LE MATEMATICHE
Vol. LIV (1999) – Supplemento, pp. 15–28

RISULTATI DI SIMMETRIZZAZIONE PER SOLUZIONI DI DISEQUAZIONI VARIAZIONALI

ANGELO ALVINO - SILVANO MATARASSO - GUIDO TROMBETTI

We compare the concentration of the solution of elliptic variational inequalities by the concentration of the solution of suitable symmetrized problems.

1. Il caso delle equazioni.

Premettiamo alcuni richiami sulla nozione di riordinamento. Sia Ω un aperto misurabile e limitato di $\mathbb{R}^N$ la cui misura denotiamo con $|\Omega|$; se $\varphi \in L^1(\Omega)$, per *riordinamento decrescente* di φ si intende la funzione

$$\varphi^*(s) = \sup\{t : \mu_\varphi(t) \geq s\}, \quad s \in]0, |\Omega|[,$$

dove

$$\mu_\varphi(t) = |\{x \in \Omega : |\varphi(x)| > t\}|, \ t \in \mathbb{R}^+,$$

è la *funzione distribuzione* di φ. Indicata con ω_N la misura della sfera unitaria di $\mathbb{R}^N$ e con $\Omega^\sharp$ la sfera di $\mathbb{R}^N$ con centro nell'origine e con la stessa misura di Ω, la funzione $\varphi^\sharp(x) = \varphi^*(\omega_N|x|^N)$ è detta *riordinamento sferico decrescente* di φ. Le funzioni $\varphi_*(s) = \varphi^*(|\Omega| - s)$ e $\varphi_\sharp(x) = \varphi_*(\omega_N|x|^N)$ denotano rispettivamente il *riordinamento crescente*; e il *riordinamento sferico crescente* di φ. Per i riordinamenti sussiste la seguente disuguagliana dovuta ad Hardy:

$$\int_0^{|\Omega|} h^* k_* \leq \int_\Omega hk \leq \int_0^{|\Omega|} h^* k^*, \quad h, k \in L^1_+(\Omega). \tag{1}$$

Vale inoltre il seguente risultato (cfr. [1]): se $f, g \in L^1_+(\Omega)$,

$$\int_0^s f^* \leq \int_0^s g^*, \quad \forall s \in [0, |\Omega|]$$
$$\Updownarrow \tag{2}$$
$$\int_\Omega fh \leq \int_{\Omega^\sharp} g^\sharp h^\sharp, \quad \forall h \in L^\infty_+(\Omega).$$

Se $f \in L^2(\Omega)$ consideriamo il seguente problema omogeneo di Dirichlet

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^N (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \tag{3}$$
$$+\sum_{i=1}^N b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f, \quad u \in H^1_0(\Omega),$$

dove L è un operatore differenziale ellittico, con parte principale autoaggiunta, i cui coefficienti verificano le seguenti ipotesi:

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq |\ \xi\ |^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^N |b_i(x)|^2 \leq B^2, \quad B \geq 0, \tag{5}$$

$$c(x) \geq 0. \tag{6}$$

Consideriamo inoltre il seguente problema a simmetria sferica:

$$S(v) = -\Delta v + B\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{|x|}v_{x_i} + c_\sharp(x)v = f^\sharp,\ v \in H^1_0(\Omega^\sharp). \tag{7}$$

Se con u e v denotiamo rispettivamente la soluzione debole di (3) e di (7), indicato con $e^*(s)$ il riordinamento decrescente di $\exp(-B|x|)$

$$e^*(s) = \exp(-B(s/\omega_N)^{1/N}),$$

sussiste il seguente risultato di confronto (cfr. [2])

$$\int_0^s e^* u^* \leq \int_0^s e^* v^*, \quad \forall s \in [0, |\Omega|]. \tag{8}$$

Si noti che la (8), nell'ulteriore ipotesi $f \in L^p$ con $p > n/2$, consente di stimare la norma L^∞ di u con la norma L^∞ di v; si ha cioè

$$||u||_{L^\infty} \leq ||v||_{L^\infty}.$$

Non è possibile però dedurre da (8) analoghe stime per norme tipo L^p o, più in generale, per norme tipo Orlicz. È noto che, per ottenere un tale risultato, è necessario avere a disposizione una stima più forte della (8) la quale coinvolga le concentrazioni di u e di v, ovvero

$$\int_0^s u^* \leq \int_0^s v^*, \quad \forall s \in [0, |\Omega|].$$

Ricordiamo che, se si trascura il termine di ordine zero, se cioè si prende in considerazione la soluzione V del problema omogeneo di Dirichlet in $\Omega^\sharp$ relativo all'equazione

$$-\Delta V + B \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{|x|} V_{x_i} = f^\sharp,$$

si riesce addirittura a stimare il riordinamento di u con quello di V. Una tale stima puntuale, né quella più debole tra le concentrazioni, sussiste però se si vuole confrontare la soluzione u di (3) con la soluzione v di (7): il risultato (8) non è cioè migliorabile come del resto mostrato in [2].
D'altra parte la stima sulle concentrazioni può essere recuperata facendo sul coefficiente del termine di ordine zero dell'equazione di confronto una ipotesi che, in un certo senso, è da considerarsi intermedia tra quelle precedentemente descritte. Infatti (cfr. [4]) indicata con $\gamma(x)$ una funzione a simmetria sferica, crescente rispetto a $|x|$, tale che

$$\exp(-B|x|)c_\sharp(x) \geq \gamma(x) \geq 0 \tag{9}$$

e denotata con U la soluzione del problema

$$-\Delta U + B \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{|x|} U_{x_i} + \exp(B|x|)\gamma(x)U = f^\sharp, \quad U \in H_0^1(\Omega^\sharp), \tag{10}$$

risulta

$$\int_0^s u^* \le \int_0^s U^*, \quad \forall s \in [0, |\Omega|].$$

Si noti però che U è più grande della soluzione v di (7): questo è il prezzo da pagare per recuperare la stima sulle concentrazioni.
Un risultato analogo sussiste per l'operatore duale di L (cfr. [4]). Infatti se z è la soluzione debole del problema

$$L^* z = -\sum_{i,j=1}^N (a_{ij}(x) z_{x_i})_{x_j} - \\ - \sum_{i=1}^N (b_i(x)z)_{x_i} + c(x)z = f, \ z \in H_0^1(\Omega) \tag{11}$$

e Z è la soluzione debole del problema

$$-\Delta Z - B \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i Z}{|x|} \right)_{x_i} + \exp(B|x|)\gamma(x) Z = f^\sharp, \ Z \in H_0^1(\Omega^\sharp), \tag{12}$$

si ha

$$\int_0^s z^* \le \int_0^s Z^*, \quad \forall s \in [0, |\Omega|].$$

Nel presente lavoro stabiliamo innanzitutto un ulteriore risultato di confronto relativo alla concentrazione della soluzione z di (11).

Teorema 1. *Sia z la soluzione del problema (11) e supponiamo soddisfatte le ipotesi (4), (5) e (6). Sia $\delta(x)$ una funzione a simmetria sferica, decrescente rispetto a $|x|$, tale che*

$$f^\sharp(x) \exp(B|x|) \le \delta(x), \tag{13}$$

e sia w la soluzione del problema

$$S^* w = -\Delta w - B \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i w}{|x|} \right)_{x_i} + c_\sharp(x) w = \\ = \exp(-B|x|)\delta(x), \ w \in H_0^1(\Omega^\sharp). \tag{14}$$

Si ha allora

$$\int_0^s z^* \le \int_0^s w^*, \ \forall s \in [0, |\Omega|]. \tag{15}$$

Il risultato di confronto (15) tra la concentrazione di z e quella di w viene qui ottenuto per dualità dal risultato di confronto (8). Si osservi che, in questo caso, invece di intervenire sul coefficiente del termine di ordine zero (cfr. problema (10)), si interviene sul termine noto dell'equazione di confronto (cfr. problema (14)).
Supponiamo per semplicità δ sufficientemente regolare; per ottenere il risultato nel caso generale si può procedere per approssimazione.
Se $g \in L^2_+(\Omega)$, sia u soluzione del problema

$$Lu = g, \quad u \in H^1_0(\Omega)$$

e sia v la soluzione del problema

$$Sv = g^\sharp, \; v \in H^1_0(\Omega^\sharp).$$

Si ha $v = v^\sharp$ e inoltre sussiste la stima (8) tra u e v. Se z è soluzione di (11) si ha:

$$\int_\Omega zg = \int_\Omega zLu = \int_\Omega uL^*z = \int_\Omega uf \le$$
$$\text{(per la disuguaglianza di Hardy (1))} \le \int_0^{|\Omega|} u^* f^* \le$$
$$\text{(per la (13))} \le \int_0^{|\Omega|} u^* e^* \delta^* =$$
$$= -\int_0^{|\Omega|} d\delta^* \int_0^s e^* u^* + \delta^*(|\Omega|) \int_0^{|\Omega|} e^* u^* \le$$
$$\text{(per la (8) e la monotonia di } \delta^*)$$
$$\le -\int_0^{|\Omega|} d\delta^* \int_0^s e^* v^* + \delta^*(|\Omega|) \int_0^{|\Omega|} e^* v^* =$$
$$= \int_0^{|\Omega|} v^* e^* \delta^* = \int_{\Omega^\sharp} v^\sharp(x) \exp(-B|x|)\delta(x) =$$
$$\text{(essendo } w \text{ soluzione di (14))} = \int_{\Omega^\sharp} v^\sharp S^* w =$$
$$= \int_{\Omega^\sharp} vS^*w = \int_{\Omega^\sharp} wSv = \int_{\Omega^\sharp} wg^\sharp.$$

Si ha in definitiva:

$$\int_\Omega zg \le \int_{\Omega^\sharp} wg^\sharp, \quad \forall g \in L^2_+(\Omega),$$

da cui, ricordando la (2), si ricava la (15).
Per concludere osserviamo che, mentre con la condizione (9) è possibile ottenere sia la disuguaglianza tra le concentrazioni delle soluzioni dei problemi (3) e (10) che quella tra le concentrazioni delle soluzioni dei problemi (11) e (12), con la condizione (13) la disuguagliaza tra concentrazioni viene stabilita solo per le soluzioni dei problemi (11) e (14).

2. Il caso delle disequazioni.

Sia $z \in H_0^1(\Omega)$, $z \geq 0$, soluzione della seguente disequazione variazionale

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij} z_{x_i} (\varphi - z)_{x_j} + \sum_{i=1}^N b_i z(\varphi - z)_{x_i} + cz(\varphi - z) \geq \\ \geq \int_\Omega f(\varphi - z), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad \varphi \geq 0. \tag{16}$$

Supponiamo soddisfatte le ipotesi (4), (5) e (6) sui coefficienti dell'operatore; inoltre supponiamo $f \in L^2(\Omega)$.
I primi risultati di simmetrizzazione per soluzioni di disequazioni variazionali sono dovuti a C. Bandle [5] e C. Maderna - S. Salsa [6] e riguardano il caso di disequazioni variazionali relative ad operatori con sola parte dominante. Tali risultati sono stati successivamente estesi ad operatori con termini di ordine inferiore (cfr. [3], [4]) nello stesso ordine di idee di quanto descritto nel paragrafo precedente per le equazioni. In questo paragrafo intendiamo estendere il Teorema 1 al caso delle disequazioni variazionali: intendiamo cioè confrontare la concentrazione della soluzione di (16) con la concentrazione della soluzione di un opportuno problema a simmetria radiale. Nel precedente paragrafo abbiamo ottenuto tale risultato, relativamente alle equazioni, per dualità; non potendo procedere allo stesso modo per le disequazioni variazionali è necessario fornire una dimostrazione diretta.
Cominciamo innanzitutto sottolineando che in tale paragrafo il riordinamento di una funzione è da intendersi come riordinamento con segno. In particolare, per quanto riguarda il termine noto f, il simbolo f^* designa la funzione

$$f^* = (f^+)^* - (f^-)_*$$

e il simbolo $f^\sharp$ designa la funzione

$$f^\sharp = (f^+)^\sharp - (f^-)_\sharp.$$

Sottolineamo che è necessario prendere in considerazione il caso in cui il termine noto sia di segno variabile in quanto se f è, per esempio, non negativa la soluzione di (16) è soluzione di una equazione. Anche nel caso piú generale dei riordinamenti con segno continua a valere la diseguaglianza di Hardy (1). Inoltre, per quanto riguarda la condizione (13), essa può essere riproposta nella stessa forma; ovviamente la funzione δ risulta in questo caso una funzione a simmetria sferica, decrescente rispetto a $|x|$, ma non necessariamente positiva. Ciò premesso sia $w \in H_0^1(\Omega^\sharp)$, $w \geq 0$, soluzione del seguente problema a simmetria sferica

$$(17) \qquad \int_{\Omega^\sharp} \sum_{i=1}^N w_{x_i}(\varphi - w)_{x_i} + B \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{|x|}(\varphi - w)_{x_i} + c_\sharp w(\varphi - w) \geq$$
$$\geq \int_{\Omega^\sharp} \delta(x) \exp(-B|x|)(\varphi - w), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega^\sharp), \quad \varphi \geq 0,$$

dove $\delta(x)$ verifica la condizione (13).
Il problema (17) ammette un'unica soluzione a simmetria sferica, in quanto la funzione

$$W(x) = w(x) \exp(B|x|)$$

è soluzione della seguente disequazione variazionale, relativa ad un operatore autoaggiunto, con dati a simmetria sferica

$$\int_{\Omega^\sharp} \exp(-B|x|) W_{x_i}(\varphi - W)_{x_i} + c_\sharp \exp(-B|x|) W(\varphi - W) \geq$$
$$\geq \int_{\Omega^\sharp} \delta \exp(-B|x|)(\varphi - W), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega^\sharp), \quad \varphi \geq 0.$$

La soluzione del problema (17) risulta inoltre decrescente rispetto alla variabile radiale. Facciamo una verifica diretta, in condizioni di regolarità per δ e $c_\sharp$. Posto $W(\rho) = W(x)$, con $|x| = \rho$, nella zona in cui $W(x) > 0$, cioè per x tale che $|x| < \rho_0$ con $\rho_0 = (|w > 0|/\omega_N)^{1/N}$, la funzione $W(\rho)$ è soluzione dell'equazione

$$-W'' + W' \left(B - \frac{N-1}{\rho} \right) + c_\sharp W = \delta,$$

con ovvio significato dei simboli W', W''.
Derivando rispetto a ρ, posto $H = W'$, si ha

$$-H'' + H'\Big(B - \frac{N-1}{\rho} \Big) + H\Big(c_\sharp + \frac{N-1}{\rho^2} \Big) = \delta' - c_\sharp' W \leq 0,$$

dove δ' e $c'_\sharp$ denotano le derivate di δ e di $c_\sharp$ rispetto alla variabile radiale. Essendo $H(0) = 0$ e $H(\rho_0) \le 0$, per il principio di massimo risulta $H \le 0$ cioè l'asserita monotonia. Da tali proprietà della funzione $W(x)$ discende che

$$\int_{w>t} (\delta \exp(-B|x|) - c_\sharp w) \ge 0 \quad \forall t. \tag{18}$$

Infatti si ha

$$\int_{w>t} (\delta \exp(-B|x|) - c_\sharp w) = -\int_{w>t} (\exp(-B|x|) W_{x_i})_{x_i} =$$
$$= -\int_{w=t} \exp(-B|x|) W' dH_{N-1}(x) \ge 0.$$

Sussiste il seguente

Teorema 2. *Nelle ipotesi (4), (5), (6) e (13), se z è soluzione di (16) e w è soluzione di (17) si ha*

$$z^*(s) \le w^*(s), \ 0 \le s \le s_0, \tag{19}$$

$$\int_{s_0}^{s} z^* \le \int_{s_0}^{s} w^*, \ \forall s \in [s_0, |\Omega|], \tag{20}$$

dove $s_0 = \inf\{s : c_*(s) > 0\}$.

Indicheremo solo i punti principali della dimostrazione in quanto essa segue la linea dimostrativa del Teorema 3.1 di [4]. Sottolineiamo inoltre che in tale dimostrazione gioca un ruolo essenziale la condizione (18) che è diretta conseguenza della ipotesi (13).

Primo passo. Fissati $t, h > 0$, consideriamo la funzione

$$\theta_h(x) = \begin{cases} h, & z(x) > t + h \\ z(x) - t, & t < z(x) \le t + h \\ 0, & z(x) \le t. \end{cases} \tag{21}$$

Utilizzando $z + \theta_h$ come funzione test in (16) e facendo tendere h a zero, si ottiene

$$-\frac{d}{dt} \int_{z>t} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} z_{x_i} z_{x_j} = -\frac{d}{dt} \int_{z>t} z \sum_{i=1}^{N} b_i z_{x_i} + \int_{z>t} (f - cz). \tag{22}$$

Posto $z^*(s) = z(s)$ e

$$F_z(s) = \int_0^s (\delta^* e^* - c_* z),$$

denotata con μ la funzione distribuzione di z, dalla (22) si ottiene, con tecniche standard (cfr. [2]),

$$-\frac{d}{dt}\int_{z>t} |\nabla z|^2 \leq Bt[-\mu'(t)]^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{d}{dt}\int_{z>t} |\nabla z|^2\right)^{\frac{1}{2}} + F_z(\mu(t)). \tag{23}$$

Osserviamo che

$$-\frac{d}{dt}\int_{z>t} z \sum_{i=1}^N b_i z_{x_i} \leq Bt\left(-\frac{d}{dt}\int_{z>t} |\nabla z|\right),$$

per cui, ancora dalla (22), segue la seguente disuguaglianza

$$\int_{z>0} (f - cz) \geq 0. \tag{24}$$

Dalla (23) discende

$$\left(-\frac{d}{dt}\int_{z>t} |\nabla z|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{Bt}{2}[-\mu'(t)]^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{B^2t^2}{4}[-\mu'(t)] + F_z(\mu(t))},$$

da cui, posto $k_N = N\omega_N^{1/N}$, in virtù anche della disuguaglianza isoperimetrica,

$$k_N \mu(t)^{1-1/N} \leq -\frac{d}{dt}\int_{z>t} |\nabla z| \leq [-\mu'(t)]^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{d}{dt}\int_{z>t} |\nabla z|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

La precedente disuguaglianza può essere riscritta in termini del riordinamento $z(s)$ della soluzione di (16) nel modo seguente

$$\begin{aligned} - k_N s^{1-1/N} z'(s) \leq \frac{B}{2} z(s) + \\ + \sqrt{\frac{B^2}{4} z^2(s) - z'(s) F_z(s)}, \quad 0 \leq s \leq |z > 0|. \end{aligned} \tag{26}$$

Secondo passo. Per il fatto che la soluzione $w(x)$ del problema (17) è a simmetria sferica decrescente, si ha, posto $w^*(s) = w(s)$,

$$-k_N^2 s^{2-2/N} w'(s) = Bk_N s^{1-1/N} w(s) + F_w(s), \quad s \in [0, |w > 0|[. \tag{27}$$

Per la (18) è $F_w(s) \geq 0$ e quindi

$$-\,k_N s^{1-1/N} w'(s) = \\ = \frac{B}{2} w(s) + \sqrt{\frac{B^2}{4} w^2(s) - w'(s) F_w(s)}, \quad s \in [0, |w > 0|[. \tag{28}$$

Dalla (27), con semplici considerazioni riconducibili al principio di massimo, si può dedurre che

$$\operatorname{supp}(\delta^+) \subset [0, |w > 0|], \tag{29}$$

avendo indicato con δ^+ la parte positiva del riordinamento decrescente δ^* di δ. Infatti posto $W(s) = w(s)/e^*(s)$, dalla (27) si ottiene

$$-(k_N^2 s^{2-2/n} e^* W')' + c_* e^* W = \delta^* e^*.$$

Dato che $w'(|w > 0|) = 0$, W verifica le condizioni al contorno

$$W(|w > 0|) = W'(|w > 0|) = 0.$$

Allora, per il principio di massimo, $\delta^* e^*$ non può essere non negativa nell'intervallo $[0, |w > 0|]$.

Terzo passo. Ricordiamo che $s_0 = \inf\{s : c_*(s) > 0\}$. Distinguiamo vari casi:

i) $|z > 0| \leq s_0$; in questo caso si ha necessariamente $|z > 0| \leq |w > 0|$. Infatti, supposto per assurdo $|w > 0| < |z > 0|$, poiché da $w'(|w > 0|) = 0$ segue $F(|w > 0|) = 0$ (cfr. (27)), dalla (29) si otterrebbe

$$\int_0^{|z>0|} \delta^* e^* < \int_0^{|w>0|} \delta^* e^* = 0,$$

che é assurdo in quanto il primo membro è positivo (cfr. (24)). Si ha dunque $|z > 0| \leq |w > 0|$; poiché

$$F_z(s) = \int_0^s \delta^* e^* \geq 0, \quad 0 \leq s \leq |z > 0|,$$

dalla (26) segue

$$-k_N^2 s^{2-2/N} z'(s) \leq B k_N s^{1-1/N} z(s) + \int_0^s \delta^* e^*, \quad s \in [0, |z > 0|[. \tag{30}$$

Dalla (27) e dalla (30), posto $t(s) = z(s) - w(s)$, si ottiene

$$(e(s)t(s))' \geq 0, \quad s \in]0, |z > 0|[;$$

integrando da s a $|z > 0|$, si ha $z(s) \leq w(s)$, $0 \leq s \leq |z > 0|$.
ii) Se $s_0 < |z > 0| \leq |w > 0|$, posto

$$T(s) = \int_{s_0}^{s} c_*(z - w), \quad s \geq s_0,$$

facciamo vedere che

(31) $$T(s) \leq 0, \ s \in [s_0, |z > 0|].$$

Ragioniamo per assurdo: se la (31) fosse falsa, esisterebbe $\overline{s} \in]s_0, |z > 0|]$ e $h > 0$ tali che

$$\begin{cases} T(\overline{s}) > 0, \ T'(\overline{s}) = 0 \\ 0 < T(s) < T(\overline{s}), \ \overline{s} - h < s < \overline{s}. \end{cases}$$

Rileviamo che $s_0 < \overline{s} < |z > 0|$. Infatti se fosse

$$\overline{s} = |z > 0| = |w > 0|,$$

poichè $T(\overline{s}) \geq 0$, si avrebbe

$$F_z(\overline{s}) < F_w(\overline{s}) = 0$$

in contraddizione con la (24); se fosse $\overline{s} = |z > 0| < |w > 0|$, si avrebbe

$$T'(\overline{s}) = -c_* w(\overline{s}) < 0,$$

in contraddizione con la condizione $T'(\overline{s}) = 0$. La funzione $T(s)$ ha derivata destra e sinistra per ogni s ed esse sono positive su $[\overline{s} - h, \overline{s}]$. Allora esiste un intervallo $]\alpha, \beta[\subset]\overline{s} - h, \overline{s}[$ tale che

(32) $$z(s) - w(s) > 0, \quad \forall s \in]\alpha, \beta[, \quad z(\beta) - w(\beta) = 0.$$

Da (32) discende che esiste una successione $s_n \nearrow \beta$ tale che

$$l_z = \lim_n z'(s_n) \leq \lim_n w'(s_n) = l_w \leq 0;$$

inoltre si ha $-\infty < l_z \leq l_w < 0$. Allora segue dalla (26)

$$k_N \beta^{1-1/N} \leq \frac{B}{2} \frac{z(\beta)}{(-l_z)} + \sqrt{\left(\frac{Bz(\beta)}{2l_z}\right)^2 - \frac{F_z(\beta)}{l_z}} \tag{33}$$

e dalla (28)

$$k_N \beta^{1-1/N} = \frac{B}{2} \frac{w(\beta)}{(-l_w)} + \sqrt{\left(\frac{Bw(\beta)}{2l_w}\right)^2 - \frac{F_w(\beta)}{l_w}}. \tag{34}$$

Dato che $z(\beta) = w(\beta),\ 0 < -l_w \leq -l_z$ e

$$F_z(\beta) = \int_0^\beta (\delta^* e^+ - c_* z) < \int_0^\beta (\delta^* e^* - c_* w) = F_w(\beta),$$

e inoltre $F_w(\beta) \geq 0$, da (33) e (34) si ottiene una contraddizione.
Dalla (31) si ottiene (cfr. [2])

$$\int_{s_0}^s z \leq \int_{s_0}^s w, \quad s \in [s_0, |z > 0|[$$

cioè la (20).
Dalla precedente disuguaglianza segue $z(s_0) \leq w(s_0)$; inoltre essendo

$$-k_N^2 s^{2-2/N} z'(s) \leq B k_N s^{1-1/N} z(s) + \int_0^s \delta^+ e^*, \quad 0 \leq s \leq s_0,$$

si ha, con $t(s) = z(s) - w(s)$,

$$k_N s^{1-1/N} t'(s) + B t(s) \geq 0, \quad s \leq s_0$$

ovvero $(e^*(s)t(s))' \geq 0,\ 0 \leq s \leq s_0$; integrando tra s e s_0 e ricordando che $t(s_0) \leq 0$ si ottiene

$$z(s) \leq w(s), \quad s \in [0, s_0],$$

cioè la (19).
iii) $|w > 0| < |z > 0|$; i casi $|w > 0| < |z > 0| = s_0$ e $|w > 0| \leq s_0 < |z > 0|$ non possono verificarsi. Per il primo cfr. i), per il secondo, osservato ancora che

$$\int_0^{|w>0|} \delta^* e^* \mathrm{d}s = 0,$$

si ha per la (29),

$$F_z(|z>0|) = \int_{|w>0|}^{|z>0|} \delta^* e^* - \int_0^{|z>0|} c_* z < 0,$$

e ciò in contraddizione con (24).
Analizziamo infine il caso $s_0 \leq |w > 0| \leq |z > 0|$. Da $F(|w > 0|) = 0$ segue

$$\int_0^{|w>0|} \delta^* e^* = \int_0^{|w>0|} c_* w;$$

allora, se $|w > 0| \leq s \leq |z > 0|$,

$$T(s) = \int_{s_0}^{s} c_*(z-w) = \int_0^s c_* z - \int_0^{|w>0|} c_* w = \int_0^s c_* z - \int_0^{|w>0|} \delta^* e^*.$$

Poiché, in virtú della (24),

$$\int_0^{|z>0|} c_* z \leq \int_0^{|z>0|} \delta^* e^*,$$

si ha dalla (29)

$$T(|z>0|) \leq \int_0^{|z>0|} \delta^* e^* - \int_0^{|w>0|} \delta^* e^* = \int_{|w>0|}^{|z>0|} \delta^* e^* < 0.$$

$T(s)$ risulta crescente su $[|w > 0|, |z > 0|]$, per cui avendosi $T(|z > 0|) < 0$, si ha

$$|w>0| \leq s \leq |z>0| \Longrightarrow T(s) < 0.$$

Tenuto conto che $T(s_0) = 0$, se non si avesse

$$T(s) \leq 0, \quad s_0 \leq s \leq |w>0|,$$

si potrebbe ripetere il ragionamento in ii); segue allora

$$\int_{s_0}^{s} z \leq \int_{s_0}^{s} w, \quad s_0 \leq s \leq |z>0|;$$

con il solito ragionamento si fa vedere che

$$z(s) \leq w(s), \quad 0 \leq s \leq s_0,$$

concludendo in tal modo la dimostrazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Alvino - P.L. Lions - G. Trombetti, *On optimization problems with prescribed rearrangements,* Nonlin. An. TMA, 13 (1989), pp. 185–220.

[2] A. Alvino - P.L. Lions - G. Trombetti, *Comparison results for elliptic and parabolic equations,* Ann. I.H.P. An. Non Lin., 7 (1990), pp. 37–65.

[3] A. Alvino - S. Matarasso - G. Trombetti, *Variational inequalities and rearrangements,* Rend. Mat. Acc. Lincei, (9) 3 (1992), pp. 271–285.

[4] A. Alvino - P.L. Lions - S. Matarasso - G. Trombetti, *Comparison results for elliptic problems via symmetrization,* Ann. I.H.P. An. Non Lin., 16 (1999), pp. 167–188.

[5] C. Bandle - J. Mossino, *Rearrangements in variational inequalities,* Ann. Mat. Pura e Appl., 138 (1984), pp. 1–14.

[6] C. Maderna - S. Salsa, *Some special properties of solutions to obstacle problem,* Rend. Sem. Mat. Un. Padova, 71 (1984), pp. 121–129.

Angelo Alvino - Guido Trombetti,
Dipartimento di Matematica e Applicazioni,
Università di Napoli "Federico II",
Complesso Monte S. Angelo,
Via Cintia,
80126 Napoli (ITALY)
e-mail: alvino@matna1.dma.unina.it
trombetti@matna1.dma.unina.it

Silvano Matarasso,
Dipartimento di Matematica-CIRAM,
Università di Bologna,
Via Saragozza 8,
40123 Bologna (ITALY)
e-mail: matarass@ciram.ing.unibo.it