LE MATEMATICHE
Vol. LIV (1999) – Supplemento, pp. 125–136

IL PROBLEMA DI STEFAN: REGOLARITÀ DELLA FRONTIERA LIBERA

SANDRO SALSA

A Filippo indimenticabile amico e matematico.

We describe recent results on the regularity for the Stefan problem obtained in a joint work with I. Athanasopoulos and L. Caffarelli.

1. Introduzione.

Qualche anno fa, insieme a I. Athanasopoulos e L. Caffarelli, abbiamo iniziato un programma col proposito di dimostrare che soluzioni deboli, in un senso opportuno, e frontiere libere di problemi di evoluzione con due fasi possiedono un "naturale" grado di regolarità. Il prototipo dei problemi ai quali ci stiamo riferendo è il classico problema di Stefan, un semplice modello che descrive la fusione/solidificazione di un materiale omogeneo ed è quello che, per convenienza di esposizione, discuteremo qui, cercando di evidenziare le idee e le tecniche generali usate. Una formulazione debole o, per il suo significato fisico, *dell'entalpia*, del problema di Stefan è nota da molto tempo (si veda ad esempio [5]): assegnando dati di Cauchy-Dirichlet, si tratta di determinare nel cilindro $Q_T = \Omega \times (0, T)$ una coppia (u, w), $u \in L^\infty(Q_T)$, $w \in L^\infty(Q_T)$ tale che

i) $w \in \beta(u)$, dove $\beta(u) = u^+ - u^- + \frac{1}{2} sign\ u$

ii) per ogni funzione test φ che si annulla su $\partial\Omega \times (0, T)$ e su $\Omega \times \{t = T\}$

$$(1)\quad \iint_{Q_T} (u\Delta\varphi + w\varphi_t)\, dxdt + \int_{\Omega} w(x,0)\,\varphi(x,0)\, dx - \int_0^T \int_{\partial\Omega} g\varphi_\nu d\sigma dt = 0.$$

Tipicamente, Ω è un dominio limitato della forma $\Omega_1 \backslash \Omega_0$, $\Omega_1 \subset\subset \Omega_0$ e per esempio $g_{|\partial\Omega_1} < 0$, $g_{|\partial\Omega_0} > 0$ (per assicurare la presenza della frontiera libera): sotto ipotesi abbastanza naturali sui dati è allora possibile dimostrare che la soluzione esiste ed è unica e

$$u_t \in L^\infty(Q_T), \qquad \sup_{0<t<T} \int_\Omega |\nabla_x u|^2\, dx < \infty.$$

Se la soluzione debole fosse anche sufficientemente regolare, si vede subito che, dove $u < 0$ oppure $u > 0$, deve essere $\Delta u - u_t = 0$; se poi anche l'insieme di livello zero di u, $\Gamma = \{u = 0\}$, ossia la *frontiera libera,* è una superficie regolare, dalla (1) si ricava la seguente condizione (*di Stefan*):

$$(2)\qquad V_\nu = u_\nu^- - u_\nu^+$$

dove V_ν indica la velocità della superficie $\Gamma_t = \Gamma \times \{t\}$ nella direzione $\nu = \frac{\nabla u^+}{|\nabla u^+|}$. Il problema è quindi il recupero delle informazioni riguardandi u e Γ o, in altri termini, stabilire "quanto classica può essere una soluzione debole".

Un primo importante risultato in questa direzione è la continuità delle soluzioni deboli, stabilito da Caffarelli ed Evans nel 1983 ([4]). Ciò consente almeno di definire la frontiera libera di u come

$$F(u) = \partial\{u > 0\} \cap Q_T.$$

D'altra parte va detto che la formulazione debole prevede la possibilità di formazione di misture fini solido/liquido che occupano regioni di misura (di Lebesgue) non nulla, le cosiddette *mushy regions*.In questo caso, le due fasi, solida e liquida, non sono separate da una superficie. Tuttavia, in assenza di sorgenti, come nel nostro caso, Götz e Zaltzmann ([6]) hanno dimostrato che questo tipo di fenomeno non si presenta, se inizialmente $F(u)$ è una superficie.

Una teoria della regolarità per problemi come quello di Stefan può svilupparsi secondo linee che, in un certo senso, possiamo definire canoniche e che portano alla formulazione delle questioni a) e b) indicate sotto, la cui soluzione dovrebbe costituire un soddisfacente passo avanti nella comprensione dei fenomeni a due fasi. Le maggiori difficoltà si annidano, in linea di principio, nella doppia omogeneità che il problema presenta. Da un lato, l'equazione del calore è invariante per cambi di scala (parabolici) del tipo $u \to \frac{u(\lambda x, \lambda^2 t)}{\lambda}$ ma in questo caso la condizione di Stefan diventa $V_\nu = \lambda \left(u_\nu^- - u_\nu^+\right)$, peggiorando drasticamente in vista di iterazioni che prevedano $\lambda \to 0$. Dall'altro, la condizione di Stefan è invariante rispetto al cambiamento di scala (iperbolico) $u \to \frac{u(\lambda x, \lambda t)}{\lambda}$ mentre l'equazione del calore diventa $\Delta u - \lambda u_t = 0$; se λ è piccolo, si perde sempre più connessione fra i valori di u a tempi diversi.

a) Supponiamo di partire da una certa regolarità per la frontiera libera e di voler dedurre ulteriore regolarità. Qui, filosoficamente, il problema è capire quale possa essere un naturale punto di partenza. Vicino alla frontiera libera, l'omogeneità è iperbolica e quindi sembra naturale partire con l'assumere che $F(u)$ sia localmente grafico di una funzione Lipschitziana sia rispetto allo spazio sia rispetto al tempo. Possiamo dedurre ulteriore regolarità? Per esempio che u è Lipschitziana, che è la regolarità ottimale, dato il salto delle derivate normali, e che $F(u)$ è $C^{1,\alpha}$ (cosa che capita per il problema di Stefan ad una fase) o almeno C^1.

Notiamo incidentalmente che per particolari geometrie e dati iniziali/al bordo, la frontiera libera è in effetti Lipschitziana ([7]) e quindi una risposta alla questione a) ha un interesse intrinseco.

b) Supponiamo che $F(u)$ non sia necessariamente un grafico ma che sia "piatta" in qualche senso opportuno (per esempio che sia contenuta tra due piani paralleli a distanza molto piccola). Possiamo dedurre che $F(u)$ è un grafico, magari Lipschitziano, ed applicare a) per concludere che è regolare?

La questione è connessa anche con il problema dell'esistenza di un tempo finito di regolarizzazione; più precisamente, se u converge per $t \to \infty$ verso uno stato di equilibrio regolare ci si chiede se, qualunque sia la configurazione iniziale, prima o poi u diventa una soluzione classica.

Rimangono comunque aperte altre importanti questioni legate alla struttura dei punti singolari (in un intorno dei quali $F(u)$ "non è piatta") e all'effetto che un termine di curvatura di $F(u)$ nella condizione di frontiera libera possa avere sulla regolarizzazione.

2. Un controesempio.

Incominciamo a considerare la questione a) posta alla fine dell'introduzione. Assumiamo dunque che $(0,0) \in F(u)$ e che in un intorno di $(0,0)$ $F(u)$ sia grafico di una funzione $x_n = f\left(x', t\right)$ lipschitziana in x' e t con costante di Lipschitz L. Il seguente controesempio, per il problema di Stefan ad una fase, indica che non ci si può aspettare ulteriore regolarità per f. Consideriamo la funzione

$$w(\rho, \theta, t) = \rho^{g(t)} [\cos\{g(t)\theta\}]^+$$

dove ρ, θ sono coordinate polari nel piano e + indica la parte positiva. Se g è decrescente e maggiore di 2, w è una *soprasoluzione* del problema di Stefan in un intorno dell'origine sufficientemente piccolo. Nell'origine, la frontiera libera di w presenta un angolo ($< \frac{\pi}{2}$ poiché $g > 2$) che persiste nel tempo e il flusso di calore (quindi V_ν) è ivi nullo. Sia ora $C_R = B_R \times (0, R^2)$ con R piccola, e sia u la soluzione del problema di Stefan in C_R tale che $u = w$ su $\partial_p C_R$. Allora $u \geq w$ in C_R, forzando $F(u)$ ad avere un angolo nell'origine persistente nel tempo. Un altro controesempio, questa volta in dimensione spaziale 3 e per un problema a due fasi si può trovare in [2].

La conclusione è che, per problemi d'evoluzione a due fasi, un angolo nella frontiera libera non si regolarizza istantaneamente, presentando un tipico fenomeno di natura iperbolica.

Un esame del controesempio rivela che due sono i motivi d'ostruzione alla regolarizzazione. Se g decresce oltre 2, *w non è più una soprasoluzione*. Ciò indica che se l'angolo non è troppo acuto o, in altri termini, se la costante di Lipschitz è sufficientemente piccola, ci si può aspettare regolarità.

D'altra parte, nell'origine, i flussi di calore da entrambe le parti, ossia le derivate normali di u, si annullano. Si può ragionevolmente pensare che se almeno uno dei due è diverso da zero, l'equazione non degeneri troppo e si recuperi un effetto regolarizzante.

Prima di procedere all'analisi introduciamo una classe di soluzioni appropriate.

3. Soluzioni di viscosità.

In vista di possibili estensioni a condizioni più generali di quella di Stefan, per esempio del tipo

$$V_\nu = G(u^+, u^-, \nu, x, t),$$

la nozione più appropriata di soluzione è quella di viscosità.

Una funzione *continua u* è *sottosoluzione* (risp. *soprasoluzione*) di viscosità in Q_T se per ogni sottocilindro $Q \subset Q_T$ e ogni supersoluzione (risp. sottosoluzione) classica v in Q, $u \leq v$ su $\partial_p Q$ (risp. $u \leq v$) implica $u \leq v$ in Q (risp. $u \leq v$); u è soluzione di viscosità se è sia sopra sia sottosoluzione di viscosità.

Soluzioni classiche e soluzioni deboli del problema di Stefan sono anche soluzioni nel nuovo senso. Il primo risultato riguardante la questione a) del paragrafo 1 è il seguente.

Teorema 3.1. ([1]). *Sia u una soluzione viscosa del problema di Stefan in $Q_1 = B_1 \times (-1, 1)$. Se $F(u)$ è Lipschitziana allora u è Lipschitziana in $Q_{1/2}$.*

Come abbiamo già detto, questa regolarità è ottimale. Si può altresì precisare in che senso una soluzione viscosa verifica la condizione di Stefan (2).

Teorema 3.2. ([1]). *Sia u come nel Teorema 1 e sia $(0,0)$ un punto di differenziabilità comune per $F(u)$ e per $\nabla u^{\pm}$. Allora, vicino all'origine, u ha il seguente sviluppo asintotico*

$$u(x,t) = \left(\alpha^{+}\langle \nu, x\rangle + \beta^{+} t\right)^{+} - \left(\alpha^{-}\langle \nu, x\rangle + \beta^{-} t\right)^{-} + o\left(\sqrt{|x|^2 + t^2}\right)$$

dove $\alpha^{+}\langle \nu, x\rangle + \beta^{+} t^{+} = \alpha^{-}\langle \nu, x\rangle + \beta^{-} t = 0$ è l'equazione del piano tangente a $F(u)$ nell'origine. Inoltre

$$\beta^{\pm} = \alpha^{\pm}\left(\alpha^{+} - \beta^{+}\right).$$

Passiamo ora all'analisi della frontiera libera.

4. Un caso non degenere.

Cominciamo l'analisi della regolarità della frontiera libera considerando il caso in cui i due flussi di calore che l'attraversano da parti opposte non siano simultaneamente nulli. Un modo per esprimere convenientemente tale condizione è il seguente:

- (ND) Esiste $m_0 > 0$ tale che, per ogni $(x_0, t_0) \in F(u)$ e per ogni $r > 0$, piccolo,

$$\int_{B_r(x_0)} |u|\, dx \geq m_0 r^{n+1}.$$

Se (ND) vale si può provare il seguente risultato

Teorema 4.1. ([2]). *Sia u soluzione viscosa del problema di Stefan in Q_2, tale che $F(u)$ sia data dal grafico della funzione Lipschitziana $x_n = f\left(x', t\right)$. Supponiamo inoltre che u sia normalizzata, cioè uguale ad uno, nel punto $\left(e_n, -\frac{3}{2}\right)$. Allora esistono due costanti positive c_1, c_2, dipendenti solo da n, L, m_0 e dal massimo di $|u|$ in Q_2, tali che:*

Teorema 4.2. *1) In Q_1, $F(u)$ è di classe C^1 nello spazio e nel tempo; inoltre*

$$\left|\nabla_{x'} f\left(x', t\right) - \nabla_{x'} f\left(y', t\right)\right| \leq c_1 \left(-\log\left|x' - y'\right|\right)^{-4/3}.$$

2) u è una soluzione classica e

$$u_\nu^+ \geq c_2 > 0.$$

Diamo un'idea della strategia della dimostrazione. Anzitutto, il fatto che $F(u)$, cioè l'insieme di livello zero di u, sia Lipschitziana implica che tale tipo di informazione si possa propagare in un intorno. In altri termini, in un intorno di $F(u)$, gli insiemi di livello sono ancora Lipschitziani, rispetto alla stessa direzione e_n. In particolare u è crescente lungo tutte le direzioni τ appartenenti ad un cono $\Gamma(e_n, \theta_0)$ (cono di monotonia, d'ora in poi) di asse e_n ed apertura θ_0, legata alla costante di Lipschitz L di f.

Il secondo passo è aumentare l'apertura del cono di monotonia lontano dalla frontiera libera. A questo scopo si considera il gradiente di u in un punto, diciamo $p_0^+ = \left(e_n, -\frac{3}{2}\right)$; poniamo $\sigma^+ = \nabla u(p_0)$. Allora, per ogni $\tau \in \Gamma(e_n, \theta_0)$,

$$\frac{D_\tau u(p_0)}{D_{e_n} u(p_0)} \geq C \cos\left(\tau, \sigma^+\right) \equiv \epsilon(\tau)$$

con $C = C(n)$, ossia

$$D_{\tau(\varepsilon)} u(p_0) \geq 0, \qquad \tau(\varepsilon) = \tau - \epsilon(\tau) e_n. \tag{3}$$

Usando la disuguaglianza di Harnack, la (3) si propaga ad un intorno di p_0, diciamo $B_{1/16}(p_0) \times (-T, T)$.

Quando τ varia su $\partial\Gamma(e_n, \theta_0)$, $\tau(\varepsilon)$ descrive una famiglia di direzioni $\Gamma^+ \supset \Gamma(e_n, \theta_0)$. La stessa cosa si fa dalla parte negativa, considerando $\sigma^- = \nabla u\left(-e_n, -\frac{3}{2}\right)$: in un intorno $B_{1/16}(p_0) \times (-T, T)$ di $p_0^- = \left(-e_n, -\frac{3}{2}\right)$, si ha $D_\tau u \geq 0$ per $\tau \in \Gamma^- \supset \Gamma(e_n, \theta_0)$. L'intersezione $\Gamma^+ \cap \Gamma^-$ contiene un cono $\Gamma(\nu_1, \theta_1)$, con $\frac{\pi}{2} - \theta_1 \leq \mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)$, $\mu < 1$. La nuova apertura θ_1 del cono di monotonia segnala che. nei due intorni cilindrici $B_{1/16}\left(p_0^\pm\right) \times (-T, T)$ gli insiemi di livello di u sono grafici lipschitziani con una migliore (più piccola) costante di Lipschitz.

Il problema ora è trasportare questa informazione alla frontiera libera. L'idea è di usare un metodo perturbativo costruendo una famiglia di sottosoluzioni capaci di misurare in ogni punto l'apertura del cono di monotonia e di trasferire almeno una parte del miglioramento interno fino ad $F(u)$. Il lemma chiave è il seguente.

Lemma 4.3. *Sia u calorica (cioè soluzione positiva di $\Delta u - u_t = 0$) in un dominio D, monotona lungo le direzioni di un cono Γ. Sia φ una funzione regolare tale che $1 \leq \varphi \leq 2$ e che, per opportune costanti positive c_1, c_2 e $c_3 > 1$,*

(4) $$\Delta\varphi - c_1\varphi_t - c_2 |\nabla\varphi| - c_3 \frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} \geq 0 \qquad \varphi_t \geq 0$$

in $D' \subset\subset D$.

Allora la funzione

$$v_\varphi(x,t) = \sup_{B_{\varphi(x,t)}(x,t)} u$$

è sottocalorica in $\{v_\varphi > 0\} \cap D'$ e in $\{v_\varphi < 0\} \cap D'$.

Definiamo ora

$$D = \left[B_1 \backslash B_{1/16}\left(p_0^{\pm}\right)\right] \times (-T, T)$$

e costruiamo in D una famiglia di funzioni φ_η, $0 \leq \eta \leq 1$, soddisfacente (4) ed anche le seguenti condizioni, dove h, k sono numeri positivi sufficientemente piccoli:

(i) $1 \leq \varphi_\eta \leq 1 + \eta h$;
(ii) $\varphi_\eta \geq 1 + \eta h k$ in $B_{1/2} \times (-T/2, T/2)$;
(iii) $\varphi_\eta = 1$ fuori da $B_{8/9} \times \left(-\frac{7}{8}T, T\right)$;
(iv) $\left|\nabla\varphi_\eta\right| \leq C\eta h$.

Poniamo ora $p = (x,t)$, $q = (y,s)$ e definiamo

$$v_{\varphi_\eta}(p) = \sup_{B_{\varepsilon\varphi_\eta(p)\sin\theta_1}(p)} u(q - \varepsilon e_n).$$

Il fatto che u sia crescente lungo le direzioni del cono $\Gamma(e_n, \theta_0)$ equivale ad affermare che, per ogni $\varepsilon > 0$, $v_{\varphi_0}(p) \leq u$ in $Q_{2-\varepsilon}$. Ci chiediamo ora se, per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni $0 \leq \eta \leq 1$,

1. $v_{\varphi_\eta}(p) \leq u$ in $Q_{2-\varepsilon}$;
2. $v_{\varphi_\eta}(p)$è sottosoluzione del problema di Stefan.

Una risposta affermativa ad entrambe le questioni implica che $v_{\varphi_1}(p) \leq u$ e quindi, per la (ii), che in $B_{1/2} \times (-T/2, T/2)$ l'apertura del cono di monotonia è aumentata, migliorando così la costante di Lipschitz della frontiera libera.

Il controesempio indica che ciò non può avvenire in generale. Si verifica se si aggiunge a v_{φ_η} un termine correttivo che sfrutti meglio il guadagno ottenuto lontano da $F(u)$. Questo termine può essere scelto della forma $W^+ - W^-$ dove W^+ e W^- sono le misure caloriche in $\{u > 0\}$ e $\{u < 0\}$, rispettivamente, degli insiemi $\partial B_{1/16}\left(p_0^{\pm}\right) \times (-T, T)$ moltiplicate per $u\left(p_0^{\pm}\right)$.

Usando la condizione di non degenerazione (ND) si può ora mostrare che la nuova famiglia

$$\overline{v}_{\varphi_\eta} = v_{\varphi_\eta} + W^+ - W^-$$

soddisfa le richieste 1 e 2.

Il passo finale consiste nel riscalare il problema ed iterare il procedimento di apertura del cono. Nell'iterazione si vede che l'apertura della sezione nello spazio, θ_k^x, e quella della sezione spazio-temporale, θ_k^t, aumentano con diversa velocità. È un altro aspetto della doppia omogeneità del problema che, nello stesso tempo, determina quale debba essere il corretto fattore di scala ad ogni passo. Poniamo

$$\delta_k = \frac{\pi}{2} - \theta_k^x \qquad \mu_k = \frac{\pi}{2} - \theta_k^t$$

e riscaliamo ad ogni passo nel modo seguente:

$$x \to \lambda x \qquad t \to \frac{\delta_k}{\mu_k}\lambda t.$$

L'iterazione del procedimento di allargamento del cono implica allora che, in una successione di cilindri

$$B_{2^{-k}} \times \left(-\frac{\delta_k}{\mu_k 2^k}, \frac{\delta_k}{\mu_k 2^k}\right)$$

u è crescente lungo le direzioni di una successione di coni spaziali $\Gamma(\nu_k, \theta_k^x)$ e spazio-temporali $\Gamma(\nu_k', \theta_k^t)$ tali che

$$\begin{aligned} \delta_{k+1} &\leq \delta_k - c\frac{\delta_k^2}{\mu_k}, \\ \mu_{k+1} &\leq \mu_k - c\delta_k \end{aligned} \tag{5}$$

con $\delta_k \ll \mu_k^3$.

Da (5) si ricava subito che

$$\delta_k \sim \frac{c(\gamma)}{k^{3/2-\gamma}}, \qquad \mu_k \sim \frac{c(\gamma)}{k^{1/2-\gamma}}$$

per ogni $\gamma > 0$.

Il comportamento asintotico di δ_k, per $\gamma = 1/6$, determina esattamente il modulo di continuità di $\left|\nabla_{x'} f\right|$ indicato nel teorema 4.1.

Per dimostrare che la soluzione è classica basta ora osservare che, per ogni livello di tempo t_0 fissato, l'insieme $\{u > 0\} \cap \{t = t_0\}$ è un dominio di Liapunov-Dini. poichè u_t è limitata, i risultati in [9] si applicano e quindi le derivate parziali di u sono continue fino alla frontiera libera.

5. ε-monotonia e regolarizzazione.

In assenza di condizioni di non-degenerazione del tipo indicato nel paragrafo precedente, la regolarità della frontiera libera dipende dalla sua costante di Lipschitz. Infatti, se questa è sufficientemente piccola i risultati del teorema 4.1 continuano a valere: praticamente ci si trova in un altro caso non-degenere.. Un accurato esperimento numerico condotto con Nochetto, Schmidt e Verdi ([8]) mostra che, nel controesempio del paragrafo 2, l'angolo all'origine della frontiera libera si allarga fino a che, raggiunto un angolo critico, scompare e si regolarizza. In realtà, per trovarsi in una situazione non degenere non è necessario assumere che la frontiera libera sia Lipschitziana e anzi neppure che sia un grafico. È sufficiente che, nell'intorno di ogni suo punto, la sua sezione spaziale sia sufficientemente "piatta". Il modo più operativo per esprimere questa condizione è di ricorrere alla nozione di ε-monotonia:

Definizione. *Dato $\varepsilon > 0$, una funzione si dice ε-monotona nella direzione τ se $u(p + \lambda\tau) \geq u(p)$ per ogni $\lambda \geq \varepsilon$.*

Se vale una delle seguenti condizioni:

- $u = u(x, t)$ è vicina (in norma L^∞) a una funzione del tipo $ax_n^+ - bx_n^-$, $a, b > 0$;
- u è compresa tra due funzioni strettamente crescenti a distanza ε;
- $u = u(x, t)$ è vicina (in norma L^∞) a una funzione strettamente crescente lungo una direzione spaziale ed oscilla poco rispetto a t,

allora u è ε-monotona lungo le direzioni di un opportuno cono.

Si può provare il seguente risultato.

Teorema 5.1. ([3]). *Sia u una soluzione viscosa del problema di Stefan in Q_2, ε-monotona lungo le direzioni $\tau \in \Gamma(e_n, \theta_0^x) \cup \Gamma(\nu, \theta_0^t)$ con $\theta_0^t - \cos^{-1}(e_n, \nu) \equiv \theta^* > 0$. Supponiamo che $u\left(p_0^+\right) = 1$ e che $(0,0) \in F(u)$. Allora, se ε e $\delta_0 \equiv \frac{\pi}{2} - \theta_0^x$ sono abbastanza piccoli, in dipendenza da n e θ^*, le conclusioni 1 e 2 del Teorema 4.1 valgono.*

L'idea strategica generale della dimostrazione è simile a quella del Teorema 4.1; il problema più grosso è quello di controbilanciare l'assenza di condizioni tipo (ND) con un controllo della "derivata normale" di u alla frontiera libera. Procedendo come per il Teorema 4.1, si considera la famiglia di funzioni

$$v_{\varphi_\eta}(p) = \sup_{B_{\varepsilon\varphi_\eta(p)\sin\theta_1}(p)} u(q - \varepsilon e_n)$$

e si cerca ancora di trasferire il guadagno interno a $F(u)$, dimostrando le proprietà 1, 2 di pag.131. Ora, questo non si può fare per ogni $\varepsilon > 0$, ma occorre fissare ε. Quello che dunque si può trasferire non è la completa monotonia bensì la ε-monotonia. D'altra parte, la ε-monotonia implica completa monotonia se ci si allontana di almeno ε da $F(u)$, cosicchè è possibile decrescere ε, al prezzo di diminuire di una quantità trascurabile l'apertura del cono. Questo miglioramento in monotonia richiede una nuova famiglia di sottosoluzioni, simile alla v_{φ_η}. Per ottenere il risultato finale occorre dunque eseguire un doppio procedimento iterativo che consiste in ogni passo di un allargamento del cono e successivamente di un miglioramento in monotonia.

6. Due applicazioni.

In questo paragrafo illustriamo come si può applicare la precedente teoria ad alcuni problemi di piccole perturbazioni. L'interesse maggiore sta nel fatto che le perturbazioni sono misurate in norma L^∞. La prima applicazione riguarda l'esistenza di "tempi finiti di regolarizzazione", un fenomeno abbastanza comune in problemi di diffusione degeneri.

Osserviamo preliminarmente che le funzioni armoniche sono soluzioni stazionarie del problema di Stefan.

Teorema 6.1. ([3]). *Sia u soluzione del problema di Stefan a due fasi in $\overline{B}_1 \times [0, +\infty)$, convergente uniformemente in ogni compatto di B_1 ad una funzione armonica $u_\infty = u_\infty(x)$. Supponiamo che in un punto $x_0 \in F(u_\infty)$ si abbia $|\nabla u_\infty| \neq 0$. Allora esiste $T^* > 0$ e un intorno V di x_0 tali che in $V \times [T^*, +\infty)$ $F(u)$ è un grafico di classe C^1 e u è soluzione classica.*

Si può dunque partire con un insieme di livello zero per il dato iniziale selvaggio fin che si vuole ma, se il problema tende ad una situazione stazionaria regolare, dopo un tempo finito la frontiera libera diventa localmente un grafico regolare e la soluzione è in realtà classica.

La seconda applicazione riguarda la perturbazione di un'onda progressiva. Per il problema di Stefan, queste ultime sono della forma

$$w_0(x,t) = (A+1)\left(e^{t-x_n} - 1\right)^+ - A\left(e^{t-x_n} - 1\right)^- .$$

Vale il seguente risultato

Teorema 6.2. ([3]). *Sia $u\,(x,t)$ una soluzione viscosa globale del problema di Stefan. Se il dato iniziale $u\,(x,0)$ soddisfa una condizione del tipo*

$$w_0\,(x,0) - \varphi_0\,(x) \leq u\,(x,0) \leq w_0\,(x,0) + \varphi_0\,(x)$$

dove φ_0 ha supporto compatto, allora, dopo un tempo finito $T^* = T^*\,(w_0,\varphi_0)$, la frontiera libera $F\,(u)$ è un grafico regolare $x_n = g\left(x',t\right)$.

Anche in questa seconda applicazione, la filosofia è la stessa: si può infatti dimostrare che, nelle ipotesi del teorema, l'onda progressiva è asintoticamente stabile per perturbazioni a supporto compatto e quindi la soluzione del problema perturbato, avvicinandosi uniformemente ad una soluzione regolare (l'onda progressiva stessa), si regolarizza anch'essa.

BIBLIOGRAFIA

[1] I. Athanasopoulos - L.A. Caffarelli - S.Salsa, *Caloric functions in Lipschitz domains and the regularity of solutions to phase transition problems,* Annals of Math., 143 (1996), pp. 413–434.

[2] I. Athanasopoulos - L.A. Caffarelli - S.Salsa, *Regularity of the free boundary in parabolic phase transition problems,* Acta Math., 176 (1996), pp. 245–282.

[3] I. Athanasopoulos - L.A. Caffarelli - S.Salsa, *Phase Transition Problems of parabolic type: flat free boundaries are smooth,* Comm. Pure Appl. Math., 51 (1998), pp. 77–112.

[4] L.A. Caffarelli - L.C. Evans, *Continuity of the temperature in the Stefan problem,* Arch. Rat. Mech. Anal., 81 (1983), pp. 199–220.

[5] A. Friedman, *The Stefan problem in several space variables,* T.A.M.S., 133 (1968), pp. 51–87.

[6] I.G. Gotz - B.B. Zaltzman, *Non increase of mushy region in a nonhomogeneous Stefan problem,* Quart. Appl. Math., 49 (1991), pp. 741–746.

[7] R.H. Nochetto, *A class of non-degenerate two phase Stefan problems in several space variables,* Comm. P.D.E., 12 (1987), pp. 21–45.

[8] R.H. Nochetto - A. Schmidt - C Verdi, *Adapting Meshes and Time-Steps for phase Change problems,* apparirà su B.U.M.I.

[9] K.O. Widman, *Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations,* Math. Scand., 21 (1967), pp. 7–27.

Dipartimento di Matematica,
Politecnico di Milano,
Piazza Leonardo da Vinci 32,
20133 Milano (ITALY)
e-mail: sansal@mate.polimi.it