

SULLE CURVE DI GENERE MASSIMO

ANTONIO CAUSA

Let $G(d, s)$ be the maximum genus of a smooth irreducible curve in \mathbb{P}^3 of degree d not contained in any surfaces of degree less than s and $G(d, s, \sigma)$ the maximum genus of curves as before subject to the further condition that their general plane section is not contained in a plane curve of degree less than σ . We give a characterization of the couples (d, s) such that $G(d, s, \sigma) = G(d, s)$ for $\sigma = s, s - 1$.

1. Introduzione.

Uno dei problemi che ha stimolato la ricerca in geometria algebrica nell'ultimo secolo è una questione posta da Halphen sul finire del 1800.

Il problema si può enunciare nel modo seguente:

“Fissata la coppia di interi positivi (d, s) , qual'è il massimo genere $G(d, s)$ permesso ad una curva C , contenuta in \mathbb{P}^3 , liscia e irriducibile, di grado d e non contenuta in nessuna superficie di grado minore di s ?”

Una risposta del tutto completa a questa domanda non è stata ancora fornita ma si sono ottenuti risultati tali da poter affermare che il problema è, in buona parte, risolto. Poichè il calcolo della quantità $G(d, s)$ dipende fortemente dalla dimensione di d rispetto a quella di s il problema si divide naturalmente in tre

sottodomini del piano ds , che classicamente vengono così denominati:

$$\text{Range A: } \frac{s^2 + 4s + 6}{6} \leq d < \frac{s^2 + 4s + 6}{3};$$

$$\text{Range B: } \frac{s^2 + 4s + 6}{3} \leq d \leq s^2 - s;$$

$$\text{Range C: } d > s^2 - s.$$

Nel caso $d < \frac{s^2+4s+6}{6}$, ogni curva C di grado d è tale che $H^0 \mathcal{I}_C(s-1) \neq 0$, quindi, in questo caso, non esistono curve di \mathbb{P}^3 di grado d e che non stanno su superfici di grado minore di s ; per questo motivo l'insieme delle coppie (d, s) tali che $d < \frac{s^2+4s+6}{6}$ si chiama range \emptyset .

Definito $G(d, s)$ come il massimo genere permesso ad una curva di \mathbb{P}^3 di grado d e non contenuta in nessuna superficie di grado minore di s sono noti i seguenti risultati. Nel Range A, come conseguenza del teorema di Clifford e di quello di Riemann-Roch, si ha la seguente disuguaglianza:

$$(1) \quad g(C) \leq d(s-1) + 1 - \binom{s+2}{3}.$$

Si congettura che $G(d, s) = d(s-1) + 1 - \binom{s+2}{3}$ per ogni coppia (d, s) nel Range A; recentemente Ballico et al. [1] hanno dimostrato l'uguaglianza per $\frac{(s+1)^2}{4} \leq d \leq \frac{s^2+4s+6}{3}$ ⁽¹⁾. Per quanto riguarda il Range B, Hartshorne e Hirschowitz [7] hanno costruito delle curve lisce e connesse per ogni coppia (d, s) in questo insieme e hanno congetturato che queste curve raggiungano effettivamente il genere $G(d, s)$. In diversi lavori, Strano ed Ellia [2], [3], [13], hanno dimostrato che la congettura è vera almeno per quanto riguarda una parte del Range B. In particolare le curve costruite in [7] hanno genere massimo per $s^2 - 6s + 14 \leq d \leq s^2 - s$.

Nel Range C il problema è stato completamente risolto da Gruson e Peskine [5]; le curve che raggiungono il genere massimo, in questo caso, sono aritmeticamente Cohen-Macaulay.

Introduciamo adesso le seguenti notazioni.

Sia \mathbb{P}^n lo spazio proiettivo n -dimensionale su un campo k algebricamente chiuso e di caratteristica zero.

Con la parola curva si intenderà un sottoschema di \mathbb{P}^3 di dimensione pura 1 e senza punti immersi, ovvero localmente di Cohen-Macaulay.

⁽¹⁾ In realtà le disuguaglianze sono: $\frac{s^2+2s}{4} \leq d \leq \frac{s^2+4s+6}{3}$ quando s è pari, mentre $\frac{(s+1)^2}{4} \leq d \leq \frac{s^2+4s+6}{3}$ quando s è dispari.

Si indicherà con \mathcal{I}_C il fascio di ideali della curva C , con $\mathcal{I}_{C \cap H}$ il fascio di ideali della sezione di C con il generico piano H ; ovviamente $\mathcal{I}_{C \cap H}$ è un \mathcal{O}_H -modulo.

La sezione piana $C \cap H$ verrà indicata anche con il simbolo Γ .

Gli interi s e σ associati alla curva C sono definiti come:

$$s(C) = \min\{n \in \mathbb{Z} : H^0 \mathcal{I}_C(n) \neq 0\}$$

$$\sigma(C) = \min\{n \in \mathbb{Z} : H^0 \mathcal{I}_{C \cap H}(n) \neq 0\}.$$

Ovviamente vale la disuguaglianza $s \geq \sigma$. Con l'intero $g(C)$ si intenderà il genere (aritmetico) della curva C .

L'intero $e(C)$ è definito come: $\max\{n : h^1 \mathcal{O}_C(n) \neq 0\}$. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, con il simbolo $\lceil \alpha \rceil$ si intenderà il primo intero $\geq \alpha$.

Con il simbolo $HF(X, \cdot)$ si indicherà la funzione di Hilbert di X come sottoschema di \mathbb{P}^n ; con $\Delta HF(X, \cdot)$ si indicherà la differenza prima della funzione di Hilbert di X .

Se, oltre a fissare la coppia di interi (d, s) , fissiamo l'intero $\sigma \leq s$ e definiamo $G(d, s, \sigma)$ come il genere massimo delle curve lisce e irriducibili di \mathbb{P}^3 , di grado d , $s(C) \geq s$ e $\sigma(C) \geq \sigma$ è ovvio che $G(d, s, \sigma) \leq G(d, s)$.

Ci chiediamo: "Fissati s e σ per quali valori di d si ha $G(d, s, \sigma) = G(d, s)$ e per quali valori $G(d, s, \sigma) < G(d, s)$?"

In questo lavoro si dà una risposta a questa domanda quando $\sigma \geq s - 1$. Precisamente si otterranno i seguenti risultati.

Teorema A.

$$G(d, s, s) = G(d, s) \quad \text{per} \quad d \geq s^2 - 2s + 3;$$

$$G(d, s, s) < G(d, s) \quad \text{per} \quad d < s^2 - 2s + 3.$$

Inoltre le curve per cui $g(C) = G(d, s, s)$ sono tutte e sole le aritmeticamente Cohen-Macaulay la cui funzione di Hilbert è massimale (vedi § 4).

Teorema B.

$$G(d, s, s - 1) = G(d, s) \quad \text{per} \quad d \geq s^2 - 6s + 15;$$

$$G(d, s, s - 1) < G(d, s) \quad \text{per} \quad d < s^2 - 6s + 15.$$

Vorrei infine cogliere l'occasione per ringraziare il prof. R. Strano che mi ha proposto il problema e mi ha fornito utili consigli; il prof. G. Paxia e il dott. R. Re per il loro prezioso incoraggiamento.

2. Nozioni preliminari.

Quando per una curva C di grado d e $s(C) = s$ si conosce la funzione di Hilbert della generica sezione piana è possibile dare un maggiorante del genere della curva in funzione di questi invarianti.

Sia $h_i = \Delta HF(\Gamma, i) = HF(\Gamma, i) - HF(\Gamma, i - 1)$ la differenza prima della funzione di Hilbert della generica sezione piana di C .

Per completezza vengono riportati i seguenti risultati.

Lemma 2.0.1. *Data una curva C , di genere aritmetico g ; sia*

$$\varphi_H(i) : H^1 \mathcal{I}_C(i-1) \longrightarrow H^1 \mathcal{I}_C(i)$$

la mappa indotta dalla moltiplicazione per il piano H .

Posto $n(i) = \dim_k \ker \varphi_H(i)$, si ha:

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} h^1 \mathcal{I}_\Gamma(i) - \sum_{i=1}^{\infty} n(i).$$

Dimostrazione. Vedi [3]. \square

Definita la quantità $G(\Gamma, s)$ come:

$$G(\Gamma, s) = d(s-1) + 1 - \binom{s+2}{3} + \sum_{i=s}^{\infty} h^1(\mathcal{I}_\Gamma(i)),$$

vale il seguente lemma:

Lemma 2.0.2. *Data una curva C , di genere $g(C) = g$ ed $s(C) = s$, vale la seguente disuguaglianza: $g \leq G(\Gamma, s)$.*

Inoltre $g = G(\Gamma, s)$ se e solo se $h^1 \mathcal{I}_C(n) = 0$ per ogni $n \geq s-1$.

Dimostrazione. Poichè $g = \sum_{i=1}^{\infty} h^1 \mathcal{I}_\Gamma(i) - \sum_{i=1}^{\infty} n(i)$ ne segue che:

$$g \leq \sum_{i=1}^{s-1} h^1 \mathcal{I}_\Gamma(i) - \sum_{i=1}^{s-1} n(i) + \sum_{i=1}^{\infty} h^1 \mathcal{I}_\Gamma(i).$$

Dalla sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow \mathcal{I}_C(1) \longrightarrow \mathcal{I}_\Gamma(1) \longrightarrow 0$$

si ottiene la sequenza esatta lunga di coomologia:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0 \mathcal{I}_C(n) \longrightarrow H^0 \mathcal{I}_C(n+1) \longrightarrow H^0 \mathcal{I}_\Gamma(n+1) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1 \mathcal{I}_C(n) \longrightarrow H^1 \mathcal{I}_C(n+1) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

e poichè $H^0 \mathcal{I}_C(n) = 0$ per ogni $n \leq s-1$ si ha: $n(i) = h^0 \mathcal{I}_\Gamma(i)$ per ogni $i \leq s-1$; inoltre

$$h^1 \mathcal{I}_\Gamma(i) - h^0 \mathcal{I}_\Gamma(i) = d - \binom{i+2}{2}$$

e quindi si ottiene:

$$\begin{aligned} (2) \quad \sum_{i=1}^{s-1} h^1 \mathcal{I}_\Gamma(i) - \sum_{i=1}^{s-1} n(i) + \sum_{i=s}^{\infty} h^1 \mathcal{I}_\Gamma(i) &= \sum_{i=1}^{s-1} (h^1 \mathcal{I}_\Gamma(i) - h^0 \mathcal{I}_\Gamma(i)) + \\ &+ \sum_{i=s}^{\infty} h^1 \mathcal{I}_\Gamma(i) = d(s-1) + 1 - \binom{s+2}{3} + \sum_{i=s}^{\infty} h^1 \mathcal{I}_\Gamma(i) \end{aligned}$$

ovvero: $g \leq d(s-1) + 1 - \binom{s+2}{3} + \sum_{i=s}^{\infty} h^1 \mathcal{I}_\Gamma(i)$.

L'uguaglianza vale se e solo se $n(i) = 0$ per ogni $i \geq s-1$; questo è equivalente a dire che $h^1 \mathcal{I}_C(i) = 0$ per ogni $i \geq s-1$. \square

Lemma 2.0.3. Se Γ è un sottoschema di \mathbb{P}^2 formato da d punti distinti si ha:

$$h^1 \mathcal{I}_\Gamma(n) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \Delta HF(\Gamma, i).$$

Dimostrazione. Dalla sequenza esatta corta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_\Gamma \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow \mathcal{O}_\Gamma \longrightarrow 0$$

segue la sequenza esatta lunga:

$$0 \longrightarrow H^0 \mathcal{I}_\Gamma(n) \longrightarrow H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n) \longrightarrow H^0 \mathcal{O}_\Gamma(n) \longrightarrow H^1 \mathcal{I}_\Gamma(n) \longrightarrow 0.$$

Allora

$$h^0 \mathcal{I}_\Gamma(n) - h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n) + h^0 \mathcal{O}_\Gamma(n) - h^1 \mathcal{I}_\Gamma(n) = 0$$

e quindi

$$\begin{aligned} h^1 \mathcal{S}_\Gamma(n) &= h^0 \mathcal{S}_\Gamma(n) - h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n) + h^0 \mathcal{O}_\Gamma(n) = \\ &= -HF(\Gamma, n) + d = \sum_{i=n+1}^{\infty} \Delta HF(\Gamma, i). \quad \square \end{aligned}$$

Sfruttando quest'ultima uguaglianza segue che $G(\Gamma, s) = d(s-1) + 1 - \binom{s+2}{3} + \sum_{n=s}^{\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} \Delta HF(\Gamma, i)$, ovvero $G(\Gamma, s)$ dipende solamente dalla funzione di Hilbert della sezione piana Γ .

3. Curve e loro sezione piana.

Definizione 3.0.4. Sia Γ un insieme di d punti in \mathbb{P}^{r-1} , se per ogni sottoinsieme $\Gamma' \subseteq \Gamma$ e per ogni $n \geq 0$ vale:

$$HF(\Gamma', n) = \min\{|\Gamma'|, HF(\Gamma, n)\},$$

allora si dice che Γ gode della proprietà della posizione uniforme (brevemente UPP).

Harris ha dimostrato il seguente, fondamentale, teorema:

Teorema 3.0.5. Sia $C \subset \mathbb{P}^r$ un curva ridotta e irriducibile e Γ la sua generica sezione iperpiana. Allora Γ gode della UPP.

Dimostrazione. Vedi [6]. \square

Al fine di confrontare il valore $G(\Gamma, s)$ per differenti gruppi di punti è utile il seguente lemma:

Lemma 3.0.6. Sia Γ un gruppo di d punti nel piano avente la UPP; assumiamo che

$$(3) \quad \Delta HF(\Gamma, \cdot) = \{h_0, \dots, h_t, v, v-1, \dots, v-r, v-r-2, \dots, 3, 2, 1\}$$

dove $\{h_0, \dots, h_t\} = \{1, 2, \dots, \sigma, \dots, \sigma\}$, in generale si pone $h_i = \Delta HF(\Gamma, i)$. Gli interi r, v sono tali che:

$$0 \leq r \leq v, \quad 1 \leq v \leq h_t.$$

Sia Γ' un altro insieme di d punti nel piano con la UPP e assumiamo che:

$$\Delta HF(\Gamma', \cdot) = \{h'_0, \dots, h'_t, \dots\}.$$

Se $h'_i = h_i$ per $0 \leq i \leq t$, allora $G(\Gamma, s) \geq G(\Gamma', s)$ per ogni $s \geq t$; l'uguaglianza vale se e solo se $h_i = h'_i, \quad \forall i \geq s+1$.

Dimostrazione. Sia X l'insieme delle sequenze $N = \{n_0, n_1, \dots\}$ che si possono pensare come $\Delta HF(\Gamma, \cdot)$ di un gruppo di d punti nel piano che soddisfano la UPP.

Se $N, N' \in X$ definiamo $N' \succ N$ se esiste una coppia di interi a, b tali che $a < b$, $n'_a = n_a - 1$, $n'_b = n_b + 1$ e $n'_i = n_i$ altrimenti. È immediato verificare che se $N' \succ N$ segue $G(\Gamma', s) \geq G(\Gamma, s)$ e l'uguaglianza vale se e solo se $b \leq s$, ovvero se $n_i = n'_i$ per $i \geq s + 1$. Definiamo con \succ la chiusura transitiva della relazione \succ .

Provare il lemma significa quindi provare che $\Delta HF(\Gamma, \cdot) = \{1, 2, \dots, h_t, v, v-1, \dots, v-r, v-r-2, \dots, 2, 1\}$ è un elemento massimale di (X, \succ) . $\Delta HF(\Gamma, \cdot)$ è chiaramente massimale in quanto non possono esistere a, b con $a < b$ tali che $n'_a = n_a - 1$, $n'_b = n_b + 1$, $n'_i = n_i$ altrimenti.

D'altro canto se $N \neq \Delta HF(\Gamma, \cdot)$ esisterà N' tale che $N' \succ N$.

Infatti sia b l'intero definito come: $b = \min\{j : n_j < h_j\}$; poichè è impossibile (per ragioni di grado) che $n_j = h_j$ per $j < b$ possiamo definire $a = \max\{j : j < b, n_j > h_j\}$.

La sequenza N' definita come $n'_a = n_a - 1$, $n'_b = n_b + 1$, $n'_i = n_i$ altrimenti è tale che $N' \in X$ e, ovviamente, $N' \succ N$. \square

Per poter mettere in relazione le proprietà della sezione piana di una curva con quelle della curva stessa sono fondamentali i due seguenti lemmi; il primo è noto come Lemma di Laudal, il secondo si può interpretare come una sua generalizzazione.

Lemma 3.0.7. *Sia C una curva di \mathbb{P}^3 , liscia e irriducibile, di grado d e $\sigma(C) = \sigma$. Se $d > \sigma^2 + 1$ allora $s(C) = \sigma$, ovvero $h^0 \mathcal{I}_C(\sigma) \neq 0$.*

Dimostrazione. Vedi [13] ⁽²⁾. \square

Lemma 3.0.8. *Sia C una curva ridotta e irriducibile di grado d e $\sigma(C) = \sigma$. Se $d > \sigma^2 - 2\sigma + 9$ ($\sigma \geq 7$), allora $h^0 \mathcal{I}_C(\sigma + 1) \neq 0$.*

Dimostrazione. Vedi [13]. \square

Nel lavoro [7], Hartshorne e Hirschowitz hanno costruito delle curve (liscie e irriducibili) di grado d ed $s(C) = s$ per ogni coppia di interi (d, s) nel range B; hanno inoltre congetturato che, per queste curve, valga l'uguaglianza $g(C) = G(d, s)$.

Indicheremo con $G_{HH}(d, s)$ il genere delle curve costruite da Hartshorne e Hirschowitz. Sfruttando le limitazioni imposte dalla quantità $G(\Gamma, s)$ e i risultati

⁽²⁾ La disuguaglianza del lemma è la migliore possibile, ovvero esistono curve di grado $d = \sigma^2 + 1$ per le quali $h^0 \mathcal{I}_C(\sigma) = 0$.

dei lemmi precedenti si è potuta dimostrare questa congettura nell'intervallo:

$$d \geq s^2 - 6s + 14$$

(vedi [2], [3], [13]). In questo intervallo si possono calcolare le funzioni di Hilbert delle sezioni piane delle curve che raggiungono il genere massimo, anzi è proprio grazie alla maggiorazione fornita da $G(\Gamma, s)$ che si è potuto stabilire che $G(d, s) = G_{HH}(d, s)$ in questo intervallo di valori.

Dall'esame delle $\Delta HF(\Gamma, \cdot)$ si ottiene che per $d > s^2 - 6s + 17$ ogni curva C con $g(C) = G(d, s)$ ha $\sigma \geq s - 1$.

Per $d = s^2 - 6s + 17$, $s^2 - 6s + 16$, $s^2 - 6s + 15$ le $\Delta HF(\Gamma, \cdot)$ delle curve di genere massimo $g(C) = G(d, s)$ possono essere di due forme:

$$d = s^2 - 6s + 17$$

$$\Delta HF(\Gamma, \cdot) = \{1, 2, \dots, s-1, s-4, s-7, s-8, \dots, 2, 1\}$$

$$(4) \quad \Delta HF(\Gamma', \cdot) = \{1, 2, \dots, s-2, s-2, s-4, s-6, s-8, \dots, 2, 1\}.$$

$$d = s^2 - 6s + 16$$

$$\Delta HF(\Gamma, \cdot) = \{1, 2, \dots, s-1, s-5, s-7, s-8, \dots, 2, 1\}$$

$$(5) \quad \Delta HF(\Gamma', \cdot) = \{1, 2, \dots, s-2, s-2, s-4, s-7, s-8, \dots, 2, 1\}.$$

$$d = s^2 - 6s + 15$$

$$\Delta HF(\Gamma, \cdot) = \{1, 2, \dots, s-1, s-6, s-7, \dots, 1\}$$

$$(6) \quad \Delta HF(\Gamma', \cdot) = \{1, 2, \dots, s-2, s-2, s-5, s-7, s-8, \dots, 1\}.$$

Lemma 3.0.9. *Per una curva C di grado $d \leq s^2 - 6s + 14$ vale la disuguaglianza $G(d, s, s-1) < G(d, s)$.*

Dimostrazione. Data una curva C con $\sigma = s - 1$, detta Γ la sua generica sezione piana, basta verificare che $G(\Gamma, s) < G(d, s)$. \square

Per dimostrare allora l'enunciato B citato nell'introduzione basterà costruire tre curve lisce e irriducibili di gradi rispettivamente: $s^2 - 6s + 17$, $s^2 - 6s + 16$, $s^2 - 6s + 15$ con $\sigma = s - 1$ e di genere $G(d, s)$. Ciò sarà fatto nei paragrafi 5, 6. Proseguendo nella direzione delineata da questi primi risultati si possono formulare almeno due ulteriori domande:

1) Calcolare tutti gli interi $G(d, s, s-1)$ e descrivere le curve C tali che $g(C) = G(d, s, s-1)$.

2) Quando si ha $\sigma(C) \leq s - 2$, per quali curve vale la disuguaglianza $G(d, s, \sigma) < G(d, s)$?

4. Caso $\sigma = s$.

Esaminiamo ora il caso $\sigma = s$.

Nel caso di curve con $\sigma(C) = s(C)$ è conseguenza del Lemma 3.0.7 che

$$\begin{aligned} G(d, s, s) &= G(d, s) && \text{per } d \geq s^2 - 2s + 3 \\ G(d, s, s) &< G(d, s) && \text{per } d < s^2 - 2s + 3. \end{aligned}$$

Il seguente lemma caratterizza le curve per cui $G(d, s, s) = g(C)$.

Lemma 4.0.10. *Sia C una curva di grado $d \leq s^2 + s$ per cui $G(d, s, s) = g(C)$, allora C è ACM e la ΔHF della sua generica sezione piana è massimale rispetto alla relazione \succ descritta nel Lemma 3.0.6.*

Viceversa se C è ACM e la $\Delta HF(\Gamma, \cdot)$ è massimale, allora $G(d, s, s) = g(C)$.

Dimostrazione. Dato l'intero positivo $d \geq (s^2 + s)/2$, costruiamo la funzione

$$h_{ACM} = \{1, 2, \dots, s-1, s, h_s, h_{s+1}, \dots\}$$

nel modo seguente. Siano

$$\begin{aligned} k &= \min\{n \in \mathbb{N} : d \leq \frac{s(s+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\} \\ r &= \frac{s(s+1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} - d \end{aligned}$$

allora la sequenza sarà:

$$\{1, 2, \dots, s, k, k-1, \dots, r+2, r, r-1, \dots, 2, 1\}.$$

Dal risultato principale di [9] segue che, fissata una funzione di tipo decrescente, questa si può sempre pensare come la differenza prima della funzione di Hilbert della generica sezione piana di una curva ACM liscia e irriducibile.

Ovviamente per una curva C aritmeticamente Cohen-Macaulay si ha $g(C) = G(\Gamma, s)$ in quanto $h^1 \mathcal{I}_C(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Per qualunque altra curva C' di sezione Γ' con $\Delta HF(\Gamma', \cdot) = \{1, \dots, s, h'_s, \dots\}$ e $h'_i \neq h_i$ per qualche i si ha: $G(\Gamma', s) < G(\Gamma, s)$; inoltre $G(d, s, s) = G(\Gamma, s)$ in quanto Γ è un insieme di punti che ha la funzione di Hilbert massimale e tale che $h^0 \mathcal{I}_\Gamma(s-1) = 0$, $h^0 \mathcal{I}_\Gamma(s) \neq 0$.

Una curva C' tale da avere $s(C') = s$, $\sigma(C') = \sigma$ e sezione piana Γ' , raggiunge il genere massimo se ha come ΔHF della sua sezione piana la funzione h_{ACM} precedentemente definita, altrimenti $g(C') \leq G(\Gamma', s) < G(\Gamma, s) = G(d, s)$.

Allora $g(C') = G(\Gamma', s)$ se e solo se $h^1 \mathcal{I}_C(n) = 0$ per $n \geq s - 1$ (Lemma 2.0.2).

Dalla sequenza esatta di fasci:

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow \mathcal{I}_C(1) \longrightarrow \mathcal{I}_\Gamma(1) \longrightarrow 0$$

segue la sequenza esatta lunga di coomologia:

$$\dots \longrightarrow H^0 \mathcal{I}_\Gamma(n+1) \longrightarrow H^1 \mathcal{I}_C(n) \longrightarrow H^1 \mathcal{I}_C(n+1) \longrightarrow \dots$$

che, per $n = s - 2$, diventa:

$$\dots \longrightarrow H^0 \mathcal{I}_\Gamma(s-1) \longrightarrow H^1 \mathcal{I}_C(s-2) \longrightarrow H^1 \mathcal{I}_C(s-1) \longrightarrow \dots$$

poichè $H^0 \mathcal{I}_\Gamma(s-1) = H^1 \mathcal{I}_C(s-1) = 0$ segue che anche $H^1 \mathcal{I}_C(s-2) = 0$. Ripetendo lo stesso ragionamento iterativamente per $n < s - 2$ si perviene alla conclusione che $H^1 \mathcal{I}_C(n) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$ ovvero che la curva C è aritmeticamente Cohen-Macaulay.

Viceversa se una curva C è ACM e $\Delta HF(C \cap H, \cdot)$ è della forma massimale diventa immediato, per il Lemma 2.0.2, che $G(d, s, s) = g(C)$. \square

Poichè data una qualunque $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ di tipo decrescente esiste sempre una curva ACM, liscia e irriducibile, la cui generica sezione piana sia tale che $\Delta HF(\Gamma, i) = h(i)$. Per $d \leq s^2 + s$ definiamo gli interi m ed r come:

$$m = \max\{n : d \geq \frac{(s+1)s}{2} + \frac{(n+1)n}{2}\}$$

$$d = \frac{(s+1)s}{2} + \frac{(m+1)m}{2} + r$$

allora segue che

$$G(\Gamma, s) = d(s-1) + 1 - \binom{s+2}{3} + \binom{m+1}{3} + \binom{r}{2}.$$

Quest'ultima quantità è il genere massimo di una curva con $\sigma = s$ e grado $d \leq s^2 + s$.

5. Costruzione di curve particolari.

Vogliamo costruire tre curve con invarianti $s(C) = s, \sigma(C) = s - 1$ e di gradi rispettivamente: $s^2 - 6s + 17, s^2 - 6s + 16, s^2 - 6s + 15$.

Supponiamo l'esistenza di tre curve C_1, C_2, C_3 lisce e irriducibili di gradi rispettivamente 17, 16, 15 che abbiano i seguenti invarianti: $s(C) = 6, \sigma(C) = 5, e(C) \geq 2$. Il fatto che $e(C) \geq 2$ garantisce che nella generica biliasion di tipo $(6, s), (s, s)$ si otterranno curve lisce e irriducibili.

Sia S una superficie di grado s contenente $C, L = S \cap H$. Dalla sequenza esatta:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-C) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

segue la sequenza esatta di coomologia:

$$0 \rightarrow H^0 \mathcal{O}_S((s - 6)L) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_S(C + (s - 6)L) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_C(C + (s - 6)L) \rightarrow 0$$

Poichè $H^0 \mathcal{O}_C(C + (s - 6)L) = H^1 \mathcal{O}_C(2) \neq 0$ segue immediatamente quanto affermato. Poichè $\sigma(C) = 5$ le funzioni di Hilbert delle sezioni delle curve saranno necessariamente della forma:

$$(7) \quad \Delta HF(\Gamma_1, \cdot) = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 2$$

$$(8) \quad \Delta HF(\Gamma_2, \cdot) = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 1$$

$$(9) \quad \Delta HF(\Gamma_3, \cdot) = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad .$$

Lemma 5.0.11. *Facendo una generica biliasion di tipo $(6, s), (s, s)$ dalle curve C_1, C_2, C_3 si otterranno tre curve: X_1, X_2, X_3 lisce e irriducibili.*

Queste curve avranno i seguenti invarianti:

$$s(X_1) = s(X_2) = s(X_3) = s,$$

$$\sigma(X_1) = \sigma(X_2) = \sigma(X_3) = s - 1.$$

Dimostrazione. Sia X una curva bilegata a C da una biliasion del tipo assegnato. La formula $s(X) = s(C) + h$, dove $h = s - 6$ è l'altezza della biliasion, fornisce immediatamente la prima uguaglianza. Poichè in una biliasion vengono bilegate anche le sezioni piane delle curve, le funzioni di Hilbert delle sezioni piane Γ' di X_1, X_2, X_3 saranno:

$$\Delta HF(X_1 \cap H, \cdot) = 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad s - 1 \quad s - 4 \quad s - 7 \quad \dots \quad 2 \quad 1$$

$$\Delta HF(X_2 \cap H, \cdot) = 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad s - 1 \quad s - 5 \quad s - 7 \quad \dots \quad 2 \quad 1$$

$$\Delta HF(X_3 \cap H, \cdot) = 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad s - 1 \quad s - 6 \quad s - 7 \quad \dots \quad 2 \quad 1. \quad \square$$

Se il modulo di Rao delle curve C_1, C_2, C_3 ha componenti non nulle fino al grado 4 e non oltre, effettuata la biliasion di altezza h le componenti non nulle del modulo di Rao delle legate si estenderanno fino al grado $h + 4$.

Nel caso in questione le componenti non nulle di $M(X_1), M(X_2), M(X_3)$ si estenderanno fino al grado $(s - 2)$.

Questo significa che $h^1 \mathcal{I}_{X_i}(n) = 0$ per $n \geq s - 1$ e allora, per il Lemma 2.0.2, si hanno le uguaglianze:

$$g(X_i) = G(\Gamma', s) \quad \text{per } i = 1, 2, 3.$$

Al fine di costruire curve lisce e irriducibili di grado 16 e 17, con gli invarianti voluti si utilizzerà il metodo sviluppato in [1]; questo metodo consiste nel costruire delle curve spezzate che possono essere liscificate. La generica curva liscia così ottenuta sarà la curva cercata.

Queste curve, dette stick-figures, sono una unione ridotta di rette avente solo nodi.

Siano $a_1 = 0, \dots, a_p = 0, b_1 = 0, \dots, b_p = 0$ le equazioni di generici piani in \mathbb{P}^3 , denoteremo con F_p l'intersezione completa $(a_1 a_2 \cdots a_p, b_1 b_2 \cdots b_p)$.

Questa completa intersezione, insiemisticamente, è l'unione delle rette L_{ij} definite da $a_i = b_j = 0$. Poichè i piani sono scelti genericamente allora: $L_{ij} \cap L_{kh} = \emptyset$ se $i \neq k, j \neq h$.

Indicheremo con K_p la sottofigura di F_p contenente le rette L_{ij} per $i \leq j$.

In [4] è evidenziato che K_p ha una risoluzione della forma:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-p-1)^p \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}(-p)^{p+1} \longrightarrow \mathcal{I}_{K_p} \longrightarrow 0$$

dove il morfismo Φ è definito dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & a_2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & b_2 & a_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{p-1} & a_p \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_p \end{pmatrix}$$

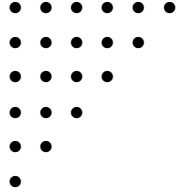
La K_p è una degenerazione della famiglia delle curve lisce, aritmeticamente Cohen-Macaulay, che hanno risoluzione della forma:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-p-1)^p \longrightarrow \mathcal{O}(-p)^{p+1} \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0.$$

Queste curve sono tali che:

$$\begin{aligned} H^0 \mathcal{I}_{K_p}(p-1) &= H^1 \mathcal{I}_{K_p}(p-1) = H^2 \mathcal{I}_{K_p}(p-1) = 0 \\ H^0 \mathcal{I}_{K_p}(p-2) &= H^1 \mathcal{I}_{K_p}(p-2) = H^2 \mathcal{I}_{K_p}(p-2) = 0 \\ H^0 \mathcal{I}_{K_p}(p-3) &= H^1 \mathcal{I}_{K_p}(p-3) = H^2 \mathcal{I}_{K_p}(p-3) = 0. \end{aligned}$$

Per rappresentare K_p in modo più diretto si può utilizzare un diagramma del seguente tipo:



Il punto di coordinate (i, j) rappresenta la retta L_{ij} , punti sulla stessa verticale (o sulla stessa orizzontale) corrispondono a rette sullo stesso piano.

Naturalmente per definire una sottofigura di K_p è molto più semplice utilizzare un diagramma di questo genere piuttosto che elencare tutte le rette L_{ij} che lo definiscono.

In seguito verrà sfruttato il seguente lemma.

Lemma 5.0.12. *Sia Y una curva ridotta, non necessariamente irriducibile, di \mathbb{P}^3 e sia L una retta r -secante che incontra Y quasi trasversalmente.*

Allora $H^0 \mathcal{I}_{Y \cup L}(r-1) = H^1 \mathcal{I}_{Y \cup L}(r-1) = H^2 \mathcal{I}_{Y \cup L}(r-1) = 0$ se e solo se: $H^0 \mathcal{I}_Y(r-1) = H^1 \mathcal{I}_Y(r-1) = H^2 \mathcal{I}_Y(r-1) = 0$.

Dimostrazione. Consideriamo la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{Y \cup L} \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow \mathcal{I}_Y|_{Y \cup L} \longrightarrow 0$$

e ricordiamo che $\mathcal{I}_Y|_{Y \cup L} = \mathcal{O}_L(-r)$.

Tensorizzando la sequenza con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-r-1)$ e passando alla sequenza esatta lunga di coomologia si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0 \mathcal{I}_{Y \cup L}(r-1) &\longrightarrow H^0 \mathcal{I}_Y(r-1) \longrightarrow H^0 \mathcal{O}_L(-1) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H^1 \mathcal{I}_{Y \cup L}(r-1) \longrightarrow H^1 \mathcal{I}_Y(r-1) \longrightarrow H^1 \mathcal{O}_L(-1) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H^2 \mathcal{I}_{Y \cup L}(r-1) \longrightarrow H^2 \mathcal{I}_Y(r-1) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

da cui segue immediatamente l'asserto. \square

Questo lemma significa semplicemente che, data una curva Y , ridotta e tale che $H^i \mathcal{I}_Y(r-1) = 0$ per $i = 0, 1, 2$, è possibile aggiungere o togliere una r -secante

senza cambiare i suoi annullamenti coomologici. Adesso possiamo passare allo studio della liscificazione di una stick-figure.

Seguendo [4] se Y è una sottofigura di K_t ed L_{pq} è una retta di Y definiamo

$$\Lambda_Y = \{(i, j) : L_{ij} \subseteq Y\}$$

e di conseguenza i seguenti interi:

$$(10) \quad m_{Y,a}(p, q) = \#\{(p, q') \in \Lambda_Y : p \leq q' < q\}$$

$$(11) \quad m_{Y,b}(p, q) = \#\{(p', q) \in \Lambda_Y : p < p' \leq q\}$$

$$(12) \quad d_Y(p, q) = m_{Y,a}(p, q) - m_{Y,b}(p, q).$$

Data la curva Y si indicherà con \mathcal{N}_Y il suo fibrato normale.

Lemma 5.0.13. *Sia Y una sottofigura di K_t tale che: $|d_Y(i, j)| \leq 1, \forall (i, j) \in \Lambda_Y$. Allora $H^1(Y, \mathcal{N}_Y(-1)) = 0$ e quindi Y è liscificabile.*

Dimostrazione. Vedi [4]. \square

Data la sottofigura X di K_t definiamo con Λ_X l'insieme delle coppie di interi (i, j) tali che $L_{ij} \in X$.

Lemma 5.0.14. *Sia B_p l'insieme formato dai primi p interi positivi ed $A \subset B_p$, $f : A \rightarrow B_p$ una funzione iniettiva ed X una sottofigura di K_p tale che $d_X(i, j) = 0, \forall (i, j) \in \Lambda_X$.*

Allora la stick-figure Y definita da:

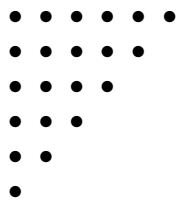
$$\Lambda_Y = \Lambda_X \setminus \{(i, f(i)) : i \in A\}$$

è tale che: $h^1 \mathcal{N}_Y(-1) = 0$.

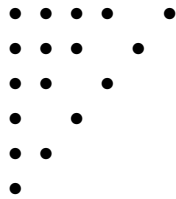
Dimostrazione. Sia $(p, q) \in \Lambda_Y$.

Poniamo $m_{Y,a} = m_{X,a}$ se $p \notin A$ e $m_{Y,a} = m_{X,a}(p, q) - 1$ altrimenti, $m_{Y,b}(p, q) = m_{X,b}$ se $q \notin \text{Im } f$ e $m_{Y,b} = m_{X,b}(p, q) - 1$ altrimenti. Quindi $|d(p, q)| \leq 1$ e la conclusione segue dal lemma precedente. \square

Fissato l'intero $m = 6$ la figura definita dal seguente diagramma:



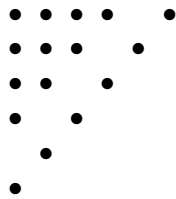
rappresenta una stick-figure di grado $d = 21$. Se eliminiamo 4 punti dalla sovradiagonale si ottiene una sottofigura di grado $d = 17$ che è liscificabile per i Lemmi 5.0.13 e 5.0.14. Questa sottofigura, che chiamerò X_0 , è rappresentata dal seguente diagramma:



I punti che stanno sulla stessa verticale di ascissa i corrispondono a rette che stanno tutte sullo stesso piano a_i , mentre i punti di ordinata j corrispondono a rette che stanno sul piano b_j . Ne segue che la generica sezione piana di questa figura è fatta da punti la cui disposizione è quella del diagramma; in altre parole punti che hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata sono allineati.

È quindi evidente che $h^0 \mathcal{S}_{\Gamma_0}(4) = 0$, per semicontinuità ne segue che X_0 si specializza ad una curva con $s(C) = 6$ e $\sigma(C) = 5$ da cui la funzione di Hilbert della sua sezione piana dovrà essere della forma indicata nell'equazione (7) di questo paragrafo.

Per lo stesso motivo anche la curva ottenuta liscificando la stick-figure di grado $d = 16$, definita dal seguente diagramma:



deve avere $s(C) = 6$ e $\sigma(C) = 5$, quindi la funzione di Hilbert della sezione piana sarà della forma indicata nell'equazione (8).

Il genere raggiunto da queste curve è il genere massimo consentito dalla disuguaglianza (1). Quindi abbiamo $g(C_1) = 30$, $g(C_2) = 25$ rispettivamente per i casi $d = 17$ e $d = 16$.

Ricordando che il teorema di Riemann-Roch dice:

$$h^0 \mathcal{O}_C(n) - h^1 \mathcal{O}_C(n) = nd + 1 - g,$$

nel caso particolare $n = 2$, $d = 17$ si ottiene:

$$h^1 \mathcal{O}_C(2) = h^0 \mathcal{O}_C(2) - 5,$$

mentre nel caso $n = 2$, $d = 16$ si ha:

$$h^1 \mathcal{O}_C(2) = h^0 \mathcal{O}_C(2) - 8.$$

Poichè $h^0 \mathcal{O}_C(2) \geq 10$ è immediato che $h^1 \mathcal{O}_C(2) \geq 5$ nel primo caso e $h^1 \mathcal{O}_C(2) \geq 2$ nel secondo caso. Questo significa che $e \geq 2$ per entrambe le curve costruite con questo metodo.

Inoltre le stick-figures così costruite hanno modulo di Rao $M(X)$ che si estende fino al posto 4; per semicontinuità anche le curve liscificate hanno $M(C)_5 = 0$. Dopo la biliasion sarà $M(C)_{s-1} = 0$. A questo punto tutte le ipotesi del Lemma 5.0.11 sono verificate e quindi con una biliasion di tipo $(6, s)$, (s, s) si ottengono delle curve lisce e irriducibili di grado, rispettivamente: $d = s^2 - 6s + 17$, $d = s^2 - 6s + 16$ e di genere $G(\Gamma, s)$.

Per la massimalità di $G(\Gamma, s)$ si ha che il genere di queste curve è pari a $G(d, s)$. Per costruire curve di grado 15 con le proprietà richieste bisogna utilizzare un metodo diverso da quello utilizzato nei casi precedenti in quanto il teorema di Riemann-Roch non fornisce informazioni utili. Verrà quindi utilizzato il metodo sviluppato da Hartshorne e Hirschowitz in [7]; nel seguente paragrafo verranno riportati i risultati essenziali di tale lavoro.

6. Fasci riflessivi e curve di \mathbb{P}^3 .

Il seguente metodo, che sfrutta l'esistenza di particolari fasci riflessivi, permette di costruire curve lisce e irriducibili di \mathbb{P}^3 e calcolarne numerosi invarianti.

Indichiamo con c_1 e c_2 la prima e la seconda classe di Chern di un fascio riflessivo.

Definizione 6.0.15. *Si chiama fascio primitivo, un fascio riflessivo di rango 2 su \mathbb{P}^3 con le seguenti proprietà:*

- a) $c_1 \geq -2$
- b) $A(c_1) \leq c_2 \leq B(c_1)$
- c) $h^0(\mathcal{E}) = 0$, $h^1(\mathcal{E}) = 0$, $h^2(\mathcal{E}(-1)) = 0$,

dove si è posto:

$$A(c_1) = \begin{cases} \lceil \frac{1}{3}(c_1^2 + 2c_1 + 3) \rceil & \text{per } c_1 \neq 1, 3 \\ \text{idem} + 1 & \text{per } c_1 = 1, 3 \end{cases}$$

$$B(c_1) = \begin{cases} \lceil \frac{1}{3}(c_1^2 + 3c_1 + 8) \rceil & \text{per } c_1 \neq 2, 4 \\ \text{idem} + 1 & \text{per } c_1 = 2, 4. \end{cases}$$

Definizione 6.0.16. Un fascio riflessivo \mathcal{E} di rango 2 su \mathbb{P}^3 si dirà “conveniente” (dal francese *convenable*) se per ogni punto $P \in \mathbb{P}^3$ dove \mathcal{E} non è localmente libero, la spiga \mathcal{E}_P si può scrivere come il conucleo di un morfismo $\varphi : \mathcal{O}_P \rightarrow \mathcal{O}_P^3$.

Definizione 6.0.17. Un fascio riflessivo \mathcal{E} di rango 2 su \mathbb{P}^3 si dirà con coomologia seminaturale se per ogni $l \geq -\frac{1}{2}c_1 - 2$ al più uno dei gruppi $H^i(\mathcal{E}(l))$ è non nullo.

Teorema 6.0.18. Per ciascuna coppia di interi (c_1, c_2) permessi dalla definizione 6.0.16 (ad eccezione di $c_1 \leq 0, c_2 = B(c_1)$) esiste un fascio primitivo \mathcal{F} conveniente, con classi di Chern c_1 e c_2 .

Inoltre esiste un tale fascio con coomologia seminaturale.

Dimostrazione. Vedi [7]. \square

Lemma 6.0.19. *i) I fasci primitivi \mathcal{E} con classi di Chern $(-2,1,0), (-1,1,1), (0,2,4), (1,4,10), (2,7,20)$ hanno $h^1(\mathcal{E}(n)) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$.*

ii) Tutti gli altri fasci primitivi hanno $h^1(\mathcal{E}(-1)) \neq 0$.

Dimostrazione. Vedi [7]. \square

Il seguente teorema permette di costruire curve algebriche a partire da fasci riflessivi.

Teorema 6.0.20. Siano $c_1 \geq -2, c_2 \geq A(c_1)$ interi, sia \mathcal{E} un fascio primitivo conveniente che abbia coomologia seminaturale e classi di Chern c_1 e c_2 .

Fissato $n \geq 1$, il luogo degli zeri di una generica sezione di \mathcal{E} è una curva non singolare Y tale che:

- il grado di Y è $d = c_2 + c_1n + n^2$;
- il più piccolo intero s tale che $h^0 \mathcal{I}_Y(s) \neq 0$ è $s = c_1 + n + 1$;
- il genere di Y è: $g = d(s - 1) + 1 - \binom{s+2}{3} + \binom{n-1}{3}$;
- Y è una curva di rango massimale;
- $e(Y) = c_1 - n - 1$.

Dimostrazione. Vedi [7]. \square

Inoltre, costruito il fascio \mathcal{E} e fissato l'intero n si ottiene la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow \mathcal{E}(n) \longrightarrow \mathcal{I}_Y(c_1 + 2n) \longrightarrow 0.$$

È proprio da questa sequenza esatta che si deduce la *b)*; infatti da $h^0 \mathcal{E} = 0$, $h^0 \mathcal{E}(1) \geq 2$ si deduce che il più piccolo intero s tale che $h^0 \mathcal{I}_Y(s) \neq 0$ è $s = c_1 + n + 1$.

Proposizione 6.0.21. *La curva Y associata agli interi c_1, c_2, n è irriducibile tranne nei due casi seguenti:*

i) Se $c_1 = -2, c_2 = 1, n = 1$ allora Y è vuoto.

ii) Se $c_1 = 0, c_2 = 1, n = 1$ allora Y è unione di due rette disgiunte.

Dimostrazione. Vedi [7]. \square

A questo punto si può costruire la curva di grado 15 cercata.

Considero un fascio primitivo \mathcal{E} con classi di Chern $c_1 = 4, c_2 = 10$ e lo tensorizzo con $\mathcal{O}(1)$.

La generica sezione globale di $\mathcal{E}(1)$ dà luogo ad una curva (liscia e connessa) tale che: $d = 15, s = 6, e = 2$.

Nel caso considerato, la sequenza esatta è:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow \mathcal{E}(1) \longrightarrow \mathcal{I}(6) \longrightarrow 0$$

da cui tensorizzando per $\mathcal{O}(-2)$ si ottiene l'isomorfismo $H^1 \mathcal{E}(-1) \cong H^1 \mathcal{I}_Y(4)$; poichè $h^1 \mathcal{E}(-1) \neq 0$ ne segue $h^1 \mathcal{I}_Y(4) \neq 0$.

Tensorizzando per $\mathcal{O}(-1)$ si ottiene: $H^1 \mathcal{I}_Y(5) = H^1 \mathcal{E} = 0$ (dalla definizione di fascio primitivo).

A questo punto bisogna verificare che $h^0 \mathcal{I}_\Gamma(4) = 0$ per la curva in questione.

Dalla sequenza esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Y(3) \longrightarrow \mathcal{I}_Y(4) \longrightarrow \mathcal{I}_\Gamma(4) \longrightarrow 0$$

e passando alla sequenza esatta lunga di coomologia:

$$0 \longrightarrow H^0 \mathcal{I}_\Gamma(4) \longrightarrow H^1 \mathcal{I}_Y(3) \longrightarrow H^1 \mathcal{I}_Y(4) \longrightarrow \dots$$

segue che $H^0 \mathcal{I}_\Gamma(4) = 0$ se e solo se la mappa di moltiplicazione $H^1 \mathcal{I}_Y(3) \rightarrow H^1 \mathcal{I}_Y(4)$ è iniettiva.

Dall'isomorfismo $(H_*^1 \mathcal{E})(5) = H_*^1 \mathcal{I}_Y$ segue che calcolare il nucleo della mappa φ_H equivale a calcolare il nucleo della mappa $H^1 \mathcal{E}(-2) \rightarrow H^1 \mathcal{E}(-1)$. A questo punto bisogna vedere in dettaglio come vengono costruiti i fasci riflessivi usati per la costruzione di queste curve e quindi ricavarne le informazioni necessarie.

Poichè voglio costruire una curva di grado $d = 15$ con $s(C) = 6$ le classi di Chern del fascio riflessivo \mathcal{E} corrispondente alla curva devono essere: $c_1 = 4, c_2 = 10$ e $c_3 = 8$; per il passo di riduzione in [6] è sufficiente costruire un fascio \mathcal{E}' con classi di Chern $c'_1 = 2, c'_2 = 7, c'_3 = 8$ e quindi fare l'identificazione $\mathcal{E}(-1) = \mathcal{E}'$.

La proposizione fondamentale per la costruzione dei fasci riflessivi è la seguente.

Proposizione 6.0.22. *Siano b un intero tale che $0 \leq b \leq 3$ e \mathcal{N}_Y il fibrato normale.*

Sia Y una curva liscia (non necessariamente irriducibile) di \mathbb{P}^3 di grado d , genere aritmetico g e che verifica le seguenti condizioni:

- 1) $H^1 \mathcal{N}_Y = 0$
- 2) $H^1 \mathcal{O}_Y(b) = 0$
- 3) $H^1 \mathcal{I}_Y(b-4) = 0$
- 4) $\omega_Y(4-b)$ ha una sezione con solo zeri semplici
- 5) per un morfismo $\beta : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-b) \rightarrow \mathcal{O}_Y$ generico e per ogni $n \in \mathbb{Z}$, l'applicazione lineare:

$$H^0(\alpha(n)) : H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(n-b) \oplus \mathcal{O}(n)) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y(n))$$

dedotta da $\alpha := (\beta, 1) : \mathcal{O}(-b) \oplus \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_Y$ è di rango massimo

6) se g è positivo allora Y è connessa e non speciale altrimenti è unione di curve razionali.

Allora $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{I}_Y(b)$ si generalizza ad un fascio riflessivo conveniente di classi di Chern $c_1 = b$, $c_2 = d$, $c_3 = (4-b)d + 2g - 2$; inoltre il fascio ha coomologia seminaturale.

Dimostrazione. Vedi [6]. \square

Nel caso da noi considerato la curva Y della proposizione precedente avrà $d = 7$ e $g = -2$; l'intero b dovrà essere $b = 2$.

Nel caso $b = 2$ e se d e g verificano: $1 - d \leq g \leq 0$ esiste una unione disgiunta di $(1 - g)$ curve razionali lisce, di grado totale d che verificano il punto (5) della Proposizione 6.0.22 (vedi [6]).

Da quanto detto segue che la curva Y , unione generica di tre curve razionali lisce (due coniche e una cubica), è tale che il fascio $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{I}_Y(2)$ si generalizza al fascio $\mathcal{E}(-1)$ cercato. Calcolare il nucleo del morfismo $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{I}_Y(2))(-1) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{I}_Y(2))$ è equivalente a calcolare il nucleo di $H^1 \mathcal{I}_Y(1) \xrightarrow{\varphi} H^1 \mathcal{I}_Y(2)$.

Il nucleo della mappa φ_H è sicuramente nullo in quanto dalla sequenza esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow \mathcal{I}_Y(1) \longrightarrow \mathcal{I}_\Gamma(1) \longrightarrow 0$$

segue:

$$\dots \longrightarrow H^0 \mathcal{I}_Y(2) \longrightarrow H^0 \mathcal{I}_\Gamma(2) \longrightarrow H^1 \mathcal{I}_Y(1) \xrightarrow{\varphi} H^1 \mathcal{I}_Y(2) \longrightarrow \dots$$

Poichè Γ è la sezione piana dell'unione generica di tre curve razionali di gradi rispettivamente: 3,2,2, non può essere contenuta in nessuna conica e quindi $H^0 \mathcal{I}_\Gamma(2) = 0$; questo implica che $\ker \varphi_H = 0$.

Poichè il morfismo di moltiplicazione $H^1 \mathcal{F}(-1) \xrightarrow{\varphi} H^1 \mathcal{F}$ è iniettivo, anche la sua generalizzazione rimarrà iniettiva per semicontinuità.

La generalizzazione del fascio \mathcal{F} è il fascio riflessivo $\mathcal{E}(-1)$ e quindi il nucleo di $H^1 \mathcal{E}(-2) \rightarrow H^1 \mathcal{E}(-1)$ è nullo.

Questo significa che $H^0 \mathcal{I}_\Gamma(4) = 0$ e allora la funzione di Hilbert della sezione piana di Y sarà quella descritta nella equazione (9).

Dopo una biliasion di tipo $(6, s)$, (s, s) si ottiene una curva C di grado $d = s^2 - 6s + 15$ la cui sezione piana ha la seguente funzione di Hilbert:

$$\Delta HF(\Gamma, \cdot) = \{1, 2, \dots, s-1, s-6, s-7, \dots, 1\}.$$

Poichè $h^1 \mathcal{I}_Y(n) = 0$ per $n \geq s-1$ il genere della curva Y così costruita è $G(\Gamma, s)$ e poichè $\Delta HF(\Gamma, \cdot)$ è massimale si ha: $G(\Gamma, s) = G(d, s)$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. Ballico - G. Bolondi - P. Ellia - R. Mirò Roig, *Curves of maximum genus in range A and stick-figures*, Trans. A.M.S., 349-11 (1997), pp. 4589-4607.
- [2] P. Ellia, *Sur le genre maximal des courbes gauches de degré d non sur une surface de degré s-1*, Crelle J., 413 (1991), pp. 78-87.
- [3] P. Ellia - R. Strano, *Sections planes et majoration du genre des courbes gauches*, Complex Algebraic Geometry, Lecture Notes Series 179, Cambridge University Press, 1992, pp. 157-174.
- [4] G. Floystad, *Construction of space curves with good properties*, Math. Ann., 289 (1991), pp. 33-54.
- [5] L. Gruson - C. Peskine, *Genre des courbes de l'espace projectif*, Algebraic Geometry, Tromso 1977, Lecture Notes in Mathematics, 687 (1978), pp. 31-60.
- [6] J. Harris, *The genus of space curves*, Math. Ann., 249 (1980), pp. 191-204.
- [7] R. Hartshorne - A. Hirschowitz, *Nouvelles courbes de bon genre dans l'espace projectif*, Math. Ann., 280 (1988), pp. 353-367.
- [8] R. Maffioni - A. Ragusa, *Construction of smooth curves of \mathbb{P}^3 with assigned Hilbert function and generators degrees*, Le Matematiche, 42 (1987), pp. 195-210.
- [9] R. Maffioni - A. Ragusa, *The Hilbert function of generic plane sections of curves of \mathbb{P}^3* , Invent. Math., 91 (1988), pp. 253-258.
- [10] M. Martin Deschamps - D. Perrin, *Sur la classification des courbes gauches*, Astérisque 184-185, Soc. Math. France, Paris, 1990.

- [11] J. Migliore, *An introduction to deficiency modules and liaison theory for subschemes of projective space*, Notes of the series of lectures held at Seoul National University.
- [12] R. Strano, *Sulle sezioni iperplane delle curve*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 57 (1987), pp. 125–134.
- [13] R. Strano, *Plane sections of curves of \mathbb{P}^3 and a conjecture of Hartshorne and Hirschowitz*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino, 48-4 (1990), pp. 511–527.

*Dipartimento di Matematica,
Università di Catania,
Viale A. Doria 6,
95125 Catania (ITALY)*