facilitò la formalizzazione. Tarski, che in quel tempo insegnava all'università di Varsavia, sviluppò il suo sistema negli anni in cui Francesco Severi (1879-1961) pubblicava il testo *Elementi di Geometria* (1927). Uno specifico pregio del sistema di Tarski sta nel fatto che esso consta di pochi assiomi abbastanza semplici. Una prima versione di tale sistema fu pubblicata nel 1940. Ulteriori semplificazioni seguirono negli anni 1948, 1951, 1959 [3].

---

[1] G. Peano, *I principi di geometria logicamente esposti,* Torino 1889. In: *Opere scelte 2*, Roma 1958, pp. 56–91.

[2] O. Veblen, *A System of Axioms for Geometry,* Trans. Am. Math. Soc., 5 (1904), pp. 343–384.

[3] A. Tarski, *The completeness of elementary algebra and geometry (1940),* Paris 1967.
— *A decision method for elementary algebra and geometry,* Santa Monica [1]1948, Los Angeles [2]1951.
— *What is elementary geometry? The Axiomatic Method,* Proc. of the 1957/58 Int. Symp. at Berkeley. Amsterdam 1959, pp. 16–29.

In Germania, nel 1983, Wolfram Schwabhäuser [4] ha rielaborato quest'ultima versione così da farne una presentazione moderna e ha contribuito mediante ricerche *metamatematiche* a promuovere una nuova discussione sugli aspetti logici dei *Grundlagen der Geometrie.*
L'evoluzione dei vari settori di ricerca attinenti ai fondamenti della Geometria fino alla fine del ventesimo secolo si trova esposta nell'articolo di Hubert Kiechle, Alexander Kreuzer e Heinrich Wefelscheid, pubblicato nell'edizione del centenario dei *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert [5].

2. *L'influsso di Hilbert sulla geometria per la scuola.*

Circa 60 anni dopo l'opera di Hilbert, in Germania fu introdotta un'assiomatizzazione della geometria anche nelle scuole secondarie. In questo contesto ebbe grande influsso la costruzione della geometria, basata sul concetto di *simmetria assiale*, ad opera di Friedrich Bachmann (1909-1982), che è del 1959 [6]. E, proprio seguendo questa impostazione, la geometria fu assiomatizzata e formalizzata nelle scuole, specie negli anni '70. Nel 1970 venne anche pubblicata la traduzione tedesca della geometria assiomatica di Gustave Choquet [7] .
Un apice in questo senso lo raggiunse, anche grazie al suo titolo, il libro, concepito per la scuola: *Axiomatische Geometrie*, di Herbert Zeitler [8].

Nel corso degli anni '80 la discussione didattica mise però in evidenza il fatto che una formalizzazione troppo unilaterale aveva relegato ad un ruolo marginale le figure e i problemi geometrici. Con l'assiomatizzazione della geometria scolastica si era dimenticato un capitolo dei *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert: quello conclusivo sulle possibilità delle costruzioni geometriche con l'ausilio della riga e del trasporto dei segmenti. Hilbert, per il quale la geometria scolastica era una parte della geometria intuitiva, intendeva richiamare con

---

4 W. Schwabhäuser - W. Szmielew - A. Tarski, *Metamathematische Methoden in der Geometrie,* Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1983.

5 D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie.* Mit Supplementen von Paul Bernays. 14. Auflage. Herausgegeben u. mit Anhängen versehen von Michael Toepell. Mit Beiträgen von M. Toepell, H. Kiechle, A. Kreuzer u. H. Wefelscheid. B. G. Teubner-Stuttgart Leipzig 1999. xvi+VIII+412 pp. (Teubner-Archiv zur Mathematik - Supplementband 6).

6 F. Bachmann, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff,* Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1959.

7 G. Choquet, *Neue Elementargeometrie* Braunschweig 1970. Traduzione tedesca di *L'enseignernent de la géométrie*, Paris.

8 H. Zeitler, *Axiomatische Geometrie. Euklidische Geometrie und nichteuklidische Geometrie und endliche Geometrie. Eine Skizze ihrer Entwicklung,* Bayerischer Schulbuch-Verlag 1972. (Beiträge für den mathematischen Unterricht. Bd. 4)

quel capitolo l'attenzione - soprattutto degli insegnanti - sull'esigenza di non trascurare i problemi pratici e costruttivi.

3. *Geometria costruttiva e proiettiva per la scuola.*

Questo punto di vista di Hilbert si trova presentato nel contesto dello sviluppo storico delle costruzioni geometriche elementari, nell'articolo di M. Toepell: *Der verlorengegangene Mittelpunkt* [9].

Particolarmente significativi al riguardo sono gli sviluppi che ha avuto il problema della determinazione del centro di un cerchio. Si passa dalla costruzione con riga e compasso senza altre limitazioni (Euclide) alla restrizione ad un compasso con apertura costante (Abu al-Wafa, Dürer), alle soluzioni con uso del solo compasso (Mohr, Mascheroni, e altri), alle costruzioni con la sola riga e l'ausilio di cerchi fissi ausiliari (Lambert, Steiner, Cauer), a quelle con la riga a bordi paralleli o con un rapportatore angolare, inteso nel senso del termine tedesco Winkellineal (Adler). Fino alle soluzioni con la riga e il trasporto dei segmenti di Hilbert e del suo allievo Feldbeum.

Nell'ultimo decennio del ventesimo secolo è nuovamente aumentato nella scuola l'interesse per le costruzioni e per i problemi geometrici. Le ragioni si possono far risalire da una parte alle possibilità che il computer offre con il software geometrico dinamico e d'altra parte alla consapevolezza, accresciuta grazie alle indagini TIMSS, dell'importanza di un insegnamento della geometria multiforme, interdisciplinare e operativo.

Ma i *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert hanno influenzato l'insegnamento scolastico della geometria anche in un altro senso. Mentre fino all'inizio del ventesimo secolo la *geometria proiettiva* era stata una componente importante dell'insegnarnento della geometria, successivamente la sua rilevanza andò riducendosi progressivamente. Dopo Hilbert, non fu più considerata come una componente fondamentale della geometria. Benché Hilbert fosse partito dalla geometria proiettiva (lo testimonia un suo quaderno degli anni in cui era ancora studente) [10] egli per vari motivi non inserì tale argomento nei *Grundlagen der Geometrie.* L'edizione del centenario – sperabilmente in futuro anche in traduzione italiana – può spingere ad una nuova consapevolezza, per riscoprire dopo cento anni la proiettiva come base della geometria per le scuole. Forse la dichiarazione di Arthur Cayley (1859) "Metrical geometry is part of projective geometry" e la frase, di Hermann Hankel (1875) "La geometria proiettiva è

[9] M. Toepell, *Der verlorengegangene Mittelpunkt. Eine historische Betrachtung zur Kreisgeometrie,* Didaktik der Mathematik Jg., 17 (1989) H. 3, pp. 218–242.

[10] D. Hilbert, *Schulheft zur Neueren Geometrie,* Wilhelmsgymasium Königsberg i. Pr. 1879/80 [Cod. Ms. D. Hilbert 758]. Kommentiert u. m. einer Einleitung versehen v. M. Toepell. In: Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie. 14. Aufl. (s. Anm. 5) pp. 327–345.

la via regia per tutta la matematica" hanno un significato duraturo, al di là del tempo in cui furono pronunciate.

VINICIO VILLANI

L'intervento del prof. Toepell ci ha fornito un interessante quadro dei riflessi che l'opera di Hilbert ha avuto e ha tuttora nelle scuole tedesche sull'insegnamento della geometria. Prego ora il prof. Artmann di aggiungere qualcosa in merito alla preparazione degli insegnanti.

BENNO ARTMANN

Quanto alla formazione dei futuri insegnanti è in atto in Germania una vivace discussione per quanto riguarda la geometria.

Molti interessanti contributi vengono discussi annualmente nelle riunioni di un gruppo di lavoro sulla geometria, che fa capo alla Società Tedesca per la Didattica della Matematica.

Un problema di particolare attualità è naturalmente l'utilizzo del computer nella formazione geometrica, ma di questo non parlerò in questa sede. Preferisco presentare alcune problematiche di base, che considero rilevanti per la formazione geometrica degli insegnanti.

Dato lo spazio ristretto di questo intervento, potrò solo accennare alle tematiche in questione: si tratta comunque di tesi convalidate dalla mia esperienza e sperimentazione nel settore della formazione degli insegnanti.

Primo Obiettivo. *Costruire una buona competenza nella geometria elementare.*

C'è una lamentela generale per le scarse conoscenze degli studenti in geometria elementare. Pertanto il primo obiettivo per la preparazione dei futuri insegnanti è quello di fornire loro una buona competenza nei contenuti.
Il modo migliore per ottenere lo scopo voluto è quello di basarsi su un appropriato testo scolastico. Va messo in rilievo che i tre teoremi più importanti della geometria elementare sono:

1). Il teorema di Talete (rette parallele tagliate da due trasversali)
2). Il teorema di Pitagora
3). Il teorema sugli angoli alla circonferenza.

Nella geometria, più che in ogni altro contesto scolastico, svolge un ruolo centrale la conoscenza e la capacità di utilizzare i teoremi. Qui l'intelligenza prende il posto del calcolo. Molteplici stimolanti problemi rafforzano questa constatazione.

Il docente al quale compete la formazione dei futuri insegnanti può iniziare un processo di familiarizzazione con la geometria, proponendo una trattazione dei poliedri regolari. In questo contesto vanno inclusi anche riferimenti storici e ogni allievo dovrebbe costruire personalmente modelli concreti, realizzati con mezzi molto semplici, evitando il ricorso a modelli preconfezionati.

Secondo obiettivo. *Esplicitare le caratteristiche generali della matematica.*

Ciò significa in particolare che nel corso rivolto ai futuri insegnanti si deve parlare e dare rilievo a tali caratteristiche. Cito alcuni esempi:

(a) Essere consapevoli del doppio ruolo dei teoremi: essi da un lato sono risultati che forniscono risposte conclusive a domande basilari e d'altro lato sono strumenti adatti per molteplici usi ulteriori.

(b) Saper identificare il nucleo astratto di un problema sotto i suoi molteplici travestimenti (tutte le possibili costruzioni del pentagono regolare si riconducono alla medesima equazione di secondo grado).

(c) Stabilire collegamenti mediante processi di generalizzazione (dal teorema di Pitagora a quello del coseno, dal teorema di Talete a quello di Menelao, ...).

(d) Riconoscere nel concetto di gruppo lo strumento per un ordinamento fra le diverse geometrie nel senso di Klein.

(e) Comprendere l'organizzazione logica soggiacente a piccole teorie (classificazione delle isometrie come prodotti di simmetrie assiali).

Complessivamente si tratta di far passare la consapevolezza del fatto che anche se problemi isolati possono essere stimolanti, solo le conoscenze inquadrate in una teoria danno una comprensione globale e una visione d'insieme.

Terzo obiettivo. *Pur essendo noi tutti matematici, abituarsi a guardare la matematica anche dall'esterno.*

Gli insegnanti devono:

(a) Saper giudicare e valutare professionalmente teoremi, dimostrazioni, generalizzazioni, ecc. Affermazioni del tipo: "questo ci servirà nel seguito ..." o "questo mi piace ..." non sono sufficienti. Occorre sviluppare ed esplicitare criteri migliori.

Questa abilità viene coltivata troppo poco, anche se il corrispondente problema decisionale si presenta spesso agli insegnanti (esempio: valutare selettivamente le molte dimostrazioni e generalizzazioni del teorema di Pitagora).

(b) Dominare livelli diversi di approfondimento (si va dalla soluzione ad-hoc di problemi isolati fino ad un loro inserimento organico nel contesto di una teoria).

(c) Conoscere diverse opinioni rilevanti sulla matematica (Platone, Pascal, Kant, Schopenhauer, ...).
(d) Includere esempi storici sulla scorta di (traduzioni di) testi originali (Euclide, Cartesio, Eulero ....).

Specificamente (c) e (d) possono contribuire a togliere agli allievi la paura del ricorso a testi originali.

Qui, come anche in altre situazioni si constata che l'impegno e il successo dell'apprendimento aumenta sensibilmente, se gli allievi si rendono conto che domande su questo tipo di problematiche vengono poste e valutate anche in sede di esame.

Quarto Obiettivo. *Far apprezzare la matematica vista come potente mezzo per ampliare le conoscenze umane.*

Va evidenziata la potenza della matematica, riflettendo soprattutto su quei risultati che sfuggono all'intuizione diretta o alla pratica del disegno. Si tratta cioè di acquisire conoscenze in base al puro ragionamento, anche quando l'argomentazione viene supportata da disegni. Thomas Mann parla a tale proposito di *denkerische Hervorbringung* (enucleazione di concetti mediante il pensiero). Schopenhauer invece ne parla in termini piuttosto critici come di una "qualitas occulta". Tipici esempi nel nostro ambito sono:

(a) La somma degli angoli di un triangolo o più in generale di un n-agono convesso, vista come un invariante nascosto, l'esempio preferito da Kant.
(b) La caratterizzazione dei quadrilateri inscrivibili in una circonferenza, una "qualitas occulta" esplicitamente criticata da Schopenhauer.
(c) Il teorema di Pitagora.
(d) La formula di Eulero per i poliedri.
(e) L'irrazionalità, o rispettivamente l'incommensurabilità di segmenti, che Aristotele propone come esempio emblematico all'inizio della sua Metafisica.

Quinto obiettivo. *Inquadrare in modo ben motivato la matematica nel canone di una formazione globale.*

Questo obiettivo riguarda naturalmente ogni corso per futuri insegnanti e non solo la geometria elementare.

(a) Si deve essere in grado di giustapporre in modo coordinato:
$*$ Teorie interne alla matematica (per esempio nella costruzione di n-agoni regolari)
$*$ Applicazioni rilevanti (per esempio, delle coniche)
$*$ Singoli problemi, mettendo in discussione il cosiddetto orientamento dell'insegnamento per problemi (se fosse possibile insegnare il problem-solving, non sarebbero forse già risolti tutti i problemi?)

(b) Si deve essere in grado di apprezzare il ruolo della matematica nella formazione generale. Qui non si tratta del concetto puramente strumentale di una formazione generale nel senso delle capacità matematiche minimali per usi pratici, bensì di quella che Lutz Führer (*Pädagogik des Mathematikunterrichts,* Vieweg 1997) chiama la Questione Basilare: in che cosa l'insegnamento della matematica può e deve contribuire alla formazione e all'educazione generale?

Führer afferma in proposito:

i. Ogni insegnamento matematico dà una sua risposta a questa questione.
ii. La questione basilare deve essere risolta.
iii. Essa però non ammette soluzione.
iv. Ogni docente (e in particolare ogni docente universitario) deve sviluppare opinioni personali al riguardo.

Tutto ciò che ho detto in merito alla formazione in ambito geometrico, è un tentativo di sviluppare le mie concezioni personali.

Le si possono inquadrare in una cornice ancor più in generale, nella teoria delle "due culture" secondo C.P. Snow: la matematica e le scienze della natura che ammettono formulazioni in termini matematici si contrappongono all'interpretazione soggettiva del mondo offerta da letteratura, arte e religione. Ma non è sufficiente esserne consapevoli noi stessi in quanto uomini di scienza; dobbiamo trasmettere questa consapevolezza anche ai nostri studenti e futuri docenti.

Molti degli esempi sopra citati sono rielaborazioni di quanto si trova esposto nel libro: B. Artmann, *Euclid – The Creation of Mathematics*, Springer 1999.

VINICIO VILLANI

Matematica e Fisica. Credo si possa affermare che i fisici apprezzano e usano molti dei risultati matematici di Hilbert (ai quali Hilbert era giunto senza avere in mente specifiche applicazioni alla fisica) mentre non si può dire altrettanto del tentativo di Hilbert di trasportare di peso alla fisica il metodo assiomatico che ha funzionato tanto bene in matematica. È lecito trarne la conclusione generale che è preferibile che ognuno si limiti a fare bene il proprio mestiere (il matematico costruisca le sue teorie e lasci agli scienziati delle altre discipline il compito di utilizzarle nel proprio campo di competenza) o invece è auspicabile una più stretta collaborazione tra la matematica e le discipline sperimentali (nel senso che il matematico privilegi lo studio delle problematiche poste dai colleghi delle scienze sperimentali)?

FABRIZIO CATANESE

Mi pare che sia stato ampiamente sottolineato in vari interventi che Hilbert non era solo un matematico, ma anche un fisico. I rapporti fra queste due discipline, se talora tormentati, sono però ancora molto fecondi, come cercherò di mostrare. La domanda di Villani la vorrei però un attimo commentare ponendo una ulteriore domanda. Oggigiorno su Internet si trova di tutto, ma è tutto veramente a portata di mano, oppure questa dovizia di comunicazione non ci porta a lanciarci su prospettive più ampie, a specializzarci sempre di più? È vero, oggi esiste una realtà molto interessante di collaborazione fra fisici e matematici, d'altra parte però devo dire che la separazione tra fisici sperimentali e fisici teorici si è acuita, c'è quasi una spaccatura simile a quella che separa il fondamentalismo islamico dall'ecumenismo cristiano. D'altra parte una spaccatura simile esiste da tempo anche nella matematica, mi basterà citare Hermann Weyl che più di 50 anni fa diceva: "Oggigiorno l'angelo dell'algebra ed il demonio della topologia stanno lottando per la conquista dell'anima del matematico". È profondamente vero: ci sono almeno due anime distinte nella matematica e sono in lotta fra loro.

C'è un anima che sta interagendo positivamente con la fisica della teoria unificata dei campi, e quest'anima invade scienziati che per studiare queste teorie così complicate, ed ancora non ben definite, si mettono in rapporto interattivo coi fisici, i quali sono da tempo abituati a lavorare su spazi di dimensione infinita, su serie e integrali a priori divergenti. Questi fenomeni di collaborazione sono interessantissimi, c'è un recente articolo di Eduard Witten sui Notices della American Mathematical Society, intitolato: *Magic, mystery, and matrix*, che spiega come, usando modelli di degenerazioni, si è arrivati ad unificare le ben sette teorie esistenti sulle stringhe. Notevole è il fatto che qui, usando concetti provenienti dalla Geometria Algebrica, il modello matematico di queste degenerazioni sia già rigorosamente precisato. Gli scettici dal versante fisico chiedono se questa collaborazione sia più da vedere come un tentativo dei matematici di fantasticare sulla fisica, o come un innocente giocare dei fisici teorici con la matematica. Da parte mia sono rimasto scettico per quasi 12 anni sui tentativi di Witten di fare della matematica, specie all'inizio quando ha cominciato a proporre delle dimostrazioni "nuove" (ed incomplete) di teoremi "vecchi", come le diseguaglianze di Morse. Ma quando, spiegando che bastava passare dall'infrarosso all'ultravioletto, ha costruito degli invarianti (detti oggi di Seiberg-Witten) delle varietà differenziabili di dimensione 4 assai più facili da maneggiare degli invarianti di Donaldson, sono rimasto anche io folgorato sulla via di Damasco. Ora, permane il non facile problema matematico (congettura di Witten) che gli invarianti di Donaldson coincidano con quelli di Seiberg-Witten, però è, diciamo, accettato dalla comunità che questa congettura sia vera, e questo orienta le ricerche attuali verso direzioni affascinanti.

Quanto all'altra anima, molto più rigorosa, ed orientata verso argomenti più classicamente matematici (ma anche qui esistono affascinanti ed ardue congetture!), è viva anche essa, e continua ad esempio sulla strada rivoluzionaria (ma pesantemente formale ed assiomatica) aperta da Weyl e Grothendieck. Siamo alle soglie del nuovo millennio: così come all'inizio del secolo a Parigi i problemi posti da Hilbert hanno dominato la scena matematica, analogamente ci aspettiamo che nuove sfide vengano pubblicamente lanciate. Attendo con una certa curiosità, ad esempio, il prossimo Congresso Europeo che si terrà a Barcellona nel luglio del 2000: in quell'arengo ci sarà un incontro (scontro?) fra queste due "anime". Sicuramente la prima avrà come profeta Atiyah, il quale va preconizzando da anni che la matematica del nuovo millennio la stanno delineando, ed anche facendo, i fisici: i matematici devono stare molto attenti, queste nuove teorie vanno giustificate, formalizzate, ma questo è per lui proprio il compito del nuovo millennio. Ad esempio, ben fondare matematicamente la teoria degli integrali di Feynman è una delle sfide. Il rischio è che i matematici rimangano schiavi di un rigore sterile e rimangano troppo indietro. Le idee della fisica, ad esempio i quanti, rientrano anche nella logica, ad esempio a Berlino il premio "Nevanlinna" è stato assegnato a Peter Shor, che ha delineato il "Quantum computing", un sistema di calcolatori non più basati su principi deterministici, ma con una potenza di calcolo centinaia o migliaia di volte più grande. Io non so quanto questa proposta sia immediatamente realistica, ma sicuramente è una proposta elettrizzante per il futuro! In che direzione ci muoveremo è difficile predirlo, ma certo, guardando indietro, dobbiamo riconoscere quanto i problemi della fisica abbiano influenzato la matematica del secolo che è stato, e che, per quanto riguarda la teoria del campi ad esempio, Weyl sia stato su una posizione più innovativa rispetto ad Hilbert. Insomma, nell'ambito della già citata dialettica fra approccio "statico" ed approccio "dinamico" in che direzione oscillerà il pendolo?

ATTILIO AGODI

Per introdurre la mia risposta alla domanda proporrò una riflessione sui rapporti tra Fisica e Matematica, che deriva dalla mia esperienza di fisico impegnato a porre in questione e a formulare teorie. Il linguaggio proprio della teoria fisica fa ampio uso di espressioni matematiche. Come per ogni altro linguaggio, quelli che lo usano contribuiscono alla sua evoluzione, la quale, a sua volta, riflette le circostanze d'uso del linguaggio come strumento di rappresentazione e di elaborazione di informazioni, fruibile e controllabile da una pluralità di utenti (in qualche senso "equivalenti"). La qualificazione scientifica tende, di regola, a ridurre l'equivocità propria del linguaggio "storico naturale" attraverso opportune "precisazioni" della semantica e della sintassi, con modalità proprie di ciascuna disciplina e partecipi della sua evoluzione. Sebbene, di recente, la storiografia scientifica sia stata rivalutata nei percorsi formativi di competenze scientifiche e tecniche, la sua valorizzazione per la comprensione dell'indagine nel suo farsi è lungi dall'essere adeguatamente apprezzata.

Ricordando l'assiomatizzazione di Hilbert della Geometria, mi sembra interessante notare che al principio degli anni '60 vennero avviati alcuni tentativi di assiomatizzazione della teoria quantistica relativistica dei campi. È una teoria importante per la fisica delle interazioni fondamentali, per la fisica degli aggregati atomici e dei nuclei ivi inclusa la fenomenologia delle transizioni di fase.

Nel 1965 l'American Mathematical Society pubblicò in un volumetto dal titolo *The General Theory of Quantized Fields* i contributi di Res Jost ad un seminario su temi di Matematica applicata tenutosi all'Università del Colorado nell'estate del 1960. Il libro è un "classico" della teoria, ma, come può accadere dei "classici" (non solo nella Fisica teorica), è più citato che conosciuto (per restare nella Fisica, si pensi a "il saggiatore" di Galileo come ad un altro celebre esempio). Nel penultimo paragrafo dell'introduzione al testo citato, Jost osserva che l'assiomatizzazione della teoria quantistica dei campi da lui proposta "ha poco in comune con l'ordinaria assiomatizzazione nella matematica o nella fisica matematica classica. Essa, pertanto, non ha niente a che fare con il sesto problema di David Hilbert (in *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3, Springer, Berlin, 1935, p. 306) e con i *Grundlagen der Geometrie* dello stesso autore. In tutti questi casi l'assiomatizzazione costituiva la pietra angolare di un edificio ben fondato. Qui abbiamo a che fare con le fondazioni non esistenti di un edificio che potrebbe non essere mai costruito." Ho riportato tra virgolette la traduzione per me più fedele del testo di Jost. Nel paragrafo seguente egli scrive che, se proprio si fosse voluto trovare un "parallelo" con l'assiomatizzazione che si accingeva a presentare, si sarebbe potuto considerare l'assiomatizzazione della teoria degli insiemi. Perchè "... era un tentativo di separare il sensato dal non sensato. Ritengo però che anche questo confronto sia molto sbilanciato. Mi sembra che il rapporto tra sensato e non sensato sia a favore della teoria ingenua degli insiemi."

Non è forse inutile segnalare che la teoria assiomatica dei campi ha avuto altri contributi, sino ad oggi dopo quello citato: ma la speranza che essa, oltre a qualche pur importante teorema portasse a migliorare il rapporto tra lo statuto formale e le implicazioni osservabili della teoria (cioè la comprensione fisica dei fenomeni in essa codificata), rimane (se rimane) tuttora una speranza. Ciò sembra dare ragione alle valutazioni pessimistiche di Jost.

C'è una lezione, che viene da un altro "fallimento", attinente al peculiare ruolo della matematica nella teoria fisica. In questo caso considererò l'interpretazione di tale ruolo propria di A. Einstein e quella di N. Bohr e della cosiddetta "scuola di Copenhagen". Tra il secondo ed il terzo decennio del '900 i fisici si confrontarono con il problema del dualismo onde-corpuscoli, osservato dapprima nelle radiazioni elettromagnetiche e poi negli esperimenti con elettroni, neutroni e altre particelle.

Einstein, sulla base delle sue ricerche sui campi elettromagnetici e sulla geometrizzazione dell'interazione gravitazionale, individuò nei campi e nelle equazioni differenziali alle derivate parziali gli elementi espressivi del linguaggio formale *proprio* della conoscenza fisica, cioè di un linguaggio considerato *il solo adeguato* per esprimerla. Cercando la comprensione del dualismo onde-corpuscoli sotto queste condizioni, sino alla fine della sua vita, Einstein non riuscì nello scopo.

Niels Bohr e la Scuola di Copenhagen, di fronte ad insiemi di relazioni osservabili da ordinare, suscettibili di rappresentazioni alternative (nel caso, quelle dei modelli corpuscolare ed ondulatorio per i fenomeni alla scala atomica e subatomica) inscritte in linguaggi matematici diversi, si proposero di esplorare nuovi modi di concepire la fisica, cercando le specifiche di un nuovo linguaggio attraverso la determinazione delle condizioni per l'impiego non contraddittorio di due o più linguaggi formali, originariamente concepiti come radicalmente alternativi, cioè mutuamente esclusivi. Quelle condizioni furono effettivamente individuate come derivabili dalle relazioni di indeterminazione di Heisenberg, fondamentali nelle teorie quantistiche e nei loro successivi sviluppi. Ciò che ho ricordato suggerisce un punto di vista sulla situazione attuale della fisica: entro la quale si riscontra una pluralità di settori di ricerca, tali che gli specialisti impegnati in uno di essi non parlano, per così dire, con quelli impegnati negli altri. Peraltro, non di rado, gli sviluppi in un settore si scoprono suggestivi di sviluppi in altri settori: penso agli scambi cognitivi tra la teoria dei campi quantizzati e delle interazioni fondamentali e la fisica dei materiali e delle transizioni di fase, tra la fisica nucleare e l'astrofisica, tanto per fare esempi ben noti. Analoghi scambi cognitivi si sono avuti e si vanno sviluppando tra scienze così diverse come la fisica e la biologia, tra fisica, chimica e climatologia, e, in generale, quando l'indagine su un fenomeno, (o un sistema) complesso richieda l'impegno di competenze disciplinari diverse. È suggestivo pensare che il valore pedagogico attribuito alle attività di gruppo nei percorsi formativi, sin dai primi stadi dell'età evolutiva, possa essere riscoperto nei livelli più avanzati della cultura scientifica in una valenza attivatrice di progresso della cooperazione tra specializzazioni diverse delle scienze e delle tecnologie.

Sebbene Jost asserisse che la sua assiomatizzazione della teoria dei campi quantizzati non aveva nulla a che fare con quella dei *Grundlagen*, pure non si può negare che una qualche conoscenza (almeno da fisico) del lavoro di Hilbert gli aveva comunicato qualcosa, forse un'esigenza di rigore cui si potesse corrispondere in varie forme, da esplorare in modi adatti all'evoluzione della teoria fisica. È appena il caso di ricordare che i contributi di Hilbert alla matematica degli spazi lineari complessi hanno applicazioni essenziali e ampiamente diffuse, in fisica teorica. È vero che, in tali applicazioni, i fisici si sono presi qualche libertà interpretativa, ma è pur vero che, talora, ne ha tratto origine anche qualche valida ricerca matematica (ricordo, per esempio Dirac e la teoria matematica delle distribuzioni o gli studi sui fenomeni e le equazioni non lineari).

Credo giusto e produttivo che i matematici facciano ricerca dal punto di vista della loro propria esperienza. È un lavoro da promuovere e da incoraggiare, perchè la libertà di ricerca è un bene comune e perchè la storia e l'attualità insegnano che, per molti versi, gli esiti dell'indagine matematica sono utili per le scienze e per molteplici operazioni della vita sociale.

Credo però che l'attenzione ai problemi per i quali può essere importante la competenza del matematico non dovrebbe essere lasciata solo alla responsabilità di quelli che li scoprono. Direi che vale per la matematica ciò che vale, a mio avviso, per ogni scienza: la responsabilità del conoscere va interpretata in una partecipazione attiva alla storia del proprio tempo, all'evoluzione di una cultura che non è una congerie casuale di contributi ma somiglia piuttosto ad un mosaico, in cui tutti i frammenti sono collegati per formare un disegno significativo. Con la particolarità che ciascun frammento concorre a scegliere, in un certo senso, la propria collocazione. Ho conosciuto matematici che sono uomini di cultura nel senso che ho cercato di indicare: essi hanno sempre dato contributi notevoli alla matematica ma anche ad altre scienze.

Non vorrei che il mio suggerimento ai matematici di non chiudersi nella loro specializzazione, interessandosi anche di problematiche nelle quali le matematiche possano essere applicate, venisse interpretato simile al suggerimento che viene dato ai fisici nell'Università italiana dei nostri giorni, di occuparsi di ricerche che possano avere un risultato d'interesse industriale o economico ben definito. Ricordo che, nei primi anni '70, H.B.G. Casimir, allora Presidente della Società Europea di Fisica e con un'esperienza di direttore dei laboratori di ricerca della Philipps, parlando di tecnologia per il futuro, ebbe a dire che, se fosse dipeso da lui, avrebbe promosso e sostenuto attività di ricerca delle quali non fossero prevedibili definiti esiti applicativi, piuttosto che quelle i cui esiti fossero prevedibili. Perchè dalle prime è più probabile siano prodotte nuove idee, nuovi modi di pensare per affrontare le novità dell'esperienza e i problemi ancora non risolti con le conoscenze già acquisite.

Quasi trenta anni dopo ritengo valido quel discorso di Casimir, che, a suo tempo, mi sembrò incisivo e convincente. Mi dispiace che oggi la maggioranza non la pensi così: perchè credo che ciò non sia giusto nè utile per le scienze e per la società.

VINICIO VILLANI

Ringrazio vivamente tutti i presenti e in particolare i colleghi che sono intervenuti a questa tavola rotonda con considerazioni molto puntuali, acute e stimolanti. Mi permetto di aggiungere due brevi riflessioni che mi sono state suggerite da quanto è stato detto durante il convegno e ribadito negli interventi che abbiamo ascoltato oggi.

Molti dei problemi matematici posti da Hilbert nel corso della sua intensa e multiforme attività sono stati successivamente affrontati e risolti in modo assai difforme dalle aspettative dello stesso Hilbert.

Questo non vuole essere un giudizio limitativo: va a Hilbert il pieno merito di aver formulato i problemi così chiaramente da facilitare l'individuazione dei loro punti nodali. Ne traggo un'indicazione di carattere generale, riferibile quindi anche al lavoro dei matematici dei nostri tempi: la chiarezza espositiva dovrebbe essere per tutti noi un obiettivo prioritario, da perseguire fino a rendere anche le teorie matematiche più complesse "comprensibili al primo uomo che si incontra per la strada" (frase pronunciata da Hilbert al Congresso Internazionale di Parigi, 1900).

L'interesse di Hilbert per i fondamenti della matematica è maturato gradualmente, e solo dopo che Hilbert aveva apportato rilevanti contributi ad altri settori della ricerca matematica.

Anche questa constatazione mi dà lo spunto per trarne un'indicazione che reputo di valenza generale. A tutti i livelli, nelle prime fasi di un'attività matematica conta soprattutto l'acquisizione di nuove conoscenze, acquisizione che deve essere corretta ma non appesantita da eccessive preoccupazioni di rigore formale. Solo in una fase successiva si avverte l'esigenza di una riflessione via via più approfondita sui fondamenti che stanno alla base di tali conoscenze.

Siamo così giunti al termine di questa tavola rotonda e con ciò anche alla conclusione del convegno. Sono certo di interpretare i sentimenti di tutti i partecipanti, esprimendo il più vivo apprezzamento e i più calorosi ringraziamenti al collega e amico carissimo, Carmelo Mammana, infaticabile organizzatore del convegno, e ai suoi validissimi collaboratori.