LE MATEMATICHE
Vol. LII (1997) – Fasc. II, pp. 271–295

CONTRIBUTO ALLE IPERSTRUTTURE MATROIDALI

DOMENICO FRENI

In this paper we continue the investigation of matroidal hyperstructures, introduced in [8], [9], [15], [17], [22]. In the first section, we define the sub-hypergroupoid $[A]$ generated by a subset A of an hypergroupoid $(H, \bullet)$. We introduce the notion of *defect* and *optimal defect* of $[A]$ and investigate their properties.

In the following sections, we define the class of M_λ-hypergroups, attached to an action of a group on a set M. We give necessary, and necessary and sufficient conditions for a M_λ-hypergroupoid to be matroidal. The most significant case is given by the canonical action of the multiplicative group K^* of a field K on the set $V - \{0\}$, where V is a K-vector space. Moreover, we determine necessary conditions under which the defect of a sub-hypergroupoid $[A]$ of a M_λ-hypergroupoid is optimal; we also give examples of non-commutative matroidal hypergroupoids.

In the last section, we continue the investigation of finite non-commutative exchange groups.

1. Sottoipergruppoidi generati da un sottoinsieme.

Se $(H, \bullet)$ è un ipergruppoide ed A è un sottoinsieme non vuoto di H, si pone:

$\overline{A}^{\,1} = A$;

$\overline{A}^{\,2} = A \bullet A = \overline{A}^{\,1} \bullet \overline{A}^{\,1}$;

Entrato in Redazione il 24 marzo 1997.

$\overline{A}^3 = (A \bullet A) \bullet A \bigcup A \bullet (A \bullet A) = \overline{A}^2 \bullet \overline{A}^1 \bigcup \overline{A}^1 \bullet \overline{A}^2$
e per ogni $n \geq 1$
$\overline{A}^{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}^k \bullet \overline{A}^{n-k+1}$.

L'insieme $[A] = \bigcup_{k\geq 1} \overline{A}^k$ è un sottoipergruppoide di $(H, \bullet)$. Infatti, per ogni coppia (x, y) di elementi di $[A]$, esiste una coppia (r, s) di elementi di N^* tale che $x \in \overline{A}^r$ e $y \in \overline{A}^s$, quindi $x \bullet y \subset \overline{A}^r \bullet \overline{A}^s \subset \overline{A}^{r+s} \subset [A]$ e dunque $[A] \bullet [A] \subset [A]$.

Del resto, se S è un sottoipergruppoide di $(H, \bullet)$ contenente A, si ha $\overline{A}^2 = A \bullet A \subset S \bullet S \subset S$ e induttivamente si prova che $\overline{A}^n \subset S \bullet S$, per ogni $n \in N^*$; cioè il sottoipergruppoide $[A]$ è contenuto in tutti i sottoipergruppoidi contenenti a, quindi è il più piccolo sottoipergruppoide contenente A e viene chiamato *sottoipergruppoide generato da* A.

Se l'insieme A è finito, il sottoipergruppoide $[A]$ si dice *finitamente generato da* A e se l'insieme A è costituito dagli elementi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, allora si scrive $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Il sottoipergruppoide $[a]$ generato dal singleton $\{a\}$ si chiama *sottoipergruppoide ciclico generato da* a.

Con $[\emptyset]$ si indica l'intersezione di tutti i sottoipergruppoidi di H. Ovviamente, sono possibili due casi:

1) $[\emptyset] = \emptyset$;
2) $[\emptyset] \neq \emptyset$.

In particolare, nel secondo caso, l'insieme $[\emptyset]$ è un sottoipergruppoide di H, e più precisamente si ha che $[\emptyset]$ *è il più piccolo sottoipergruppoide di* H *se e solo se* $[\emptyset] \neq \emptyset$.

Se A è un sottoinsieme non vuoto di H, con C_A e N_A si indicano i due insiemi seguenti:

$$C_A = \left\{ s \in N^* | \overline{A}^{s+1} \subset \bigcup_{k=1}^{s} \overline{A}^k \right\},$$

$$N_A = N - C_A$$

e si pone $m_A = \max N_A$, convenendo di scrivere $m_A = \infty$ nel caso in cui N_A è privo di massimo. Inoltre, se $C_A \neq \emptyset$, si pone $c_A = \min C_A$.

L'elemento m_A si chiama *ampiezza* del sottoipergruppoide $[A]$.

Se $m_A = \infty$, allora $[A]$ si dice di *ampiezza infinita*.

Se $m_A \neq \infty$, il valore assoluto $|m_A - c_A|$ si chiama *difetto* di $[A]$.

Il difetto si dice *quasi ottimo* se uguale ad uno e lo si chiama *ottimo* se $c_A = m_A + 1$.

Ovviamente ogni sottoipergruppoide $[A]$ di difetto ottimo ha difetto quasi ottimo.

Alcuni esempi:

Si considerino un intero $n \geq 2$ e i due insiemi $H = \{0, 1, 2\}$ e $K = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, e siano $(H, \circ)$, $(N, n, \bullet)$, $(N, \diamond)$, $(K, \star)$ gli ipergruppoidi i cui iperprodotti sono qui di seguito riportati:

$\circ$	0	1	2
0	1	1	H
1	1	$\{1, 2\}$	H
2	H	H	H

$$(N, n, \bullet) = \begin{cases} 0 \bullet 0 = 0 \bullet 1 = 1 \bullet 0 = \{1\}; \\ 1 \bullet 1 = \{1, 2\}; \\ m \bullet i = i \bullet m = \{m + 1\} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq n,\ i \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}; \\ m \bullet i = i \bullet m = N \Leftrightarrow m > n, i \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}; \end{cases}$$

$$(N, \diamond) = \begin{cases} 0 \diamond 0 = 0 \diamond 1 = 1 \diamond 0 = \{1\}; \\ 1 \diamond 1 = \{1, 2\}; \\ m \diamond i = i \diamond m = \{m + 1\} \Leftrightarrow m \geq 2,\ i \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}; \end{cases}$$

$\star$	0	1	2	3	4
0	1	1	3	$K - \{4\}$	K
1	1	$\{1, 2\}$	3	$K - \{4\}$	K
2	3	3	3	$K - \{4\}$	K
3	$K - \{4\}$	$K - \{4\}$	$K - \{4\}$	K	K
4	K	K	K	K	K

Posto $A = \{0\}$, in tutti e quattro gli ipergruppoidi si ha:

$$\overline{A}^{\,1} = \{0\}, \quad \overline{A}^{\,2} = \overline{A}^{\,3} = \{1\}, \quad \overline{A}^{\,4} = \{1, 2\},$$

ma cambia, a secondo i casi, il difetto del sottoipergruppoide $[A]$. Infatti:

1) Nell'ipergruppoide $(H, \circ)$ si ha $\overline{A}^{\,n} = H$, per ogni $n \geq 5$. Dunque $N_A = \{0, 1, 3\}$, $c_A = 2$ e il difetto di $[A]$ è quasi ottimo, ma non è ottimo perchè $m_A > c_A$.

2) Nell'ipergruppoide $(N, n, \bullet)$, per ogni intero k tale che $3 \leq k \leq n+3$, si ha:

$$\overline{A}^{\,k} = \{1, 2, \dots, k-2\}.$$

Infatti $\overline{A}^{\,3} = \{1\}$ e $\overline{A}^{\,4} = \{1, 2\}$, e supponendo che per ogni intero k tale che $3 \leq k \leq n+2$ si ha $\overline{A}^{\,k} = \{1, 2, \dots, k-2\}$, allora si ottiene:

$$\overline{A}^{\,r} \subset \overline{A}^{\,r+1}, \text{ per ogni intero } r \text{ tale che } 2 \leq r \leq n+1.$$

Inoltre, preso $x \in \overline{A}^{\,n+3}$, esiste un $k \in \{1, 2, \dots, n+2\}$ tale che $x \in \overline{A}^{\,k} \bullet \overline{A}^{\,n+3-k}$.

Se $k = 1$ oppure $k = n+2$, si ottiene $x \in \overline{A}^{\,1} \bullet \overline{A}^{\,n+2} = \overline{A}^{\,n+2} \bullet \overline{A}^{\,1} = 0 \bullet \{1, 2, \dots, n\} = \{1, 3, \dots, n+1\}$.

Mentre, se $2 \leq k \leq n+1$, allora $x \in \overline{A}^{\,k} \bullet \overline{A}^{\,n+2} \subset \overline{A}^{\,n+2} \bullet \overline{A}^{\,n+2}$ e quindi esiste $\{a, b\} \subset \overline{A}^{\,n+2} = \{1, 2, \dots, n\}$ tale che $x \in a \bullet b$. Supponendo $a \leq b$, si ha $x \in \{1, 2\}$ se $a = b = 1$, e $x = b+1$ se $b \in \{2, \dots, n\}$. Pertanto, in tutti i casi, si ottiene $x \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ e così resta dimostrata l'inclusione $\overline{A}^{\,n+3} \subset \{1, 2, \dots, n+1\}$.

Viceversa, $1 \in 0 \bullet 1 = \overline{A}^{\,1} \bullet \overline{A}^{\,2} \subset \overline{A}^{\,1} \bullet \overline{A}^{\,n+2}$, $2 \in 1 \bullet 1 \subset \overline{A}^{\,2} \bullet \overline{A}^{\,2} \subset \overline{A}^{\,2} \bullet \overline{A}^{\,n+1}$ ed infine, per ogni intero x tale che $3 \leq x \leq n+1$, si ha $2 \leq x-1 \leq n$ e $x \in 0 \bullet (x-1) \subset \overline{A}^{\,1} \bullet \overline{A}^{\,n+2}$.

Dunque è provata anche l'inclusione $\{1, 2, \dots, n+1\} \subset \overline{A}^{\,n+3}$ e di conseguenza $\overline{A}^{\,n+3} = \{1, 2, \dots, n+1\}$.

Inoltre risulta $N = 0 \bullet (n+1) \subset \overline{A}^{\,1} \bullet \overline{A}^{\,n+3} \subset \overline{A}^{\,n+4} \subset N$, quindi $N = \overline{A}^{\,n+4}$ e induttivamente si prova che

$$N = \overline{A}^{\,k}, \text{ per ogni intero } k \geq n+4.$$

Le considerazioni precedenti permettono di dedurre facilmente le seguenti:

a) $\overline{A}^{\,2} \not\subset \overline{A}^{\,1}$, $\overline{A}^{\,3} \subset \overline{A}^{\,1} \cup \overline{A}^{\,2}$;

b) Per ogni intero m tale che $3 \leq m \leq n+3$ si ha $\overline{A}^{\,m+1} \not\subset \bigcup_{k=1}^{m} \overline{A}^{\,k}$, in quanto $m-1 \in \overline{A}^{\,m+1}$ e $m-1 \notin \bigcup_{k=1}^{m} \overline{A}^{\,k} = \{0, 1, \dots, m-2\}$;

c) $\overline{A}^{\,m+1} = \bigcup_{k=1}^{m} \overline{A}^{\,k} = N$, per ogni intero $m \geq n+4$.

Dunque si ha $N_A = \{0, 1, 3, \dots, n+3\}$, $c_A = 2$, $m_A = n+3$ e il difetto di $[A]$ è $n+1$.

3) Nell'ipergruppoide $(N, \diamond)$, con dimostrazione analoga a quella svolta nell'esempio 2, si prova che per ogni intero $k \geq 3$ si ha $\overline{A}^k = \{1, 2, \dots, k-2\}$ e $\overline{A}^{n+1} \not\subset \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}^k$, quindi $C_A = \{2\}$ e $m_A = \infty$.

4) In quest'ultimo esempio si ha $\overline{A}^5 = \{1, 2, 3\}$, $\overline{A}^6 = \overline{A}^7 = \overline{A}^8 = \overline{A}^9 = \{0, 1, 2, 3\}$ e $\overline{A}^k = K$, per ogni $k \geq 10$. Pertanto $N_A = \{0, 1, 3, 4, 9\}$, quindi $c_A = 2 < m_A = 9$.

Infine, si osservi che in quest'ultimo ipergruppoide, tra i due interi c_A e m_A, esistono degli elementi che appartengono a C_A ed altri che appartengono ad N_A.

Proposizione 1.1. *Per ogni sottoinsieme non vuoto A di H si ha:*

1) Se $C_A = \emptyset$, allora $|\bigcup_{k=1}^{n+1} \overline{A}^k| \geq n+1$, per ogni $n \geq 1$;
2) Se H è un ipergruppoide finito, allora $C_A \neq \emptyset$;
3) Se $m_A \neq \infty$, allora $m_A < c_A \Leftrightarrow$ il difetto di $[A]$ è ottimo;
4) $c_A = 1 \Leftrightarrow [A] = A$;
5) $C_A = N^*$ se, e solo se, A è un sottoipergruppoide di H.

Dimostrazione. 1) Per ipotesi $\overline{A}^2 \not\subset \overline{A}^1$, quindi la cardinalità dell'insieme $\overline{A}^1 \cup \overline{A}^2$ è ≥ 2. Per induzione sia $|\bigcup_{k=1}^{n+1} \overline{A}^k| \geq n+1$.

Siccome $\overline{A}^{n+2} \not\subset \bigcup_{k=1}^{n+1} \bar{x}^k$, si ottiene $|\bigcup_{k=1}^{n+2} \overline{A}^k| \geq |\bigcup_{k=1}^{n+1} \overline{A}^k| + 1 \geq n+2$ e la dimostrazione di 1) è conclusa.

2) Se H è finito ed A è un sottoinsieme non vuoto di H tale che $C_A = \emptyset$, per 1), si ha:

$$\left| \bigcup_{k=1}^{|H|+1} \overline{A}^k \right| \geq |H| + 1 > |H|,$$

ma ciò è impossibile.

3) Se $m_A \neq \infty$, ovviamente si ha $C_A \neq \emptyset$, e se inoltre $m_A < c_A$, allora l'insieme $\{n \in N \mid n > m_A\}$ è contenuto in C_A. Del resto, per ogni intero $n \in N^*$ tale che $n < m_A$, si ha $n < c_A$, e per la minimalità di c_A in C_A si ottiene $n \notin C_A$. Dunque si ricava $n \in N_A$, $N_A = \{0, 1, 2, \dots, m_A\}$ e $c_A = m_A + 1$, cioè il difetto di $[A]$ è ottimo.

Il viceversa è evidente.

4) $c_A = 1 \Leftrightarrow \overline{A}^2 \subset \overline{A}^1 \Leftrightarrow A$ è un sottoipergruppoide di $H \Leftrightarrow [A] = A$.

5) Se $C_A = N^*$ si ha $\min C_A = 1$ ed A è un sottoipergruppoide di H. Viceversa, se A è un sottogruppoide di H, allora $[A] = A$ e $\overline{A}^{s+1} \subset \overline{A}^1$, per ogni intero $s \geq 1$. Dunque $C_A = N^*$.

Proposizione 1.2. *Per ogni sottoinsieme non vuoto A di H tale che $m_A \neq \infty$ si ha $\bigcup_{k=1}^{m_A+i} \overline{A}^k = \bigcup_{k=1}^{m_A+1} \overline{A}^k$, per ogni intero $i \geq 1$, e $[A] = \bigcup_{k=1}^{m_A+1} \overline{A}^k$.*

Dimostrazione. Per la massimalità di m_A in N_A si ha $\{i \in N \mid i \geq m_A + 1\} \subset N - N_A = C_A$. Ora $\overline{A}^{m_A+2} \subset \bigcup_{k=1}^{m_A+1} \overline{A}^k$ perchè $m_A + 1 \in C_A$, dunque si ottiene $\bigcup_{k=1}^{m_A+2} \overline{A}^k = \bigcup_{k=1}^{m_A+1} \overline{A}^k$ e per induzione si prova facilmente che $\bigcup_{k=1}^{m_A+i} \overline{A}^k = \bigcup_{k=1}^{m_A+1} \overline{A}^k$, per ogni intero $i \geq 1$.

Ovviamente si ha anche $[A] = \bigcup_{k=1}^{m_A+1} \overline{A}^k$.

Teorema 1.3. *Se H è un ipergruppoide finito, per ogni sottoinsieme non vuoto A di H, si ha $m_A \neq \infty$ e $[A] = \bigcup_{k=1}^{m_A+1} \overline{A}^k$.*

Dimostrazione. Se $m_A = \infty$, ordinando gli elementi di N_A con l'ordine naturale di N, l'insieme N_A costituisce una catena

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_j < \cdots$$

Chiaramente, per ogni $j \neq 0$, si ha:

$$\bigcup_{k=1}^{n_j} \overline{A}^k \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_{j+1}} \overline{A}^k$$

e se $\bigcup_{k=1}^{n_j} \overline{A}^k = \bigcup_{k=1}^{n_{j+1}} \overline{A}^k$, allora, essendo $n_j + 1 \leq n_{j+1}$, si ottiene:

$$\overline{A}^{n_j+1} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_{j+1}} \overline{A}^k = \bigcup_{k=1}^{n_j} \overline{A}^k,$$

impossibile perchè $n_j \notin C_A$.

Quindi $\bigcup_{k=1}^{n_j} \overline{A}^k$ è strettamente contenuto in $\bigcup_{k=1}^{n_{j+1}} \overline{A}^k$.

Allora in H si trova una catena di sottoinsiemi l'uno strettamente contenuto nell'altro

$$\bigcup_{k=1}^{n_1} \overline{A}^k \subset \bigcup_{k=1}^{n_2} \overline{A}^k \subset \cdots \bigcup_{k=1}^{n_j} \overline{A}^k \subset \cdots$$

che non si blocca, ma ciò è impossibile perchè H è finito.

La Proposizione 1.2 completa la dimostrazione.

Proposizione 1.4. *Se H è un semi-ipergruppo finito, per ogni sottoinsieme non vuoto A di H, il difetto di $[A]$ è ottimo.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 1.1 - 2), l'insieme C_A è non vuoto e per l'associatività dell'iperprodotto si ha $\overline{A}^{\,n} = A^n$, per ogni intero $n \geq 1$. Quindi

$$A^{c_A+2} = A^{c_A+1} \bullet A \subseteq \Big(\bigcup_{k=1}^{c_A} A^k\Big) \bullet A = \bigcup_{k=2}^{c_A+1} A^k \subseteq \bigcup_{k=1}^{c_A+1} A^k$$

e induttivamente si prova che

$$A^{c_A+s} \subseteq \bigcup_{k=1}^{c_A+s-1} A^k, \quad \text{per ogni } s \geq 1.$$

Dunque $n \in C_A$ se, e solo se, $n+1 \in C_A$, ovvero $C_A = \big\{n \in N^* \mid n \geq c_A\big\}$ e quindi $N_A = N - C_A = \{0, 1, \ldots, c_A - 1\}$.

Pertanto $m_A = c_A - 1$ e ovviamente $c_A = m_A + 1$.

Osservazione. Se $(H, \bullet)$ è isomorfo ad un gruppo, identificato il singleton $\{x\}$ con lo stesso elemento x e supponendo che x sia un elemento di periodo finito n, si prova che $c_x = n$ e che $[x]$ è il sottogruppo ciclico generato da x. Infatti, per la Proposizione 1.1 - 4), si ha $c_{1_G} = 1$ e se $x \neq 1_G$, allora, per ogni $k \in N^*$, si ottiene $\bar{x}^k = \{x^k\}$ e $\bigcup_{k=1}^n \bar{x}^k = \{x, x^2, \ldots, x^n = 1_G\}$. Quindi $\bar{x}^{n+1} = x \in \bigcup_{k=1}^n \bar{x}^k$ e di conseguenza $c_x \leq n$.

Del resto x^{c_x+1} appartiene all'insieme $\{x, x^2, \ldots, x^{c_x}\}$ e se esiste un intero k tale che $2 \leq k \leq c_x$ e $x^{c_x+1} = x^k$, allora si ottiene $x^{c_x-k+2} = x$. Pertanto si ha $\bar{x}^{c_x-k+2} \in \bigcup_{k=1}^{c_x-k+1} \bar{x}^k$ e $c_x - k + 1 \in C_x$, con $1 \leq c_x - k + 1 < c_x$, impossibile per la minimalità di c_x in C_x. Dunque $x^{c_x+1} = x$ e quindi si ottiene $x^{c_x} = 1_G$ e $n \leq c_x$. Sicchè $c_x = n$ e ovviamente $[x]$ è il sottogruppo ciclico generato da x.

Proposizione 1.5. *Se $f : H \to K$ è un omomorfismo di ipergruppoidi, per ogni sottoinsieme non vuoto A di H, si ha:*

1) $f([A]) \subset [f(A)]$;

2) $[f([A])] = [f(A)]$ e se f è un omomorfismo buono, allora $f([A]) = [f(A)]$;

3) Per ogni intero $m \geq 1$ si ha $f(\overline{A}^{\,m}) \subset \overline{f(A)}^{\,m}$, inoltre vale l'uguaglianza se f è un omomorfismo buono;

4) Se f è un omomorfismo buono e $C_A \neq \emptyset$, allora $c_{f(A)} \leq c_A$ e $m_{f(A)} \leq m_A$. E se inoltre $c_{f(A)} = c_A$, allora il difetto di $[A]$ è ottimo se, e solo se, il difetto di $[f(A)]$ è ottimo.

Dimostrazione. 1) È facile verificare che $f^{-1}([f(A)])$ è un sottoipergruppoide di H che contiene A, quindi contiene anche $[A]$ e di conseguenza

$$f([A]) \subset f(f^{-1}([f(A)])) \subset [f(A)].$$

2) Ovviamente si ha $f(A) \subset f([A])$, quindi $[f(A)] \subset [f([A])]$. Inoltre $f([A]) \subset [f(A)]$ e da qui si ricava $[f([A])] \subset [[f(A)]] = [f(A)]$.

Se f è un omomorfismo buono, l'immagine $f([A])$ di $[A]$ è un sottoipergruppoide di K e $f([A]) = [f(A)]$.

3) È ovvio che $f(\overline{A}^1) = f(A) = \overline{f(A)}^1$ e supponendo che per ogni intero k tale che $1 \leq k < m$ si ha $f(\overline{A}^k) \subset \overline{f(A)}^k$, allora:

$$f(\overline{A}^m) = f\Big(\bigcup_{k=1}^{m-1} \overline{A}^k \bullet \overline{A}^{m-k}\Big) = \bigcup_{k=1}^{m-1} f(\overline{A}^k \bullet \overline{A}^{m-k}) \subset$$

$$\subset \bigcup_{k=1}^{m-1} f(\overline{A}^k) \bullet f(\overline{A}^{m-k}) \subset \bigcup_{k=1}^{m-1} \overline{f(A)}^k \bullet \overline{f(A)}^{m-k} = \overline{f(A)}^m.$$

Dunque si è dimostrato che per ogni intero $m \geq 1$ si ha:

$$f(\overline{A}^m) \subset \overline{f(A)}^m.$$

Allo stesso modo, se f è un omomorfismo buono, sostituendo il segno di inclusione con l'uguaglianza, si prova che

$$f(\overline{A}^m) = \overline{f(A)}^m.$$

4) Se f è un omomorfismo buono ed esiste un intero positivo n tale che $\overline{A}^{n+1} \subset \bigcup_{k=1}^n \overline{A}^k$, allora si ricava l'inclusione:

$$\overline{f(A)}^{n+1} = f(\overline{A}^{n+1}) \subset f\Big(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}^k\Big) = \bigcup_{k=1}^{n} f(\overline{A}^k) = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{f(A)}^k.$$

Pertanto l'insieme C_A è contenuto in $C_{f(A)}$ e il minimo $c_{f(A)}$ di $C_{f(A)}$ è minore o uguale a c_A.

Del resto, si ha anche $N_{f(A)} = N - C_{f(A)} \subset N - C_A = N_A$, quindi $m_{f(A)} \leq m_A$.

Infine, se $c_{f(A)} = c_A$, si ha:

$$c_A = m_A + 1 \Leftrightarrow c_{f(A)} = m_A + 1 \Leftrightarrow m_{f(A)} \leq m_A =$$

$$= c_{f(A)} - 1 \Leftrightarrow m_{f(A)} < c_{f(A)} \Leftrightarrow c_{f(A)} = m_{f(A)} + 1.$$

2. M_λ-ipergruppoidi.

Siano M un insieme non vuoto e G un gruppo che opera a sinistra su M mediante l'azione $\varphi : G \times M \to M$ tale che $\varphi(x, a) = xa$, per ogni coppia $(x, a) \in G \times M$.

Se λ è un qualunque elemento di G, per ogni coppia (a, b) di elementi di M, si pone:

$$a \bullet b = b \bullet a = \{\lambda a, \lambda b\}.$$

È facile provare che l'iper-operazione prima definita è riproducibile. Infatti, per ogni coppia $(a, b) \in M^2$, si ha $b \in a \bullet (\lambda^{-1} b) = (\lambda^{-1} b) \bullet a = \{\lambda a, b\}$, quindi per ogni $a \in M$ si ottiene $a \bullet M = M \bullet a = M$ e l'ipergruppoide $(M, \bullet)$ è un quasi-ipergruppoide commutativo.

In seguito, con abuso di notazione, si utilizzerà spesso il simbolo M_λ per indicare non solo il sostegno M del quasi-ipergruppoide $(M, \bullet)$, ma anche lo stesso quasi-ipergruppoide.

Proposizione 2.1. *Se per ogni elemento a di M,* Stab(a) *rappresenta lo stabilizzatore dell'elemento a rispetto all'azione φ di G su M, allora:*

1) M_λ è un ipergruppo se e solo se λ appartiene al nucleo N_φ dell'azione φ. (Il nucleo dell'azione è l'intersezione $\bigcap_{a \in M}$ Stab(a) *di tutti gli stabilizzatori);*

2) Se λ non appartiene al nucleo di φ, allora il quasi-ipergruppo M_λ è un H_V-gruppo, cioè l'iper-operazione è riproducibile e debolmente associativa.

Dimostrazione. 1) Sia M_λ un ipergruppo. Se $M_\lambda = \{a\}$, allora lo stabilizzatore dell'unico elemento a coincide con G e l'implicazione è ovvia.

Se $|M_\lambda| \geq 2$, per ogni coppia (a, b) di elementi distinti di M_λ si ha:

$$\{\lambda^2 a, \lambda b\} = (a \bullet a) \bullet b = a \bullet (a \bullet b) = \{\lambda a, \lambda^2 a, \lambda^2 b\}$$

ed essendo $a \neq b$, si distinguono i due casi: $\lambda a = \lambda^2 a$ oppure $\lambda a = \lambda^2 b$.

Nel primo caso si ha subito $a = \lambda a$, quindi $\lambda \in$ Stab(a).

Nel secondo caso si ha $a = \lambda b$, di conseguenza $\{\lambda^2 a, a\} = \{\lambda a, \lambda^2 a\}$. Pertanto $\lambda a = a$ oppure $\lambda a = \lambda^2 a$, quindi $\lambda \in$ Stab(a).

Dunque, in entrambi i casi e per ogni $a \in M_\lambda$, si ottiene $\lambda \in$ Stab(a) e l'implicazione $\Rightarrow$ è provata.

Viceversa, se $\lambda \in N_\varphi = \bigcap_{a \in M}$ Stab(a), per ogni terna $(a, b, c) \in M_\lambda^3$ si ha:

$$(a \bullet b) \bullet c = \{a, b, c\} = a \bullet (b \bullet c)$$

e poichè l'iper-operazione è anche riproducibile, M_λ è un ipergruppo.

2) Se $\lambda \notin N_\varphi$, l'iperprodotto $\bullet$ non è associativo, ma per ogni terna (a, b, c) di elementi di M_λ si ha $\lambda^2 b \in (a \bullet b) \bullet c \cap a \bullet (b \bullet c)$ e ciò completa la dimostrazione.

Nei prossimi teoremi verrà studiata la struttura dei sotto-ipergruppoidi di M_λ generati da un sottoinsieme.

Proposizione 2.2. *Per ogni coppia (A, B) di sottoinsiemi non vuoti di M_λ, si ha:*

1) $A \bullet B = \lambda A \cup \lambda B$*;*

2) Se $\lambda \in \mathrm{Stab}(A)$*, allora* $[A] = A$*;*

3) Se λ appartiene al nucleo N_φ dell'azione φ, allora $[A] = A$*;*

4) Se $[A] = A$ ed esiste un intero $n \geq 1$ tale che $\lambda^n \in \mathrm{Stab}(A)$*, allora* $\lambda \in \mathrm{Stab}(A)$*;*

5) Se λ è un elemento di G di ordine finito q, $\lambda \in \mathrm{Stab}(A)$ *se e solo se* $[A] = A$.

Dimostrazione.

1) $$A \bullet B = \bigcup_{a\in A, b\in B} a \bullet b = \bigcup_{a\in A, b\in b} \{\lambda a, \lambda b\} =$$

$$= \bigcup_{a\in A, b\in B} \lambda\{a, b\} = \lambda\Big(\bigcup_{a\in A, b\in B} \{a, b\}\Big) = \lambda(A \cup B) = \lambda A \cup \lambda B.$$

2) Se $\lambda \in \mathrm{Stab}(A)$, per 1), si ha $\overline{A}^2 = \overline{A}^1 \bullet \overline{A}^1 = A \bullet A = \lambda A \cup \lambda A = A$. Se per ogni intero k tale che $1 \leq k \leq n$ si ha $\overline{A}^k = A$, allora $\overline{A}^{n+1} = \bigcup_{k=1}^n \overline{A}^k \bullet \overline{A}^{n-k+1} = A \bullet A = A$. Pertanto $[A] = \bigcup_{k\geq 1} \overline{A}^k = A$.

3) Immediata conseguenza di 2).

4) Se $[A] = A$ si ha $\lambda A = \overline{A}^2 \subset [A] = A$ e per induzione si prova che $\lambda^m A \subset \lambda A \subset A$, per ogni intero $m \geq 1$.

Del resto, per ipotesi, esiste un intero $n \geq 1$ tale che $\lambda^n \in \mathrm{Stab}(A)$, per cui $A = \lambda^n A \subset \lambda A \subset A$ e quindi $\lambda A = A$.

5) Immediata conseguenza di 2) e 3).

Teorema 2.3. *Per qualunque coppia (A, B) di sottoinsiemi non vuoti di M_λ, si ha:*

1) $\overline{A}^{n+1} = \bigcup_{k=1}^n \lambda^k A$*, per ogni* $n \geq 1$*;*

2) Per ogni intero $n \geq 2$, si ha: $\overline{A}^n \subset \overline{A}^{n+1}$*;*

3) Per ogni $n \in N^*$, $n \in C_A \Leftrightarrow \overline{A} \cup \overline{A}^n = \overline{A} \cup \overline{A}^{n+1}$*;*

4) $[A] = \bigcup_{k\geq 0} \lambda^k A$*;*

5) Per ogni intero $n \geq 1$, si ha: $\overline{A \cup B}^n = \overline{A}^n \cup \overline{B}^n$ *e* $[A \cup B] = [A] \cup [B]$*;*

6) Per ogni sottoinsieme non vuoto A di M_λ, si ha: $[A] = \bigcup_{a\in A} [a]$*;*

7) Se λ è un elemento di G di ordine finito q, allora

$$[A] = \bigcup_{k=0}^{q-1} \lambda^k A = A \cup \overline{A}^q.$$

Dimostrazione. 1) Per la Proposizione 2.2 - 1), si ha:

$$\overline{A}^{\,2} = A \bullet A = \lambda A \cup \lambda A = \lambda A;$$

$$\overline{A}^{\,3} = \overline{A}^{\,1} \bullet \overline{A}^{\,2} \cup \overline{A}^{\,2} \bullet \overline{A}^{\,1} = A \bullet (\lambda A) \cup (\lambda A) \bullet A = \lambda A \cup \lambda^2 A,$$

e induttivamente, se per ogni intero m tale che $3 \leq m \leq n$ si ha $\overline{A}^{\,m} = \bigcup_{r=1}^{m-1} \lambda^r A$, allora

$$\overline{A}^{\,k} \subset \overline{A}^{\,k+1}, \text{ per ogni intero } k \text{ tale che } 2 \leq k \leq n-1,$$

e inoltre

$$\overline{A}^{\,n+1} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}^{\,k} \bullet \overline{A}^{\,n-k+1} = \overline{A}^{\,1} \bullet \overline{A}^{\,n} \cup \overline{A}^{\,n} \bullet \overline{A}^{\,1} \cup \Big(\bigcup_{k=2}^{n-1} \overline{A}^{\,k} \bullet \overline{A}^{\,n-k+1} \Big) \subset$$
$$\subset \overline{A}^{\,1} \bullet \overline{A}^{\,n} \cup \overline{A}^{\,n} \bullet \overline{A}^{\,n} = \lambda \overline{A}^{\,1} \cup \lambda \overline{A}^{\,n} = \overline{A}^{\,1} \bullet \overline{A}^{\,n} \subset \overline{A}^{\,n+1}.$$

Infine

$$\overline{A}^{\,n+1} = \overline{A}^{\,1} \bullet \overline{A}^{\,n} = \lambda \overline{A}^{\,1} \cup \lambda \overline{A}^{\,n} =$$
$$= \lambda A \cup \Big[\lambda \Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} \lambda^k A \Big) \Big] = \lambda A \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} \lambda^{k+1} A \Big) = \bigcup_{k=1}^{n} \lambda^k A.$$

2) Immediata conseguenza di 1).

3) Se $n \in C_A$, allora $\overline{A}^{\,n+1} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}^{\,k}$. Per 2), si ottiene $\overline{A}^{\,n+1} \subset \overline{A}^{\,1} \cup \overline{A}^{\,n}$, dunque

$$\overline{A}^{\,1} \cup \overline{A}^{\,n+1} \subset \overline{A}^{\,1} \cup (\overline{A}^{\,1} \cup \overline{A}^{\,n}) = \overline{A}^{\,1} \cup \overline{A}^{\,n} \subset \overline{A}^{\,1} \cup \overline{A}^{\,n+1}$$

e quindi $\overline{A}^{\,1} \cup \overline{A}^{\,n} = \overline{A}^{\,1} \cup \overline{A}^{\,n+1}$.

Viceversa, si ha $\overline{A}^{\,n+1} \subset \overline{A}^{\,1} \cup \overline{A}^{\,n+1} = \overline{A}^{\,1} \cup \overline{A}^{\,n} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}^{\,k}$, cioè $n \in C_A$.

4) Se $x \in [A]$, allora esiste $k \in N^*$ tale che $x \in \overline{A}^{\,m}$. Se $m = 1$ si ha $x \in A = \lambda^0 A$; mentre se $m > 1$, si ottiene $x \in \overline{A}^{\,m} = \bigcup_{k=1}^{m-1} \lambda^k A$ e quindi esiste $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ tale che $x \in \lambda^k A$. Cioè, in ogni caso, si ha $x \in \bigcup_{k \geq 0} \lambda^k A$, per cui $[A] \subset \bigcup_{k \geq 0} \lambda^k A$.

È anche facile provare che $\bigcup_{k \geq 0} \lambda^k A \subset [A]$.

5) Se $n = 1$, allora $\overline{A \cup B}^{\,1} = A \cup B = \overline{A}^{\,1} \cup \overline{B}^{\,1}$.

Se $n > 1$, applicando 1), si ottiene:

$$\overline{A \cup B}^{\,n} = \bigcup_{k=1}^{n-1} \lambda^k (A \cup B) = \Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} \lambda^k A\Big) \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} \lambda^k B\Big) = \overline{A}^{\,n} \cup \overline{B}^{\,n},$$

e inoltre

$$\begin{aligned}[A \cup B] &= \bigcup_{n\geq 1} \overline{A \cup B}^{\,n} = \bigcup_{n \geq 1} (\overline{A}^{\,n} \cup \overline{B}^{\,n}) = \\ &= \Big(\bigcup_{n\geq 1} \overline{A}^{\,n}\Big) \cup \Big(\bigcup_{n \geq 1} \overline{B}^{\,n}\Big) = [A] \cup [B].\end{aligned}$$

6) Posto $H = \bigcup_{a \in A} [a]$, per ogni coppia $(x, y) \in H^2$, esiste una coppia (a_1, a_2) di elementi di A tali che $x \in [a_1]$ e $y \in [a_2]$. Per 5), si ha: $x \bullet y \subset [a_1] \bullet [a_2] \subset [[a_1] \cup [a_2]] = [a_1, a_2] = [a_1] \cup [a_2] \subset H$, quindi H è un sottoipergruppoide di M_λ che contiene A e per conseguenza $[A] \subset H$.

Ovviamente si ha anche l'inclusione $H \subset [A]$, dunque $[A] = H$.

7) Per 2), si ha:

$$[A] = \bigcup_{n \geq 1} \overline{A}^{\,n} = \overline{A}^{\,1} \cup \Big(\bigcup_{n \geq q} \overline{A}^{\,n}\Big).$$

Inoltre, il sottogruppo ciclico di G generato da λ ha ordine q e per ogni intero $k > q$, esiste un intero t tale che $0 \leq t < q$ e $\lambda^k = \lambda^t$. Pertanto, per ogni $m > q$, si ha:

$$\overline{A}^{\,m} = \bigcup_{k=1}^{m-1} \lambda^k A \subset \bigcup_{t=0}^{q-1} \lambda^t A = A \cup \Big(\bigcup_{t=1}^{q-1} \lambda^t A\Big) = A \cup \overline{A}^{\,q},$$

e ciò conclude la dimostrazione.

Immediata conseguenza del Teorema 2.3 - 7) è il seguente:

Corollario 2.4. *1) Per ogni $a \in M_\lambda$, si ha: $[a] = \{\lambda^k a\}_{k \in N}$.*
2) Se λ è un elemento di G di ordine finito q, allora $[a] = \{\lambda^k a\}_{k=0}^{q-1}$.

Nella prossima proposizione verranno dimostrate alcune proprietà degli omomorfismi di M_λ-ipergruppoidi.

Proposizione 2.5. *Siano λ e μ due elementi distinti di G.*

1) Se f è un omomorfismo da M_λ in M_μ, per ogni $a \in M_\lambda$ e per ogni $n \in N$, si ha: $f(\lambda^n a) = \mu^n f(a)$.

2) Una applicazione $f : M_\lambda \to M_\mu$ è un omomorfismo buono se e solo se $f(\lambda a) = \mu f(a)$, per ogni $a \in M$.

3) Ogni omomorfismo $f : M_\lambda \to M_\mu$ è buono e per ogni coppia $(a, b) \in M_\lambda$ si ha:

$$f^{-1}(f(a) \bullet f(b)) = [\lambda^{-2} f^{-1}(f(\lambda^2 a))] \bullet [\lambda^{-2} f^{-1}(f(\lambda^2 b))].$$

4) Se λ è un elemento di G di ordine finito 2, allora f è regolare.

Dimostrazione. 1) L'uguaglianza è ovvia se $n = 0$, inoltre si ha:

$$\big\{f(\lambda a)\} = f(a \bullet a) \subset f(a) \bullet f(a) = \{\mu f(a)\big\},$$

quindi $f(\lambda a) = \mu f(a)$. Infine, per induzione, si ottiene:

$$f(\lambda^{n+1} a) = f(\lambda(\lambda^n a)) = \mu f(\lambda^n a) = \mu[\mu^n f(a)] = \mu^{n+1} f(a).$$

2) L'implicazione $\Rightarrow$ segue subito da 1).

Viceversa, se per ogni $a \in M_\lambda$ si ha: $f(\lambda a) = \mu f(a)$, allora

$$f(a) \bullet f(b) = \{\mu f(a), \mu f(b)\} = \{f(\lambda a), f(\lambda b)\} = f(\{\lambda a, \lambda b\}) = f(a \bullet b),$$

ed f è un omomorfismo buono.

3) Da 1) e 2) si ha che f è un omomorfismo buono. Inoltre, se $x \in [\lambda^{-2} f^{-1}(f(\lambda^2 a))] \bullet [\lambda^{-2} f^{-1}(f(\lambda^2 b))]$, allora $x = \lambda^{-1} f^{-1}(f(\lambda^2 a))$ oppure $x = \lambda^{-1} f^{-1}(f(\lambda^2 b))$. Se $x = \lambda^{-1} f^{-1}(f(\lambda^2 a))$ (analogamente si tratta il caso $x = \lambda^{-1} f^{-1}(f(\lambda^2 b))$), si ha $\lambda x = f^{-1}(f(\lambda^2 a))$ e quindi $\mu f(x) = f(\lambda x) = f(\lambda^2 a) = \mu^2 f(a)$.

Pertanto $f(x) = \mu f(a) \in f(a) \bullet f(b)$ e per conseguenza $x \in f^{-1}(f(a) \bullet f(b))$.

Viceversa, se $x \in f^{-1}(f(a) \bullet f(b))$, allora $f(x) \in f(a) \bullet f(b) = \{u f(a), \mu f(b)\}$, e se $f(x) = \mu f(a)$ si ha $f(\lambda x) = \mu f(x) = \mu^2 f(a) = f(\lambda^2 a)$. Dunque $\lambda x \in f^{-1}(f(\lambda^2 a))$, quindi

$$x \in \lambda^{-1} f^{-1}(f(\lambda^2 a)) \subset [\lambda^{-2} f^{-1}(f(\lambda^2 a))] \bullet [\lambda^{-2} f^{-1}(f(\lambda^2 a))].$$

Si perviene allo stesso risultato supponendo $f(x) = \mu f(b)$.

4) Se λ ha ordine 2, allora $\lambda^{-2} = \lambda^2 = 1_G$ e per 3) si ottiene:

$$f^{-1}(f(a) \bullet f(b)) = f^{-1}(f(a)) \bullet f^{-1}(f(b)),$$

cioè f è regolare.

3. M_λ-ipergruppoidi matroidali o cambisti.

Negli ipergruppoidi la nozione di sottoipergruppoide generato da un sottoinsieme A si può riguardare come la chiusura di A ed analogamente a quanto è stato svolto per gli ipergruppi cambisti (vedi [8], [9], [22]), si può sviluppare una teoria d'indipendenza lineare e dimensionale nella classe degli ipergruppoidi cambisti o matroidali, ovvero verificanti l'assioma dello scambio:

$$x \in [A \cup \{y\}],\ x \notin [A] \Rightarrow y \in [A \cup \{x\}].$$

Ebbene, sotto certe ipotesi gli M_λ-ipergruppoidi sono matroidali, e ciò è quanto viene dimostrata nella seguente:

Proposizione 3.1. *Se λ appartiene al nucleo N_φ dell'azione φ di G su M oppure λ è di ordine finito q, allora:*

1) Per ogni coppia $(a, b) \in M_\lambda^2$, $b \in [a] \Rightarrow a \in [b]$;

2) M_λ è un quasi-ipergruppoide matroidale.

Dimostrazione. 1) Se $\lambda \in N_\varphi$, M_λ è un ipergruppo tale che $[A] = A$, per ogni sottoinsieme non vuoto A di M_λ, e la dimostrazione di 1) e 2) è immediata.

Adesso, si supponga che λ sia un elemento di $G - N_\varphi$ di ordine finito q.

Per il Corollario 2.4, per ogni elemento $a \in M_\lambda$, si ha $[a] = \{\lambda^k a\}_{k=0}^{q-1}$ e se b è un elemento di $[a]$, allora esiste un intero k tale che $0 \leq k \leq q-1$ e $b = \lambda^k a$. Ora, se $k = 0$ si ha $a = b$ e ovviamente $a \in [b]$, mentre se $0 < k \leq q-1$ si ottiene $a = \lambda^{q-k} b \in [b]$, in quanto $1 \leq q-k \leq q-1$. Pertanto, in entrambi i casi, $b \in [a]$ implica $a \in [b]$ e il punto 1) è dimostrato.

2) Sia $x \in [A \cup \{y\}]$ e $x \notin [A]$.

Se $A = \emptyset$, allora $x \in [y]$ e per 1) si ha $y \in [x] = [A \cup \{x\}]$.

Se $A \neq \emptyset$, applicando il Teorema 2.3 - 5), si ricava $x \in [A] \cup [y]$ con $x \notin [A]$, per cui si ha $x \in [y]$ e per 1) si ottiene $y \in [x] \subset [A] \cup [x] = [A \cup \{x\}]$.

Proposizione 3.2. *Per ogni elemento $\lambda \in G$, si ha:*

1) Se $|M_\lambda| > 1$ e $\lambda \in N_\varphi$, allora $[\emptyset] = \emptyset$;

2) Se $|M_\lambda| = 1$, allora $M_\lambda = [\emptyset]$;

3) Se G non opera transitivamente su M, si ha $[\emptyset] = \emptyset$.

Dimostrazione. 1) Per la Proposizione 2.2 - 3), per ogni coppia (a, b) di elementi distinti di M_λ, si ha $[a] \cap [b] = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$, quindi $[\emptyset] = \emptyset$.

2) Immediato, perchè in M_λ non esistono sottoipergruppoidi propri.

3) Per ipotesi, esistono almeno due orbite e quindi esistono due elementi a e b di M_λ tali che $Ga \cap Gb = \emptyset$. Del resto, si ha $[a] \cap [b] \subset Ga \cap Gb$, quindi $[a] \cap [b] = \emptyset$ e per conseguenza $[\emptyset] = \emptyset$.

Teorema 3.3. *Se G opera liberamente su M e λ è un elemento di G tale che nell'ipergruppoide M_λ si ha $[\emptyset] = \emptyset$, allora M_λ è matroidale se e solo se λ è di periodo finito.*

Dimostrazione. Sia M_λ matroidale.

Se esiste un elemento $a \in M_\lambda$ tale che $|[a]| = 1$, allora $\{\lambda a\} = a \bullet a = \{a\}$, quindi $\lambda a = a$ e di conseguenza $\lambda = 1_G$, perchè φ opera liberamente su M. Dunque λ è di periodo finito.

Se per ogni elemento $a \in M_\lambda$ la cardinalità di $[a]$ è maggiore di 1, preso $b \in [a]$ e $b \neq a$, allora $a \in [b]$, perchè $b \notin [\emptyset] = \emptyset$ e M_λ è matroidale. Pertanto esistono due interi positivi m ed n tali che $b = \lambda^n a$ e $a = \lambda^m b$, per cui $a = \lambda^{m+n} a$ e di conseguenza $\lambda^{m+n} = 1_G$, cioè λ è di periodo finito.

Il viceversa è conseguenza della Proposizione 3.1.

Osservazione. Se $V \neq \{0\}$ è un K-spazio vettoriale e K^* è il gruppo moltiplicativo di K, la restrizione a $K^* \times V^*$ dell'operazione esterna di V determina un'azione di K^* su $V^* = V - \{0\}$ e considerando un qualunque elemento λ di K^*, sull'insieme V^* si può introdurre l'iperprodotto $\bullet$ definito negli M_λ-ipergruppoidi, ottenendo così un V^*_λ-ipergruppoide. In questo caso, le orbite dei vettori $v \in V^*_\lambda$ sono uguali agli insiemi $\langle v\rangle^*$ dei vettori non nulli dei sottospazi vettoriali $\langle v\rangle$ generati da v e lo stabilizzatore di v è costituito dalla sola 1_K, cioè K^* opera liberamente su V^*.

Proposizione 3.4. *Se V è un K-spazio vettoriale di* $\dim V > 1$ *e λ è un elemento del gruppo moltiplicativo K^* del campo K, allora nel V^*_λ-ipergruppoide si ha* $[\emptyset] = \emptyset$.

Dimostrazione. Se v, w sono due vettori linearmente indipendenti di V, le due orbite $\langle v\rangle^*$ e $\langle w\rangle^*$ sono distinte, quindi l'azione di K^* su V^* non è transitiva e per la Proposizione 3.2 - 3) si ha: $[\emptyset] = \emptyset$.

Teorema 3.5. *Se $V \neq \{0\}$ è un K-spazio vettoriale e λ è un elemento del gruppo moltiplicativo K^* di K, allora il quasi-ipergruppoide V^*_λ è matroidale se e solo se λ è di periodo finito.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 3.1 basta provare l'implicazione $\Rightarrow$. Dunque si supponga M_λ matroidale.

Se $\dim V > 1$, la dimostrazione è conseguenza della Proposizione 3.4 e del Teorema 3.3.

Se $|K| = 2$, ovviamente $\lambda = 1_K$ e la dimostrazione è conclusa.

Se $\dim V = 1$ e $|K| > 2$, si distinguono i due casi:

I) λ non genera K^*;

II) λ genera K^*.

Nel primo caso si ha $[\emptyset] = \emptyset$. Infatti, se $[\emptyset] \neq \emptyset$ e $V = \langle v \rangle$, preso $w \in [\emptyset]$, per ogni elemento $\alpha \in K^* - \{1_K\}$, si ha: $v \neq \alpha v$ e $w \in [v] \cap [\alpha v]$. Quindi esistono due interi positivi m ed n tali che $w = \lambda^n v$ e $w = \lambda^m \alpha v$, per cui $\lambda^n v - \lambda^m \alpha v = 0$, $\alpha = \lambda^{n-m}$ e λ genera K^*, impossibile.

Pertanto si ha: $[\emptyset] = \emptyset$, e il Teorema 3.3 assicura che λ è di periodo finito.

Infine, nel secondo caso, K è un campo con gruppo moltiplicativo K^* ciclico, pertanto K^* è ciclico finito e λ è un elemento di periodo finito.

Si osservi che il gruppo moltiplicativo K^* di un campo K non è isomorfo al gruppo $(Z, +)$. Infatti, in $(Z, +)$ non esistono elementi diversi da 0 di periodo finito, mentre nei campi K con $\text{Car}\, K = p \neq 2$ oppure $\text{Car}\, K = \infty$, l'elemento -1_K ha ordine 2. Inoltre, se $Car\, K = 2$ e per assurdo K^* è isomorfo a $(Z, +)$, il sottocampo primo P di K è isomorfo al campo Z_2 e ogni elemento $a \in K - P$ è trascendente su P. Pertanto, il sottocampo $P(a)$ generato da a è isomorfo al campo $K_2[x]$ delle frazioni dell'anello $Z_2[x]$ e il gruppo moltiplicativo $K_2[x]^*$ di $K_2[x]$ è ciclico infinito, perchè è un sottogruppo di K^*, impossibile.

Il prossimo teorema permette di costruire altre classi di ipergruppoidi matroidali (anche non commutativi), ma prima si premette il seguente:

Lemma 3.6. *Siano (A, B, C, D), h e k, rispettivamente, una quadrupla di sottoinsiemi non vuoti e due sottoipergruppoidi di un M_λ-ipergruppoide, allora:*

1) $(A \bullet B) \bullet (C \bullet D) = (A \bullet C) \bullet (B \bullet D)$;

2) Per ogni intero positivo n, si ha $\lambda^n h \cup \lambda^n k \subset h \bullet k$;

3) Se λ è un elemento di periodo finito q, allora $h \bullet k$ è un sottoipergruppoide di M_λ e $h \bullet k = h \cup k$.

Dimostrazione. 1) Applicando la Proposizione 2.2 - 1), è facile provare che

$$(A \bullet B) \bullet (C \bullet D) = \lambda^2 A \cup \lambda^2 B \cup \lambda^2 C \cup \lambda^2 D = (A \bullet C) \bullet (B \bullet D).$$

2) Per la Proposizione 2.2 - 1), si ha $\lambda h \cup \lambda k = h \bullet k$ e induttivamente, supponendo $\lambda^n h \cup \lambda^n k \subset h \bullet k$, per 1), si ha:

$$\lambda^{n+1} h \cup \lambda^{n+1} k = \lambda^n h \bullet \lambda^n k \subset (h \bullet k) \bullet (h \bullet k) = (h \bullet h) \bullet (k \bullet k) \subset h \bullet k.$$

3) Applicando 2) e il Teorema 2.3 - 2), si ottiene:

$$h \cup k = \lambda^q h \cup \lambda^q k \subset h \bullet k \subset [h \cup k] = [h] \cup [k] = h \cup k$$

e quindi $[h \cup k] = h \cup k = h \bullet k$.

Teorema 3.7. *Sia* $(H, \circ)$ *un ipergruppoide ed* m *un intero* ≥ 2 *tale che per ogni* $x \in H$ *e per ogni* $n > m$ *si ha:*

$$H = (\cdots((x \circ x) \circ x) \circ \cdots) \circ x, \text{ con } x \text{ ripetuto } n \text{ volte.}$$

Se λ *è un elemento di* G *di ordine finito* q*, nell'ipergruppoide prodotto* $(H \times M_\lambda, \otimes)$ *si ha:*

1) $[(x, y)] = H \times [y]$*, per ogni coppia* $(x, y) \in H \times M_\lambda$*;*

2) Per ogni sottoipergruppoide S *di* $H \times M_\lambda$*, esiste un sottoinsieme non vuoto* A *di* M_λ *tale che* $S = H \times [A]$*;*

3) $[\emptyset]_{H \times M_\lambda} = H \times [\emptyset]_{M_\lambda}$*;*

4) Per ogni coppia (S_1, S_2) *di sottoipergruppoidi di* $H \times M_\lambda$*, si ha* $S_1 \otimes S_2 = S_1 \cup S_2$*;*

5) $H \times M_\lambda$ *è matroidale.*

Dimostrazione. 1) Se (α, β) è una coppia di elementi di $H \times [y]$, esiste $n \in N^*$ tale che $\beta = \lambda^n y$. Certamente si può supporre $n > m$ (se $m \leq n$, preso k tale che $n' = n + kq > m$, si ha: $\beta = \lambda^n y = \lambda^{n'} y$), quindi β appartiene all'iperprodotto $(\cdots((y \bullet y) \bullet y) \bullet \cdots) \bullet y$, con y ripetuto $n + 1$ volte.

Ora, posti $P = (\cdots((x \circ x) \circ x) \circ \cdots) \circ x$ e $Q = (\cdots((y \bullet y) \bullet y) \bullet \cdots) \bullet y$, con x e y ripetuti $n + 1$ volte, si ottiene $P = H$ e

$$(\alpha, \beta) \in H \times Q = P \times Q = (\cdots(((x, y) \otimes (x, y)) \otimes (x, y)) \otimes \cdots) \otimes (x, y).$$

Pertanto $(\alpha, \beta) \in [(x, y)]$ e l'inclusione $H \times M_\lambda \subset [(x, y)]$ è dimostrata.

L'inclusione inversa $[(x, y)] \subset H \times [y]$ è ovvia, perchè $(x, y) \in H \times [y]$ e $H \times [y]$ è un sottoipergruppoide di $H \times M_\lambda$.

2) Sia S un sottoipergruppoide di $H \times M_\lambda$ ed A l'insieme seguente:

$$A = \{y \in M_\lambda \mid \exists x \in H : (x, y) \in S\}.$$

L'insieme A è non vuoto perchè S stesso è non vuoto, e per ogni elemento $y \in A$ si può fissare un elemento $x_y \in H$ tale che $(x_y, y) \in S$.

Ora, applicando 1) e il Teorema 2.3 - 6), si ha:

$$H \times [A] = H \times \Big(\bigcup_{y \in A} [y]\Big) = \bigcup_{y \in A} H \times [y] = \bigcup_{y \in A} [(x_y, y)] \subset S$$

quindi

$$H \times [A] \subset S \subset H \times A \subset H \times [A],$$

e la dimostrazione di 2) è conclusa.

3) Se $[\emptyset]_{M_\lambda} = \emptyset$ e $[\emptyset]_{H\times M_\lambda} \neq \emptyset$, per 2), esiste un sottoinsieme non vuoto A di M_λ tale che $[\emptyset]_{H\times M_\lambda} = H \times [A]$. Del resto, per ogni sottoinsieme T di M_λ, l'insieme $H \times T$ è un sottoipergruppoide di $H \times M_\lambda$, per cui si ha $H \times [A] = [\emptyset]_{H\times M_\lambda} \subset H \times T$ e $A \subset T$.

Pertanto l'insieme A è contenuto in tutti i sottoipergruppoidi di M_λ e $[\emptyset]_{M_\lambda} \neq \emptyset$, impossibile.

Dunque, se $[\emptyset]_{M_\lambda}$ è vuoto, anche $[\emptyset]_{H\times M_\lambda}$ è vuoto.

Adesso, si supponga $[\emptyset]_{M_\lambda} \neq \emptyset$. In questo caso l'insieme $H \times [\emptyset]_{M_\lambda}$ è un sottoipergruppoide di $H \times M_\lambda$ e per ogni sottoipergruppoide S di $H \times M_\lambda$, esiste un sottoinsieme non vuoto A di M_λ tale che $S = H \times [A]$. Pertanto $H \times [\emptyset]_{M_\lambda} \subset H \times [A] = S$ e per definizione $H \times [\emptyset]_{M_\lambda} = [\emptyset]_{H\times M_\lambda}$.

4) Se S_1 e S_2 sono due sottoipergruppoidi di $H \times M_\lambda$ e A_1, A_2 sono due sottoinsiemi non vuoti di M_λ tali che $S_1 = H \times [A_1]$ e $S_2 = H \times [A_2]$, per il Lemma 3.6 - 3), si ha:

$$\begin{aligned} S_1 \otimes S_2 &= (H \times [A_1]) \otimes (H \times [A_2]) = H \circ H \times [A_1] \bullet [A_2] = \\ &= H \times ([A_1] \cup [A_2]) = H \times [A_1] \cup H \times [A_2] = S_1 \cup S_2. \end{aligned}$$

5) Sia $(x, y) \in [X \cup \{(z, w)\}]$ e $(x, y) \notin [X]$. Se $X = \emptyset$, si ha

$$(x, y) \in [(z, w)] = H \times [w] \text{ e } (x, y) \notin [\emptyset]_{H\times M_\lambda} = H \times [\emptyset]_{m_\lambda},$$

quindi $y \in [w]$ e $y \notin [\emptyset]_{M_\lambda}$ e di conseguenza $w \in [y]$ e $(z, w) \in H \times [w] = [(z, w)] = [X \cup \{(z, w)\}]$.

Se $X \neq \emptyset$, per 1), 2) e 4), esiste un sottoinsieme non vuoto A di M_λ tale che $(x, y) \in [X \cup \{(z, w)\}] = [X] \cup [(z, w)] = (H \times [A]) \cup (H \times [w])$, con $(x, y) \notin [X] = H \times [A]$.

Dunque $y \in [w] \subset [A \cup \{w\}]$ e $y \notin [A]$, ed essendo M_λ matroidale, si ricava $w \in [y]$ e di conseguenza

$$(z, w) \in H \times [y] = [(x, y)] \subset [X] \cup [(x, y)] = [X \cup \{(x, y)\}].$$

4. Difetto in un M_λ-ipergruppoide.

Nei prossimi teoremi verranno determinate delle condizioni affinchè il difetto di un sottoipergruppoide $[A]$ generato da un sottoinsieme non vuoto A di M_λ sia ottimo.

Teorema 4.1. *Sia A un sottoinsieme di M_λ di cardinalità $|A| \geq 2$ tale che $\lambda \notin \mathrm{Stab}(A)$ e tale che esiste un elemento b di A non appartenente all'orbita Ga di ogni altro elemento a di $A - \{b\}$. Se l'insieme $S = \big\{r \in N - \{0, 1\} \mid \exists a \in A : \lambda^r \in Stab(a)\big\}$ è non vuoto ed è tale che $\lambda^{\min S} \in \mathrm{Stab}(A)$, allora $c_A = \min S$ e il difetto di $[A]$ è ottimo.*

Dimostrazione. Sia $\min S = m$ e b un elemento di A non appartenente all'orbita Ga di ogni altro elemento $a \in A - \{b\}$. Ovviamente si ha $m > 1$ e inoltre:

$$\overline{A}^{m+1} = \bigcup_{k=1}^{m} \lambda^k A = \Big(\bigcup_{k=1}^{m-1} \lambda^k A\Big) \cup \lambda^m A = \Big(\bigcup_{k=1}^{m-1} \lambda^k A\Big) \cup A = \overline{A}^1 \cup \overline{A}^m$$

quindi $m \in C_A$ e $c_A \leq m$.

Se $c_A = 1$, allora A è un sottoipergruppoide di M_λ tale che $\lambda^m \in \mathrm{Stab}(A)$, e per la Proposizione 2.2 - 4), si ha $\lambda \in \mathrm{Stab}(A)$, impossibile. Dunque $2 \leq c_A \leq m$. Applicando il Teorema 2.3 - 1) - 2) - 3), si ottiene:

$$\lambda^{c_A} A \subset \overline{A}^{c_A+1} \subset \overline{A}^1 \cup \overline{A}^{c_A} = \bigcup_{k=0}^{c_A-1} \lambda^k A,$$

e quindi esistono un intero r ed un elemento $a \in A$ tali che $0 \leq r \leq c_A - 1$ e $\lambda^{c_A} b = \lambda^r a$. Del resto, per ipotesi, l'elemento b non appartiene all'orbita Ga di ogni altro elemento a di $A - \{b\}$, quindi $a = b$, $\lambda^{c_A - r} a = a$ e $c_A - r \in S$, ed essendo $m = \min S$ si ottiene $m \leq c_A - r \leq c_A$, dunque $m = c_A$.

Infine, per ogni $n > m$, posto $n = mq + r$ con $0 \leq r < m$, si ha $\lambda^n A = \lambda^r \lambda^{mq} A = \lambda^r A$ ed applicando il Teorema 2.3 - 1) - 2), si ricava:

$$\overline{A}^{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n} \lambda^k A = \bigcup_{k=0}^{m-1} \lambda^k A =$$

$$= A \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{m-1} \lambda^k A\Big) = \overline{A}^1 \cup \overline{A}^m \subset \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}^n.$$

Pertanto, per ogni $n > m = c_A$, si ha $n \in C_A$, quindi $N_A = \{0, 1, \ldots, c_A - 1\}$ e $c_A = m_A + 1$.

Corollario 4.2. *Se λ è un elemento di $G - \{1_G\}$ di ordine finito q ed A è un sottoinsieme di M_λ tale che $|A| \geq 2$ e per ogni $a \in A$ si ha $[\lambda] \cap \mathrm{Stab}(a) = \{1_G\}$, allora:*

1) Se esiste un elemento b di A non appartenente all'orbita Ga di ogni altro elemento a di $A - \{b\}$, allora $c_A = q$ e il difetto di $[A]$ è ottimo;
2) Se per ogni coppia di elementi distinti di A si ha: $Ga \cap Gb = \emptyset$, allora $[A]$ è unione disgiunta degli insiemi $\lambda^k A$ con $k \in \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ e se l'insieme A è finito si ha: $|[A]| = q|A|$.

Dimostrazione. 1) Se $\lambda \in \mathrm{Stab}(A)$, allora $\lambda A = A$ ed esiste un elemento $a \in A$ tale che $b = \lambda a$, impossibile perchè b non appartiene alle orbite Ga di ogni altro elemento $a \in A - \{b\}$ e $\lambda \neq 1_G$. Dunque $\lambda \notin Stab(A)$.

Del resto, l'insieme $S = \{r \in N - \{0, 1\} \mid \exists a \in A : \lambda^r \in Stab(a)\}$ è non vuoto perchè $\lambda^q = 1$, e il minimo di S è q in quanto $[\lambda] \cap \mathrm{Stab}(a) = \{1_G\}$, per ogni $a \in A$.

Dunque sono soddisfatte tutte le ipotesi del Teorema 4.1 e per conseguenza $q = c_A = m_A + 1$.

2) Per il Teorema 2.3 - 4), si ha $[A] = \bigcup_{k=0}^{q-1} \lambda^k A$. Inoltre se esistono due interi r ed s tali che $0 \leq s < r \leq q-1$ e $\lambda^r A \cap \lambda^s A \neq \emptyset$, allora esiste una coppia (a, b) di elementi di A tali che $\lambda^r a = \lambda^s b$, dunque $Ga \cap Gb \neq \emptyset$ e di conseguenza $a = b$ e $\lambda^{r-s} = 1_G$, impossibile perchè l'ordine di λ è q.

Infine, per ogni $k \in \{0, 1, \dots, q-1\}$, l'applicazione $f : A \to \lambda^k A$ tale che $f(a) = \lambda^k a$, per ogni $a \in A$, è biunivoca, quindi $|A| = |\lambda^k A|$ e se l'insieme A è finito si ha $|[A]| = q|A|$.

Osservazione. Se $V \neq \{0\}$ è un K-spazio vettoriale, l'azione determinata dalla restrizione a $K^* \times V^*$ dell'operazione esterna di V è tale che lo stabilizzatore di ogni vettore $v \in V^*$ è costituito dalla sola 1_K e ovviamente, per ogni $\lambda \in K^*$, si ha: $[\lambda] \cap \mathrm{Stab}(v) = \{1_K\}$ oppure $[\lambda] \cap \mathrm{Stab}(v) = \emptyset$ a secondo che λ è o non è di periodo finito. Inoltre, se v e w sono due vettori linearmente indipendenti, le rispettive orbite $\langle v\rangle^*$ e $\langle w\rangle^*$ sono disgiunte e se λ è un elemento di K^* di ordine finito $q \neq 1$ ed A è un sottoinsieme libero di V di cardinalità $|A| \geq 2$, allora sono soddisfatte tutte le ipotesi del Corollario 4.2 ed $[A]$ è unione disgiunta degli insiemi $\lambda^k A$ con $k \in \{0, 1, \dots, q-1\}$.

Con dimostrazione analoga a quella del Teorema 4.1 si dimostra il seguente

Teorema 4.3. *Se λ è un elemento di G di ordine finito q ed a è un elemento di M_λ tale che $\lambda \notin \mathrm{Stab}(a)$, allora $c_a = \min\{r \in N^* \mid \lambda^r \in \mathrm{Stab}(a)\} = m_a + 1$ e il difetto di $[a]$ è ottimo*

Immediata conseguenza del Teorema 4.3 è il seguente:

Corollario 4.4. *Se λ è un elemento di G di ordine finito q ed a è un elemento di M_λ tale che $[\lambda] \cap \mathrm{Stab}(a) = \{1_G\}$, allora $c_a = q$, il difetto di $[a]$ è ottimo e $|[a]| = q$.*

Corollario 4.5. *Se λ è un elemento di G di ordine finito q ed A è un sottoinsieme finito di M_λ tale che $\lambda \notin \bigcup_{a\in A} \mathrm{Stab}(a)$, allora posto $m = \max\{c_a\}_{a\in A}$, si ha: $[A] = \overline{A}^{\,1} \cup \overline{A}^{\,m+1}$ e $c_A \leq m + 1$.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 1.2 e il Teorema 4.3, per ogni elemento $a \in A$ e per ogni intero $i \geq 1$, si ha $[a] = \bigcup_{k=1}^{c_a} \overline{a}^{\,k} = \bigcup_{k=1}^{m_a+i} \overline{a}^{\,k}$, quindi $[a] = \bigcup_{k=1}^{m+1} \overline{a}^{\,k}$ perchè $m_a \leq m < m + 1$.

Del resto, applicando il Teorema 2.3 - 1) - 2) - 5) - 6), si ottiene:

$$[A] = \bigcup_{a\in A}[a] = \bigcup_{a\in A}(\bigcup_{k=1}^{m+1} \overline{a}^{\,k}) = \bigcup_{a\in A}\Big(\bigcup_{k=0}^{m}\{\lambda^k a\}\Big) =$$

$$= \bigcup_{k=0}^{m} \lambda^k A = A \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{m} \lambda^k A\Big) = \overline{A}^{\,1} \cup \overline{A}^{\,m+1}.$$

Infine, $\overline{A}^{\,m+2} \subset [A] = \overline{A}^{\,1} \cup \overline{A}^{\,m+1} = \bigcup_{k=1}^{m+1} \overline{A}^{\,k}$, dunque $m + 1 \in C_A$ e $c_A \leq m + 1$.

5. Gruppi cambisti.

Negli articoli [8] e [9], utilizzando la nozione di sottoipergruppo chiuso, sono stati definiti e studiati gli ipergruppi cambisti ed è stata introdotta la nozione di epimorfismo proprio, che ha permesso di stabilire le relazioni esistenti tra le dimensioni di un ipergruppo H e dell'ipergruppo quoziente H/h con h sottoipergruppo di H invertibile e invariante. Del resto, considerato il cuore ω_H di H, per il Teorema 2.10 di [9], anche la proiezione canonica dell'ipergruppo H sul gruppo quoziente H/ω_H è un epimorfismo proprio, dunque è importante conoscere la struttura dei gruppi cambisti per poter caratterizzare i sottoipergruppi parti complete di H e lo stesso ipergruppo cambista H.

Su questo argomento è stato dato un primo contributo nell'articolo [8], in cui si è osservato che l'ordine di ogni elemento x di un gruppo cambista G è un numero primo e si sono dimostrati i risultati seguenti:

1) Se G è un gruppo abeliano, G è cambista se e solo se, per ogni $x \in G - \{1_G\}$, l'ordine di x è un numero primo.

2) Tutti i gruppi abeliani cambisti sono isomorfi ad una somma diretta del tipo $\oplus_{i\in I} C_p(i)$, dove $C_p(i)$ è il gruppo ciclico di ordine p.

Adesso si dimostrano alcune proprietà che permettono di caratterizzare, in particolare, i gruppi cambisti finiti e non abeliani, ma prima si osservi che in questo paragrafo verranno utilizzate le stesse notazioni considerate in [8], pertanto $\langle A\rangle$ indicherà il sottogruppo generato da un sottoinsieme A di G e ovviamente G è cambista se:

$$x \in \langle A, y\rangle,\ x \notin \langle A\rangle \Rightarrow y \in \langle A, x\rangle.$$

Osservazione. Se p e q sono due primi tali che q divide $p-1$, allora nel gruppo moltiplicativo Z_p^* del campo Z_p esiste un elemento $\bar{n}$, con $1 < n \leq p-1$, di ordine q e quindi $n^q \equiv 1 \bmod (p)$. Inoltre, se N è un gruppo abeliano di esponente p (cioè tutti gli elementi di N hanno ordine p), l'applicazione $\alpha : N \to N$ tale che $\alpha(x) = x^n$, per ogni $x \in N$, è un automorfismo di N di ordine q, perchè $\alpha^q(x) = x^{n^q} = x$, e si può considerare il gruppo G ottenuto come prodotto semi-diretto $\langle\alpha\rangle \times_j N$, dove $j : \langle\alpha\rangle \to \operatorname{Aut} N$è l'immersione di $\langle\alpha\rangle$ nel gruppo degli automorfismi di N. In tale gruppo ogni elemento $x \neq 1_G$ ha ordine p oppure q, perchè tutti gli elementi di G di ordine p stanno in N e non centralizzano nessun elemento di $G - N$, inoltre tutti i sottogruppi di N sono normali in G, perchè $\alpha^s(\langle x\rangle) = \langle x\rangle$, per ogni $x \in N$ e per ogni $\alpha^s \in \langle\alpha\rangle$.

Si dimostra il seguente:

Teorema 5.1. *Se N è un p-gruppo abeliano finito di esponente un primo p, allora il gruppo $G = \langle\alpha\rangle \times_j N$ è un gruppo cambista (non commutativo).*

Dimostrazione. Si incominci a provare che per ogni sottogruppo S di G e per ogni $x \in G$ si ha $[\langle S, x\rangle : S] \in \{1, p, q\}$.

Se $x = 1_G$ oppure $S = G$, ovviamente si ha $[\langle S, x\rangle : S] = 1$. Allora, siano $x \neq 1_G$ e $S \neq G$.

Se S è un sottogruppo di N, allora S è un sottogruppo normale di G e si ha $\langle S, x\rangle = S\langle x\rangle$, quindi

$$\big[\langle S, x\rangle : S\big] = \left|\frac{S\langle x\rangle}{S}\right| = \left|\frac{\langle x\rangle}{S \cap \langle x\rangle}\right|$$

e $[\langle S, x\rangle : S]$ divide $|\langle x\rangle| \in \{p, q\}$. Dunque $[\langle S, x\rangle : S] \in \{1, p, q\}$.

Se S non è contenuto in N, allora contiene almeno un elemento w di ordine q e si possono distinguere i due casi:

1) $|\langle x\rangle| = p$, $|\langle w\rangle| = q$;
2) $|\langle x\rangle| = |\langle w\rangle| = q$.

Nel primo caso si ha $x \in N$, quindi $\langle x\rangle$ è un sottogruppo normale di G, per cui $\langle S, x\rangle = S\langle x\rangle$ e l'indice $[\langle S, x\rangle : S] = [\langle x\rangle : (S \cap \langle x\rangle)] \in \{1, p\}$.

Nel secondo caso, i due sottogruppi $\langle x\rangle$ e $\langle w\rangle$ sono coniugati, perchè q-sottogruppi di Sylow di G, quindi esiste $y \in N$ tale che $\langle x\rangle = y^{-1}\langle w\rangle y$.

Del resto $y^{-1}wy \in y^{-1}\langle w\rangle y = \langle x\rangle$ e $y^{-1}wy \neq 1_G$, dunque $\langle x\rangle = \langle y^{-1}wy\rangle$ e quindi si ha $\langle x\rangle \subset \langle w, y\rangle \subset \langle S, y\rangle$, cioè $\langle S, x\rangle \subset \langle S, y\rangle$.Inoltre, per il caso (1), $[\langle S, y\rangle : S] \in \{1, p\}$ e l'uguaglianza $[\langle S, y\rangle : S] = [\langle S, x\rangle : S][\langle S, y\rangle : \langle S, x\rangle]$ porge $[\langle S, x\rangle : S] \in \{1, p\}$.

Dunque, in tutti i casi, si ottiene $[\langle S, x\rangle : S] \in \{1, p, q\}$.

Infine, per ogni sottoinsieme A di G e per ogni coppia $(x, y) \in G^2$ tale che $x \in \langle A, y\rangle$ e $x \notin \langle A\rangle$, si ha $\langle A\rangle \subset \langle A, x\rangle \subset \langle A, y\rangle$, con $\langle A\rangle \neq \langle A, x\rangle = \langle\langle A\rangle, x\rangle$ e $\langle A\rangle \neq \langle A, y\rangle = \langle\langle A\rangle, y\rangle$. Pertanto, essendo $[\langle A, y\rangle : \langle A\rangle] \in \{p, q\}$, si ha $y \in \langle A, y\rangle = \langle\langle A\rangle, y\rangle = \langle\langle A\rangle, x\rangle = \langle A, x\rangle$ e il gruppo G è cambista.

Lemma 5.2. *Se G è un gruppo cambista, per ogni coppia (x, y) di elementi di $G - \{1_G\}$ tali che $x \notin \langle y\rangle$, si ha che $\langle y\rangle$ è un sottogruppo massimale in $\langle x, y\rangle$.*

Dimostrazione. Sia S un sottogruppo di $\langle x, y\rangle$ tale che $\langle y\rangle \subset S \subset \langle x, y\rangle$ e $\langle y\rangle \neq S$. Per ogni elemento $a \in S - \langle y\rangle$ si ha $a \in \langle x, y\rangle$ e $a \notin \langle y\rangle$, per cui $x \in \langle a, y\rangle$ e quindi $\langle x, y\rangle = \langle a, y\rangle \subset S \subset \langle x, y\rangle$. Dunque $S = \langle x, y\rangle$.

Proposizione 5.3. *Se G è un gruppo cambista finito e nilpotente, allora G è abeliano.*

Dimostrazione. Sia $(x, y) \in G^2$. Se $\{x, y\} \cap \{1_G\} \neq \emptyset$ oppure $x \in \langle y\rangle$, si ha subito $xy = yx$. Allora, sia $\{x, y\} \cap \{1_G\} = \emptyset$ e $x \notin \langle y\rangle$. Siccome G è cambista, si ha $y \notin \langle x\rangle$ e per il Lemma 5.2 i due sottogruppi $\langle x\rangle$ e $\langle y\rangle$ sono massimali in $\langle x, y\rangle$. Del resto, $\langle x, y\rangle$ è nilpotente, perchè lo è G, e la massimalità di $\langle x\rangle$ e $\langle y\rangle$ comporta la loro normalità in $\langle x, y\rangle$. Inoltre si ha $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle = \{1_G\}$, perchè $x \notin \langle y\rangle$ e $\langle x\rangle$, $\langle y\rangle$ sono di ordine primo, quindi $x(yx^{-1}y^{-1}) = (xyx^{-1})y^{-1} \in \langle x\rangle \cap \langle y\rangle = \{1_G\}$, dunque $xyx^{-1}y^{-1} = 1_G$ e $xy = yx$.

Lemma 5.4. *Sia G un gruppo cambista, allora:*

1) $\forall (x, y) \in G^2 - \{(1_G, 1_G)\}$ tale che $y \notin N_G(\langle x\rangle)$, si ha $y \in \langle x, y^{-1}xy\rangle$;

2) Se H è un sottogruppo abeliano di G, allora $N_G(H) \subset N_G(\langle x\rangle)$, per ogni $x \in H$.

Dimostrazione. 1) Se $x \in \langle y^{-1}xy\rangle$ si ha $\langle x\rangle = \langle y^{-1}xy\rangle$. Supponendo $|\langle x\rangle| = q$, per ogni $n \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, esiste $m \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ tale che $x^n = (y^{-1}xy)^m = y^{-1}x^m y$, dunque $yx^n = x^m y$ e $y \in N_G(\langle x\rangle)$, impossibile.

Pertanto $x \notin \langle y^{-1}xy\rangle$ e $x \in \langle y^{-1}xy, y\rangle$, e per l'assioma dello scambio $y \in \langle y^{-1}xy, x\rangle$.

2) Il risultato è ovvio se $x = 1_G$, per cui si supponga $x \in H - \{1_G\}$ e $y \in N_G(H)$.

Se $y \in H$, allora si ha subito $y \in N_G(\langle x\rangle)$, in quanto $x \in H$ e H è abeliano. Mentre, se $y \in N_G(H) - H$ e $y \notin N_G(\langle x\rangle)$, allora si ottiene $y^{-1}xy \in y^{-1}Hy = H$ e per 1) si ricava $y \in \langle y^{-1}xy, x\rangle \subset H$, impossibile.

Osservazione. Se G è un gruppo cambista finito e non abeliano, allora, per la Proposizione 5.3, G non è nilpotente, dunque non è un q-gruppo e perciò esistono almeno due primi distinti che dividono l'ordine di G.

Teorema 5.5. *Siano G un gruppo cambista finito e non abeliano, q è il minimo primo che divide l'ordine di G e Q un q-sottogruppo di Sylow di G, allora esiste un sottogruppo normale N di G tale che $G = QN$ e $Q \cap N = \{1_G\}$.*

Dimostrazione. Q è nilpotente perchè è un q gruppo finito, ed applicando la Proposizione 5.3 e il Lemma 5.4 - 2), si ottiene $N_G(Q) \subset N_G(\langle x \rangle)$, per ogni $x \in Q$. Dunque, per ogni $y \in N_G(Q)$, si ha $y^{-1}xy \in y^{-1}\langle x \rangle y = y^{-1}y\langle x \rangle = \langle x \rangle$, quindi esiste $n \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ tale che $y^{-1}xy = x^n$, per conseguenza $y^{q-1} \in C_G(x)$ (ex. 20, Cap. I di [14]).

Del resto q è il minimo primo che divide l'ordine di G, quindi $(q - 1, |G|) = 1$, perciò esistono due interi r ed s tali che $(q-1)r + |G|s = 1$. Pertanto $y = y^{(q-1)r+|G|s} = y^{(q-1)r} \in C_G(x)$, così si è dimostrato che, per ogni coppia $(x, y) \in Q \times N_G(Q)$, si ha: $yx = xy$, cioè $Q \subset Z(N_G(Q))$.

Infine, per il teorema di Burnside sui complementi normali (Teorema 39.1 di [1]), esiste un sottogruppo normale N di G tale che $G = QN$ e $Q \cap N = \{1_G\}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Aschbacher, *Finite group theory,* Cambridge University Press, 1988.

[2] P. Corsini, *Prolegomena of hypergroup theory,2nd ed.,* Aviani Editore, 1992.

[3] P. Corsini - Y. Sureau, *Sur les sous-hypergroupes d'un hypergroupe,* Riv. Mat. Univ. Udine, 1 (1987), pp. 7–21.

[4] M. De Salvo - D. Freni, *Ipergruppi finitamente generati,* Riv. Mat. Univ. Parma, (4) 12 (1986), pp. 177–186.

[5] M. De Salvo - D. Freni - G. Lo Faro, *On the hypergroups with four proper pairs and two or three non scalar elements,* Rend. Circ. Matem. Palermo, (2) 46 (1997), pp. 29–51.

[6] M. De Salvo - D. Freni - G. Lo Faro, *On the hypergroups with four proper pairs and three or four non scalar elements,* Accettato per la pubblicazione su gli Analele Stiintifice Ale Universitatii Al. I Cuza Iasi (Romania), 1995-1996.

[7] D. Freni, *Structure des hypergroupes quotients et des hypergroupes de type U, application à la théorie de la dimension et à l'Homologie non abelienne,* These de Doctorat, Univ. de Clermont Ferrand II, 1985.

[8] D. Freni, *Sur les hypergroupes cambistes,* Rend. Istit. Lombardo, 119 (1985), pp. 175–186.

[9] D. Freni, *Sur la théorie de la dimension dans les hypergroupes,* Acta Univ. Carolinae, Math. et Physica, 27 - 2 (1986).

[10] D. Freni, *Une note sur le coeur d'un hypergroupe et sur la clôture transitive β^* de β,* Riv. Mat. Pura Appl. Univ. Udine, 8 (1991), pp. 153–156.

[11] D. Freni, *On a strongly regular relation in hypergroupoids,* P.U.M.A. Budapest Ser. A, 3 (1992), pp. 191–198.

[12] D. Freni, *Una nota su gli ipergruppoidi ciclici,* Ratio Mathematica Univ. Pescara, 9 (1995), pp. 101–111.

[13] M. Gutan - D. Freni - Y. Sureau, *Sur le groupe des scalaires d'un hypergroupe,* Atti del convegno "New frontiers in hyperstrctures and related algebras" di Monteroduni, Hadronic Press, U.S.A., pp. 103–124, 1996.

[14] A. Machì , *Introduzione alla teoria dei gruppi,* Feltrinelli, 1974.

[15] W. Prenowitz - J. Jantosciak, *Geometries and Join Spaces,* Journal fur die reine und angewandte Mathematik, (1972), p. 257.

[16] M. Scafati Tallini, *Hypervector spaces,* Proc. fourth int. Congress on AHA, pp. 167–174, 1990.

[17] M. Scafati Tallini, *Matroidal hypervector spaces,* Jour. of Geometry, 42 (1991), pp. 132–140.

[18] M. Scafati Tallini, *La categoria degli spazi ipervettoriali,* Riv. Matem. Pura Appl. Univ. Udine, 1992.

[19] S. Spartalis - T. Vougiouklis, *The fundamental relations on H_V-rings,* Riv. di Matem. Pura Appl., 14 (1994), pp. 7–20.

[20] G. Tallini, *Geometric hyperquasigroups and line spaces,* Acta Univ. Carolinae Math. Phys., 25 - 1 (1984), pp. 69–73.

[21] G. Tallini, *On Steiner hypergroups and linear codes,* Atti Convegno su Ipergruppi e altre strutture multivoche e loro applicazioni, Univ. Udine, pp. 87–91, 1985.

[22] G. Tallini, *Dimensione negli ipergruppi,* Atti Univ. Cattolica di Milano Sci. Mat., 11 (1994), pp. 367–390.

[23] T. Vougiouklis, *The fundamental relations on H_V-rings. The general hyperfield,* Proc. Fourth Int. Cong. on Algebraic Hyperstr. and Appl., World Scientific, 1991, pp. 203–211.

Dipartimento di Matematica,
Università di Udine,
Via delle Scienze 206,
33100 Udine (ITALY),
e-mail: freni@dimi.uniud.it