LE MATEMATICHE
Vol. LII (1997) – Fasc. II, pp. 311–332

ESISTENZA DI SOLUZIONI PER UNA DISEQUAZIONE ELLITTICA QUASILINEARE DERIVANTE DA UN PROBLEMA DI FRONTIERA LIBERA

ANNA MARIA ROSSI

In this work we prove the existence of (at least) one solution of the inequality:

$$\begin{cases} a(u, v-u) + l(u, v-u) \geq 0 \quad \text{for any } v \in M(u^\circ) \\ u \in M(u^\circ) \cap L^\infty(\Omega) \end{cases}$$

where $M(u^\circ) = \{v \in H^{1,2}(\Omega) : v = u^\circ \text{ on } \Gamma^+ \text{ and } v \leq u^\circ \text{ on } \Gamma^\circ\}$, a and l are non linear forms, whose coefficients satisfy Carathéodory's conditions and suitable growth's assumptions, Γ^+ and Γ° are parts of $\partial\Omega$. The above introduced inequality represents a mathematical generalization of a free boundary problem studied in [1], where, in the same space $M(u^\circ)$, the author looks for solutions of :

$$\int_\Omega k(u)\nabla(v-u)a(\cdot)(\nabla u + e(\cdot, u))\, dx \geq 0 \text{ for any } v \in M(u^\circ),$$

where e is bounded and satisfying Carathéodory's conditions, k piecewise continuous, bounded and not negative, a bounded and uniformly elliptic.

Entrato in Redazione il 5 maggio 1997.

Introduzione.

La disequazione studiata in questo lavoro rappresenta la generalizzazione matematica di un problema di frontiera libera studiato in [1], dove è trattato, nel caso stazionario, il flusso di un fluido incomprimibile attraverso un mezzo poroso non omogeneo.

Assegnati $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, limitato e connesso con frontiera lipschitziana, $S = S^\circ \cup S^+$ relativamente aperto in $\partial\Omega$, $u^\circ \in H^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non negativa, limitata e continua a tratti, $e : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ limitata e soddisfacente le condizioni di Carathéodory, $a : \Omega \to \mathbb{R}^{n^2}$ misurabile, limitata ed ellittica, e definito $M(u^\circ) = \{v \in H^{1,2}(\Omega) : v = u^\circ \text{ su } S^+ \text{ e } v \le u^\circ \text{ su } S^\circ\}$, in [1] si determina l'esistenza di $u \in M(u^\circ)$ che soddisfi:

$$\int_\Omega k(u)\nabla(v-u)a(\cdot)(\nabla u + e(\cdot, u))\,dx \ge 0 \quad \text{per ogni } v \in M(u^\circ).$$

In questo lavoro, se

$$a(u, v) = \int_\Omega \Big\{ \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(\cdot, u)\partial_j u \partial_i v + \sum_{i=1}^n b_i(\cdot, u) v \partial_i u + \\ + \sum_{i=1}^n c_i(\cdot, u) u \partial_i v + d(\cdot, u) u v \Big\}\,dx$$

ed

$$l(u, v) = \int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n f_i(\cdot, u)\partial_i v \Big\}\,dx,$$

sapendo che $a_{i,j}, b_i, c_i, d, f_i : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \dots, n)$ sono funzioni di Carathéodory, tali che per q.o. $x \in \Omega$, per ogni $t \in \mathbb{R}$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \nu|\xi|^2$, con $\nu \in \mathbb{R}_+$, $|a_{i,j}(x,t)| \le \eta$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$, con $\eta \in \mathbb{R}_+$, $|f_i(x,s)| \le C_o(x) + b_o|s|^{2/p}$ per ogni $i = 1, \dots, n$, con $p \in [2, \infty[\cap]n-2, \infty[$, $b_o \in \mathbb{R}_+$ e C_o opportuno, si prova che il problema:

$$\begin{cases} a(u, v-u) + l(u, v-u) \ge 0 & \text{per ogni } v \in M(u^\circ) \\ u \in M(u^\circ) \cap L^\infty(\Omega) \end{cases},$$

ammette soluzione.

Si considera dapprima un problema linearizzato associato, di cui si dimostra esistenza ed unicità della soluzione. Definita quindi un'opportuna applicazione $\Phi : M(u^\circ) \to M(u^\circ)$, che soddisfa le ipotesi del teorema del punto fisso di Schauder, si giunge al risultato desiderato.

Desidero ringraziare il Prof. P. Oppezzi con il quale ho discusso i risultati del presente lavoro.

0. Notazioni e preliminari.

Nel corso del lavoro, Ω denoterà un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, con frontiera $\partial\Omega$ lipschitziana (nel senso della Def. 1.3, Cap. 1 di [5]). Intenderemo, a meno di esplicita menzione, che ogni uguaglianza tra funzioni di $H^{1,2}(\Omega)$ su sottoinsiemi di frontiera regolari sia intesa come uguaglianza delle rispettive tracce e, se $\Pi \subset \partial\Omega$, denoteremo con mis Π la misura (n-1)-dimensionale.
Per ogni $u \in H^{1,2}(\Omega)$ indicheremo con $\partial_j u$ la derivata rispetto alla j-esima variabile nel senso delle distribuzioni e con $\nabla u = (\partial_1 u, \ldots, \partial_n u)$.

Definizione 0.1. Siano $\Gamma \subset \partial\Omega$, Γ aperto in $\partial\Omega$, Γ^+ non vuoto e relativamente chiuso in Γ, $\Gamma^\circ = \Gamma \setminus \Gamma^+$ ed $u^\circ \in H^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Definiamo:

$$M(u^\circ) = \{v \in H^{1,2}(\Omega) : v = u^\circ \text{ su } \Gamma^+ \text{ e } v \leq u^\circ \text{ su } \Gamma^\circ\}.$$

Osservazione 0.2. Notiamo che $M(u^\circ)$ risulta un sottoinsieme chiuso, convesso e non vuoto di $H^{1,2}(\Omega)$.

Definizione 0.3. Siano $u, v \in H^{1,2}(\Omega)$. Definiamo la seguente forma non lineare:

$$a(u, v) = \int_\Omega \Big\{ \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(\cdot, u)\partial_j u \partial_i v + \sum_{i=1}^n b_i(\cdot, u) v \partial_i u + \sum_{i=1}^n c_i(\cdot, u) u \partial_i v + d(\cdot, u) u v \Big\} dx, \tag{0.3.1}$$

ove $a_{i,j}, b_i, c_i, d, f_i : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ sono funzioni di Carathéodory. Supponiamo inoltre che:
esista $\nu \in \mathbb{R}_+$ tale che per q.o. $x \in \Omega$, per ogni $t \in \mathbb{R}$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x, t)\xi_i \xi_j \geq \nu|\xi|^2; \tag{0.3.2}$$

esista $\eta \in \mathbb{R}_+$ tale che per q.o. $x \in \Omega$, per ogni $t \in \mathbb{R}$, per ogni $i, j = 1, \ldots, n$:

$$|a_{i,j}(x, t)| \leq \eta; \tag{0.3.3}$$

esista $\rho \in L^n(\Omega)$ tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $i \in \mathbb{N}$:

(0.3.4) $$|b_i(x,t)| \leq \rho(x);$$

esista $\omega \in L^n(\Omega)$ tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $i \in \mathbb{N}$:

(0.3.5) $$|c_i(x,t)| \leq \omega(x);$$

esista $\chi \in L^{n/2}(\Omega)$ tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$:

(0.3.6) $$|d(x,t)| \leq \chi(x).$$

Per quanto assunto, la (0.3.1) definisce un funzionale

$$a : H^{1,2}(\Omega) \times H^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}.$$

Osservazione - Definizione 0.4. Notiamo che se

$$f_i : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, n)$$

sono funzioni di Carathéodory e

(0.4.1) $$|f_i(x,s)| \leq C_o(x) + b_o|s|^{2/p} \quad \text{con } p \in [2, \infty[\cap]n-2, \infty[$$

per q.o. $x \in \Omega$, per ogni $s \in \mathbb{R}$, con $b_o \in \mathbb{R}_+$, $C_o \in L^{np/(n-2)}(\Omega)$ se $n > 2$, $C_o \in L^\infty(\Omega)$ se $n = 2$, allora $f_i(\cdot, u) \in L^2(\Omega)$ per ogni $u \in L^{2^*}(\Omega)$, ove $1/2^* = 1/2 - 1/n$, tenendo conto che, se $n > 2$, si ha che $\dfrac{np}{n-2} > 2$ e $\dfrac{4}{p} < 2^*$.

Risulta quindi ben definito il funzionale $l : H^{1,2}(\Omega) \times H^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ tale che:

(0.4.2) $$l(u,v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(\cdot, u)\partial_i v \right\} dx \quad \text{per ogni } u, v \in H^{1,2}(\Omega).$$

Lemma 0.5. *Sia V un sottospazio chiuso di $H^{1,2}(\Omega)$ tale che $H_o^{1,2}(\Omega) \subset V \subset H^{1,2}(\Omega)$ con $|u|_V = |u|_{H^{1,2}(\Omega)}$, $\tilde{a}$ la forma bilineare su $V \times V$:*

$$\tilde{a}(u,v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\partial_j u \partial_i v + \sum_{i=1}^n b_i v \partial_i u + \sum_{i=1}^n c_i u \partial_i v + duv \right\} dx,$$

con $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, $b_i, c_i \in L^n(\Omega)$, $d \in L^{n/2}(\Omega)$ $(i, j = 1, \dots, n)$. Esistono allora k e $\lambda_o > 0$ tali che per ogni $\lambda > \lambda_o$:

(0.5.1) $$\tilde{a}(u,u) + \lambda\langle u, u\rangle_{L^2(\Omega)} \geq k|u|_V^2 \quad \textit{per ogni } u \in V.$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 4.6 di [4] segue la tesi, notando che se Ω è aperto limitato con $\partial\Omega$ lipschitziana, allora è di tipo (S), come richiesto da tale proposizione.

Lemma 0.6. *Siano A un aperto di $\mathbb{R}^n$ con frontiera lipschitziana, $V = \{u \in H^{1,2}(A) : u = 0$ su $\Delta \subset \partial A$, Δ chiuso$\}$, con norma $|\cdot|_V = |\cdot|_{H^{1,2}(\Omega)}$, K un convesso chiuso di V, $\ddot{a} : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare continua e supponiamo che esistano α, β, γ forme bilineari continue su $V \times V$ tali che per ogni $u, v, w \in V$:*

$$\ddot{a} = \alpha + \beta + \gamma \tag{0.6.1}$$

$$\alpha(u, v) = \alpha(v, v) \ \textit{ se } \ \partial_i u \partial_j v = \partial_i v \partial_j v \ \textit{ q.o. in } \ A, i, j = 1, \dots, n \tag{0.6.2}$$

$$\textit{esista } \ \mu \in \mathbb{R}_+ \ \textit{ per cui } \ \alpha(u, u) \geq \mu |\nabla u|^2_{2,A} \tag{0.6.3}$$

$$\beta(u, v) = \beta(w, v) \ \textit{ se } \ v\partial_i u = v \partial_i w \ \textit{ q.o. in } \ A, i = 1, \dots, n \tag{0.6.4}$$

$$|\beta(u, v)| \leq \varphi\big(m(\operatorname{supp} \nabla u)\big)|u|_V |v|_V, \tag{0.6.5}$$

ove $m : \mathcal{L} \to [0, \infty]$ ($\mathcal{L}$ è la σ-algebra degli insiemi misurabili Lebesgue in A) è una misura assolutamente continua rispetto a quella di Lebesgue, $m(A) < \infty$ e $\varphi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ è una funzione strettamente crescente e continua in 0, con $\varphi(0) = 0$.

$$\gamma(u, v) \geq \tau \int_A uv \, dx \ \text{ se } \ uv \geq 0 \ \textit{ q.o. in } \ A, \ \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{0.6.6}$$

(Se A è limitato e $K \subset H^{1,2}(A)$ si potrà indebolire la (0.6.6) sostituendola con:

$$\gamma(u, v) \geq 0). \tag{0.6.6$'$}$$

Allora, se $T \in V'$ e se $u \in K_R = \{v \in K : |v|_V \leq R\}$, $R \in [0, \infty[$, è la soluzione di:

$$\ddot{a}(u, u - v) \leq \langle T, u - v\rangle \ \textit{ per ogni } \ v \in K_R \ \textit{ e} \tag{0.6.7}$$

$$u - u_s \in K, \quad s = 1, \dots, r, \tag{0.6.8}$$

ove u_s è la funzione associata ad u nel Lemma 1.1 di [2], con $\zeta = \varphi^{-1}(\frac{\delta}{2})$, si ha:

$$|u|_V \leq \theta |T|_{V'}, \tag{0.6.9}$$

con $\theta = \frac{2}{\delta}(2^{(1/\zeta)m(A)+1} - 1)$, ove $\delta = \min(\mu, \tau)$ se $K \subset H^{1,2}(A)$ oppure se A non è limitato, mentre $\delta = \mu$ se $K \subset H^{1,2}_o(A)$ ed A è limitato.

Dimostrazione. Si verifica come nel Teorema 1.3 di [2] che $u - u_s \in K_R$ e quindi per (0.6.7) si ha: $\ddot{a}(u, u_s) \leq \langle T, u_s \rangle$, $s = 1, \ldots, r$, da cui:

$$\begin{aligned}|T|_{V'}|u_s|_V &\geq |\langle T, u_s\rangle| \geq \ddot{a}(u, u_s) = \alpha(u_s, u_s) + \\ &+ \beta(u_1 + \ldots + u_s, u_s) + \gamma(u, u_s) \geq \\ &\geq \mu|\Delta u_s|^2_{2,A} + \tau|u_s|^2_{2,A} - \varphi\big(m(\operatorname{supp} \nabla u_s)\big)|u_s|^2_V - \\ &- \sum_{t=1}^{s-1} \varphi\big(m(\operatorname{supp} \nabla u_t)\big)|u_t|_V|u_s|_V,\end{aligned}$$

per (0.6.1) – (0.6.6) e (1.6), (1.7), (1.8) del Lemma 1.1 di [2] (Se A è limitato si usa (0.6.6′) in luogo di (0.6.6) e la disuguaglianza vale con $\tau = 0$). Si ottiene così:

$$|T|_{V'}|u_s|_V \geq \frac{\delta}{2}|u_s|^2_V - \frac{\delta}{2}\sum_{t=1}^{s-1}|u_t|_V|u_s|_V$$

per (1.5) del Lemma 1.1 di [2].
Allora:

$$|u_s|_V \leq \frac{2}{\delta}|T|_{V'} + \sum_{t=1}^{s-1}|u_t|_V \leq 2^{s-1}\frac{2}{\delta}|T|_{V'},$$

ove la seconda disuguaglianza si può dimostrare per induzione su s.
Usando ora la (1.9) del Lemma 1.1 di [2], segue:

$$|u|_V \leq \sum_{s=1}^{r}|u_s|_V \leq (2^r - 1)\frac{2}{\delta}|T|_{V'} \leq \theta|T|_{V'}.$$

Teorema 0.7. *Siano $\ddot{a}$, V, K, A come in* 0.6*, A limitato, esista $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $u \in V$:*

(0.7.1) $$\ddot{a}(u, u) + \lambda\langle u, u\rangle_{L^2(A)} \geq k|u|^2_{H^{1,2}(A)}, \quad k \in \mathbb{R}_+$$

e per ogni $v \in K$ si abbia $v - v_s \in K$, $s = 1, \ldots, r$, dove v_s sono le funzioni associate a v nel Lemma 1.1 di [2]; allora, se $T \in V'$, esiste una soluzione $u \in K$ di:

(0.7.2) $$\ddot{a}(u, u - v) \leq \langle T, u - v\rangle \qquad \text{per ogni } v \in K,$$

e per essa vale (0.6.9).

(Teorema 1.4 di [2]).

Teorema 0.8. *Siano* $\ddot{a}$, V, K, A *come in* 0.6*, per ogni* $v_1, v_2 \in K$ *e per ogni* $k \geq 0$ *si abbia:*

$$v_1 - (v_1 - v_2)^{(k)} \in K, \tag{0.8.1}$$

(ove $(v_1 - v_2)^{(k)}$ *è la funzione associata a* $v_1 - v_2$ *nel Lemma 1.1 di [2]), allora, se* $T \in V'$*, esiste al più una soluzione di* (0.7.2).

Dimostrazione. È la stessa del Teorema 3.1 di [2] salvo la scelta del k nel corso della dimostrazione. Nelle nostre ipotesi, se $u_1 \neq u_2$, u_i soluzioni di (0.7.2), $i = 1, 2$, sia $0 < 2k < |u_1 - u_2|_{\infty,A}$ e tale che $\varphi\big(m(A(\frac{u_1-u_2}{2}, k, \infty))\big) \leq \frac{\delta}{2}$, ove si intenda $|\ |_{\infty,A} = \infty$ se $u_1 - u_2 \notin L^\infty(A)$ e, se $v \in V$, $A(v, k, h) = \{x \in A : k \leq |v(x)| \leq h,\ \nabla v(x) \neq 0\}$. Tale scelta di k è possibile perchè φ è continua in 0 e $\varphi(0) = 0$.

1. Teorema di esistenza.

Nel corso di questo paragrafo determineremo l'esistenza di una soluzione $u \in M(u^\circ) \cap L^\infty(\Omega)$ di:

$$a(u, v - u) + l(u, v - u) \geq 0 \qquad \text{per ogni } v \in M(u^\circ), \tag{1.0.1}$$

ove a, definita in 0.3, soddisfa le condizioni (0.3.2) – (0.3.6) ed l, definito in 0.4, soddisfa la condizione (0.4.1).

Teorema 1.1. *Siano* $\Gamma^+, \Gamma^\circ, u^\circ$ *come in* 0.1*, a come in* 0.3*, l come in* 0.4*, allora, se* $w \in M(u^\circ)$*, definite:*

$$a_w(u, v) = \int_\Omega \Big\{ \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(\cdot, w)\partial_j u \partial_i v + \sum_{i=1}^n b_i(\cdot, w) v \partial_i u + \\ + \sum_{i=1}^n c_i(\cdot, w) u \partial_i v + d(\cdot, w) uv \Big\}\, dx, \tag{1.1.1}$$

$$l_w(v) = \int_\Omega \{\sum_{i=1}^n f_i(\cdot, w)\partial_i v\}\, dx, \tag{1.1.2}$$

se esiste $C_1 \in \mathbb{R}_+$, tale che valga:

$$\text{(1.1.3)} \qquad \int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n c_i(\cdot, w)\partial_i \varphi + d(\cdot, w)\varphi \Big\} \, dx \geq$$

$$\geq C_1 \int_\Omega \varphi \, dx \ \ \textit{per ogni} \ \ \varphi \in C^1(\Omega), \ \ \varphi \geq 0 \,,$$

esiste almeno una soluzione di:

$$\text{(1.1.4)} \qquad \begin{cases} a_w(u, v - u) + l_w(v - u) \geq 0 & \textit{per ogni} \ \ v \in M(u^\circ) \\ u \in M(u^\circ) \end{cases} .$$

Dimostrazione. Sia $K = \{v \in H^{1,2}(\Omega) : v = w - u^\circ, \ w \in M(u^\circ)\} = \{v \in H^{1,2}(\Omega) : v = 0 \text{ su } \Gamma^+, v \leq 0 \text{ su } \Gamma^\circ\}$, che risulta un insieme chiuso e convesso di $H^{1,2}(\Omega)$; vediamo che esiste almeno una soluzione di:

$$\text{(1.1.5)} \qquad \begin{cases} a_w(\psi, v - \psi) + a_w(u^\circ, v - \psi) + l_w(v - \psi) \geq 0 & \text{per ogni } v \in K \\ \psi \in K \end{cases}$$

Infatti se indichiamo con:

$$\alpha_w(u, v) = \int_\Omega \Big\{ \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(\cdot, w)\partial_j u \partial_i v \Big\} \, dx,$$

$$\beta_w(u, v) = \int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n [b_i(\cdot, w) - c_i(\cdot, w)] v \partial_i u \Big\} \, dx,$$

$$\gamma_w(u, v) = \int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n c_i(\cdot, w)[u\partial_i v + v\partial_i u] + d(\cdot, w)uv \Big\} \, dx,$$

tenendo conto che:

$$|\beta_w(u, v)| \leq$$

$$\leq S\Big[\int_{\operatorname{supp} \nabla u} \Big(\sum_{i=1}^n |b_i(\cdot, w) - c_i(\cdot, w)|^2 \Big)^{n/2} dx \Big]^{1/n} |v|_{H^{1,2}(\Omega)} |u|_{H^{1,2}(\Omega)},$$

ove S indica la costante di Sobolev, per a_w sono verificate le ipotesi (0.6.1) – (0.6.6) del Lemma 0.6, definendo:

$$\varphi\big(m(E)\big) = S\big(m(E)\big)^{1/n} =$$

$$= S\Big[\int_E \Big(\sum_{i=1}^n |b_i(\cdot, w) - c_i(\cdot, w)|^2 \Big)^{n/2} dx \Big]^{1/n} \ \ \text{per ogni} \ \ E \in \mathcal{L}.$$

Inoltre, con le stesse notazioni del Lemma 1.1 di [2], se $u \in K$, $r \in \mathbb{Z}_+$ ed $s = 1, \dots, r$ si ha che $u - u_s \in K$, per ogni $s = 1, \dots, r$.
Perciò per 0.7 esiste almeno una soluzione ψ di (1.1.4) in quanto per 0.5 vale (0.7.1) e, posto $\delta = \min(\nu, C_1)$, per essa vale:

$$|\psi|_{H^{1,2}(\Omega)} \leq \theta |T|_{V'} = \frac{2}{\delta}(2^{(1/\zeta)m(\Omega)+1} - 1)|T|_{V'},$$

essendo $\zeta = \varphi^{-1}(\frac{\delta}{2})$ e

$$T(v) = -a_w(u^\circ, v) - \int_\Omega \{\sum_{i=1}^n f_i(\cdot, w)\partial_i v\}\, dx.$$

Quindi se $n > 2$, $v \in H^{1,2}(\Omega)$, $|v|_{H^{1,2}(\Omega)} \leq 1$:

$$|T(v)| \leq |a_w(u^\circ, v)| + \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n |f_i(\cdot, w)|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^n |\partial_i v(\cdot)|^2\Big)^{1/2} dx \leq$$

$$\leq \eta n |\nabla u^\circ|_{2,\Omega} |\nabla v|_{2,\Omega} + \sqrt{n}|\rho|_{n,\Omega}|v|_{2^*,\Omega}|\nabla u^\circ|_{2,\Omega} + \sqrt{n}|\omega|_{n,\Omega}|u^\circ|_{2^*,\Omega}|\nabla v|_{2,\Omega} +$$

$$+ |\chi|_{n/2,\Omega}|u^\circ|_{2^*,\Omega}|v|_{2^*,\Omega} + \Big(\int_\Omega n(C_o(\cdot) + b_o|w|^{2/p})^2\, dx\Big)^{1/2}|v|_{H^{1,2}(\Omega)} \leq$$

$$\leq |v|_{H^{1,2}(\Omega)}\big[|u^\circ|_{H^{1,2}(\Omega)}\{\eta n + S\sqrt{n}|\rho|_{n,\Omega} + \sqrt{n}|\omega|_{n,\Omega} + S^2|\chi|_{n/2,\Omega}\} +$$

$$+ \sqrt{n}|C_o|_{2,\Omega} + \sqrt{n} b_o |w|^{2/p}_{2^*,\Omega}|\Omega|^{[n(p-2)+4]/2np}\big]$$

da cui:

$$|T|_{V'} \leq |u^\circ|_{H^{1,2}(\Omega)}\{\eta n + S(\sqrt{n}|\rho|_{n,\Omega} + \sqrt{n}|\omega|_{n,\Omega} + S|\chi|_{n/2,\Omega})\} +$$

$$+ \sqrt{n}(|C_o|_{2,\Omega} + b_o|w|^{2/p}_{2^*,\Omega}|\Omega|^{[n(p-2)+4]/2np}).$$

Se ora $\xi \in M(u^\circ)$, poiché $\xi - u^\circ \in K$, posto $u = \psi - u^\circ \in M(u^\circ)$, da (1.1.5) segue:

$$a_w(u, \xi - u) + l_w(\xi - u) \geq 0 \qquad \text{per ogni } \xi \in M(u^\circ).$$

Abbiamo quindi trovato almeno una soluzione u di (1.1.4) per cui vale:

$$(1.1.6)\quad |u|_{H^{1,2}(\Omega)} \leq \frac{2}{\delta}(2^{(1/\zeta)m(\Omega)+1} - 1)\big[|u^\circ|_{H^{1,2}(\Omega)}\{\eta n + S(\sqrt{n}|\rho|_{n,\Omega} +$$

$$+\sqrt{n}|\omega|_{n,\Omega} + S|\chi|_{n/2,\Omega})\} + \sqrt{n}(|C_o|_{2,\Omega} + b_o|w|^{2/p}_{2^*,\Omega}|\Omega|^{[n(p-2)+4]/2np})\big] + |u^\circ|_{H^{1,2}(\Omega)}.$$

Teorema 1.2. *Sotto le stesse ipotesi di* 1.1 *la soluzione di* (1.1.4) *è unica.*

Dimostrazione. Per ogni $k \geq 0$, se $v_1, v_2 \in K$, insieme definito in 1.1, con le notazioni di 0.8, si ha: $v_1 - (v_1 - v_2)^{(k)} \in K$, allora per 0.8 esiste al piú una soluzione ψ di (1.1.5), da cui si ha l'unicità della soluzione u di (1.1.4).

Definizione 1.3. Sia a una forma bilineare continua su uno spazio di Banach separabile B, diciamo che a è pseudomonotona se per ogni successione $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ con $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset B$, $v_i \rightharpoonup 0$ e tale che $\limsup_i a(v_i, v_i) \leq 0$, si ha $\lim_i a(v_i, v_i) = 0$.

Teorema 1.4. *Siano* Γ^+, u° *come in* 0.1, $\operatorname{mis}\Gamma^+ \neq 0$, $V = \{u \in H^{1,2}(\Omega) : u = 0 \text{ su } \Gamma^+\}$, $w \in M(u^\circ)$, a_w *come in* (1.1.1) *e valga* (1.1.3)*, allora* a_w *è pseudomonotona in* V.

Dimostrazione. Sia $w \in M(u^\circ)$. Per le ipotesi (0.3.4), (0.3.5), (0.3.6) e per il Lemma 3.1 di [6], per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $b_i', c_i', d' \in L^\infty(\Omega)$, $b_i'', c_i'' \in L^n(\Omega)$, $d'' \in L^{n/2}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, tali che per q.o. $x \in \Omega$, $b_i(x, w) = b_i'(x, w) + b_i''(x, w)$, $c_i(x, w) = c_i'(x, w) + c_i''(x, w)$, $d(x, w) = d'(x, w) + d''(x, w)$ con $|b_i''|_{n,\Omega} < \varepsilon$, $|c_i''|_{n,\Omega} < \varepsilon$, $|d''|_{n/2,\Omega} < \varepsilon$, e $\sup|b_i'| < k(\varepsilon)$, $\sup|c_i'| < h(\varepsilon)$, $\sup|d'| < j(\varepsilon)$, per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, essendo $k, h, j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.
Consideriamo quindi per ogni $u, v \in V$ le forme bilineari:

$$a_w'(u, v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n b_i'(\cdot, w) v \partial_i u + \sum_{i=1}^n c_i'(\cdot, w) u \partial_i v + d'(\cdot, w) uv \right\} dx$$

e

$$a_w''(u, v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(\cdot, w) \partial_j u \partial_i v + \sum_{i=1}^n b_i''(\cdot, w) v \partial_i u + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^n c_i''(\cdot, w) u \partial_i v + d''(\cdot, w) uv \right\} dx,$$

si ha che per ε abbastanza piccolo, per il Teorema 3.1 di [6], a_w'' risulta coerciva, $a_w(u, v) = a_w'(u, v) + a_w''(u, v)$ ed inoltre:

$$|a_w'(v, v)| \leq [k(\varepsilon) + h(\varepsilon) + j(\varepsilon)] |v|_{2,\Omega} |v|_{H^{1,2}(\Omega)}.$$

Perciò per il Teorema 2.3 di [2] si ha la tesi.

Teorema 1.5. *Siano* Γ^+, Γ°, u° *come in* 0.1, a *come in* 0.3, l *come in* 0.4 *e valga* (1.1.3). *Sia inoltre* $\Phi : M(u^\circ) \to M(u^\circ)$ *l'applicazione che a* $w \in M(u^\circ)$ *associa la soluzione* u_w *del problema* (1.1.4). *Allora, se* $A \subset M(u^\circ)$, *è un insieme limitato in* $H^{1,2}(\Omega)$, $\Phi(A)$ *risulta limitato.*

Dimostrazione. Sia $A \subset M(u^\circ)$ limitato in $H^{1,2}(\Omega)$; per (1.1.6) segue la limitatezza di $\Phi(A)$ e quindi la tesi.

Teorema 1.6. *Siano* Γ^+, Γ°, u° *come in* 0.1, a *come in* 0.3, l *come in* 0.4, mis $\Gamma^+ \neq 0$ *e valga* (1.1.3). *Sia inoltre* Φ *come in* 1.5 *e* $(w_h)_{h\in\mathbb{N}}$ *una successione in* $M(u^\circ)$, $w_h \rightharpoonup w \in M(u^\circ)$ *in* $H^{1,2}(\Omega)$*, allora esiste un'estratta di* $\Phi(w_h)$*, che continueremo ad indicare con* $\Phi(w_h)$*, tale che:*

$$\Phi(w_h) \rightharpoonup \Phi(w) \quad in \ \ H^{1,2}(\Omega) \tag{1.6.1}$$

$$\Phi(w_h) \to \Phi(w) \quad q.o. \ in \ \ \Omega.$$

Dimostrazione. Per definizione di $\Phi(w_h)$ e da (1.1.6) segue che $\Phi(w_h)$ è limitata in $H^{1,2}(\Omega)$, quindi a meno di un'estratta si ha:

$$\begin{aligned} w_h &\to w \ \text{ q.o. in } \ \Omega, \\ \Phi(w_h) &\rightharpoonup \zeta \ \text{ in } \ H^{1,2}(\Omega), \\ \Phi(w_h) &\to \zeta \text{ q.o. in } \Omega, \\ \partial_i \Phi(w_h) &\to \partial_i \zeta \ \text{ q.o. in } \ \Omega, \ (i = 1, \dots, n), \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

con $\zeta \in M(u^\circ)$ per l'Osservazione 0.2.
Ma $\Phi(w_h)$ risolve: $a_{w_h}(\Phi(w_h), v - \Phi(w_h)) + l_{w_h}(v - \Phi(w_h)) \geq 0$ per ogni $v \in M(u^\circ)$, quindi, scegliendo come funzione test ζ, si ha:

$$a_{w_h}(\Phi(w_h), \Phi(w_h) - \zeta) \leq l_{w_h}(\zeta - \Phi(w_h)). \tag{1.6.3}$$

Tenendo ora conto di (1.6.2), (0.4.1) ed utilizzando il teorema di convergenza dominata si ottiene che: $l_{w_h}(\zeta - \Phi(w_h)) \to 0$, quindi, sfruttando (1.6.3), si ha:

$$\limsup_h a_{w_h}(\Phi(w_h), \Phi(w_h) - \zeta) \leq 0. \tag{1.6.4}$$

Ricordando che l'immersione da $H^{1,2}(\Omega)$ in $\mathrm{L}^{2^*}(\Omega)$ è lineare e continua, per (0.3.3) – (0.3.6), per (1.6.2) e per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue si ha:

$$\lim a_{w_h}(\zeta, \Phi(w_h) - \zeta) = 0. \tag{1.6.5}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} &\limsup_h \ a_{w_h}(\Phi(w_h) - \zeta, \Phi(w_h) - \zeta) = \\ &\quad = \limsup_h \big[a_{w_h}(\Phi(w_h), \Phi(w_h) - \zeta) - a_{w_h}(\zeta, \Phi(w_h) - \zeta)\big] \leq 0, \end{aligned}$$

ma per 1.4, a_{w_h} è pseudomonotona in $V = \{v \in H^{1,2}(\Omega) : v = 0 \text{ su } \Gamma^+\}$ e poiché $\Phi(w_h) - \zeta \in V$ si ha:

$$\lim a_{w_h}(\Phi(w_h) - \zeta, \Phi(w_h) - \zeta) = 0. \tag{1.6.6}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}&\liminf_h a_{w_h}(\Phi(w_h), \Phi(w_h) - \zeta) = \\ &\quad = \liminf_h \big[a_{w_h}(\Phi(w_h) - \zeta, \Phi(w_h) - \zeta) + a_{w_h}(\zeta, \Phi(w_h) - \zeta)\big] = 0\end{aligned}$$

per (1.6.5) e (1.6.6). Da ciò, tenendo conto di (1.6.4), segue che:

$$\lim a_{w_h}(\Phi(w_h), \Phi(w_h) - \zeta) = 0. \tag{1.6.7}$$

Per $v \in M(u^\circ)$, valutiamo infine:

$$\begin{aligned}&a_w(\zeta, v - \zeta) = \lim\, a_{w_h}(\Phi(w_h), v - \zeta) = \lim\, a_{w_h}(\Phi(w_h), v - \Phi(w_h)) + \\ &+ \lim a_{w_h}(\Phi(w_h), \Phi(w_h) - \zeta) \geq \lim \Big\{ - \int_\Omega \sum_{i=1}^n f_i(\cdot, w_h)\partial_i(v - \Phi(w_h))\, dx \Big\} + \\ &\qquad + \lim a_{w_h}(\Phi(w_h), \Phi(w_h) - \zeta) = - \int_\Omega \sum_{i=1}^n f_i(\cdot, w)\partial_i(v - \zeta)\, dx,\end{aligned}$$

osservando che la prima uguaglianza si ottiene con considerazioni analoghe a quelle fatte per ottenere (1.6.5), ed avendo sfruttato (1.6.7) ed il teorema di convergenza dominata.
Allora $\zeta \in M(u^\circ)$ verifica: $a_w(\zeta, v-\zeta)+l_w(v-\zeta) \geq 0$, ma, per 1.2, la soluzione di (1.1.4) è unica e, tenendo conto della definizione di Φ, si ha: $\zeta = \Phi(w)$, cioè la tesi.

Lemma 1.7. *Sia* Γ^+ *come in* 0.1*,* mis $\Gamma^+ \neq 0$*,* $w \in M(u^\circ)$*,* a_w *come in* (1.1.1)*,* l_w *come in* (1.1.2) *e valga* (1.1.3)*. Allora il problema:*

$$\begin{cases} a_w(v_o, \varphi) = -l_w(\varphi) \ \ \textit{per ogni} \ \ \varphi \in H^{1,2}(\Omega), \ \varphi = 0 \ \ \textit{su} \ \ \Gamma^+ \\ v_o = 0 \ \ \textit{su} \ \ \Gamma^+ \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(\cdot, w)\partial_i v_o \cos(\upsilon, x_j) + \\ \qquad + \sum_{i=1}^n c_i(\cdot, w)\cos(\upsilon, x_i) v_o = 0 \ \ \textit{su} \ \ \partial\Omega \setminus \Gamma^+ \end{cases} \tag{1.7.1}$$

ove υ *è il versore della normale a* $\partial\Omega$ *orientata verso l'esterno, ammette una ed una sola soluzione* $v_o \in H^{1,2}(\Omega)$ *tale che:* $v_o \in L^\infty(\Omega)$*.*

Dimostrazione. L'esistenza e l'unicità della soluzione del problema (1.7.1) segue dal Teorema 2.1 di [3], scegliendo $h = 0$, $e = \sum_{i=1}^{n} c_i(\cdot, w)\cos(\upsilon, x_i)$. Siano ora v_{os} e k_s ($s = 1, \dots, r$, $r \in \mathbb{N}$) rispettivamente la funzione associata a v_o ed i numeri reali non nulli come nel Lemma 1.1 di [2] e V come in 1.4; si ha: $v_o - v_{o1} = (v_o \wedge k_1) \vee (-k_1)$, mentre per $s = 2, \dots, r$:

$$v_o - v_{os} = \begin{cases} -k_{s-1} + k_s + v_o & \text{se } k_{s-1} < v_o \\ k_s & \text{se } k_s < v_o \le k_{s-1} \\ v_o & \text{se } -k_s \le v_o \le k_s \\ -k_s & \text{se } -k_{s-1} \le v_o \le -k_s \\ v_o - k_s + k_{s-1} & \text{se } v_o < -k_{s-1}. \end{cases}$$

Allora $v_o - v_{os} \in V$ per $s = 1, \dots, r$, da cui segue per 0.6 l'esistenza di $\zeta(\nu \wedge C_1) \in]0, \infty[$ tale che:

$$|v_o|_{H^{1,2}(\Omega)} \le \theta\sqrt{n}(|C_o|_{2,\Omega} + b_o|w|^{2/p}_{2^*,\Omega}|\Omega|^{[n(p-2)+4]/2np}), \tag{1.7.2}$$

con

$$\theta = \frac{2}{(\nu \wedge C_1)}(2^{[\zeta(\nu\wedge C_1)]^{-1}\mathrm{m}(\Omega)+1} - 1).$$

Sia ora $k > 0$. Posto $v_k = (\operatorname{sgn} v_o)\max\{|v_o| - k, 0\}$, risulta $v_k \in V$, da cui, definendo $E(k) = \{x \in \overline{\Omega} : |v_o(x)| \ge k\}$ e $\Omega(k) = \Omega \cap E(k)$, per (1.7.1), tenendo conto che $v_k = 0$ in $\Omega \setminus \Omega(k)$, si ha:

$$-\int_{\Omega(k)} \sum_{i=1}^{n} f_i(\cdot, w)\partial_i v_k\, dx = \int_{\Omega(k)} \Big\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(\cdot, w)\partial_j v_k \partial_i v_k +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(\cdot, w)v_k\partial_i v_k + \sum_{i=1}^{n} c_i(\cdot, w)v_k\partial_i v_k + d(\cdot, w)v_k^2\Big\}\, dx +$$

$$+ k\int_{\Omega(k)} (\operatorname{sgn} v_o)\Big\{\sum_{i=1}^{n} c_i(\cdot, w)\partial_i v_k + d(\cdot, w)v_k\Big\}\, dx \ge$$

$$\ge \int_{\Omega(k)} \Big\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(\cdot, w)\partial_j v_k\partial_i v_k + \sum_{i=1}^{n}[b_i(\cdot, w) - c_i(\cdot, w)]v_k\partial_i v_k + C_1 v_k^2\Big\}\, dx,$$

avendo sfruttato (1.1.3) ed il fatto che $(\operatorname{sgn} v_o)v_k$ è non negativo su Ω. Quindi:

$$-\int_{\Omega(k)} \sum_{i=1}^{n} f_i(\cdot, w)\partial_i v_k\, dx \ge$$

$$\ge \Big[\min(\nu, C_1) - S\Big|\sum_{i=1}^{n}(b_i(\cdot, w) - c_i(\cdot, w))\Big|_{n,\Omega(k)}\Big]|v_k|^2_{H^{1,2}(\Omega)}.$$

Osserviamo che per la diseguaglianza di Tchebychev e per (1.7.2):

$$|\Omega(k)| \leq \frac{|v_o|^2_{2,\Omega(k)}}{k^2} \leq \frac{\theta^2 n(\,|C_o|_{2,\Omega} + b_o|w|^{2/p}_{2^*,\Omega}|\Omega|^{[n(p-2)+4]/2np})^2}{k^2}\ ,$$

perciò la funzione $k \mapsto |\Omega(k)|$ è monotona non crescente e $\lim_{k\to\infty} |\Omega(k)| = 0$.
Esiste allora $k_o \geq 0$ tale che

$$\begin{aligned}\min(\nu, C_1) - S\Big|\sum_{i=1}^{n}(b_i(\cdot, w) - c_i(\cdot, w))\Big|_{n,\Omega(k)} &\geq \\ &\geq \min(\nu, C_1) - Sn(|\rho|_{n,\Omega(k)} + |\omega|_{n,\Omega(k)}) > 0\end{aligned}$$

per ogni $k \geq k_o$.
Si ha quindi:

$$\begin{aligned}\Big(\int_{\Omega(k)} \sum_{i=1}^{n} |f_i(\cdot, w)|^2\, dx\Big)^{1/2} &\geq \\ &\geq [\min(\nu, C_1) - Sn(|\rho|_{n,\Omega(k_o)} + |\omega|_{n,\Omega(k_o)})]|v_k|_{H^{1,2}(\Omega)},\end{aligned}$$

da cui:

$$|v_k|_{H^{1,2}(\Omega)} \leq \frac{(\int_{\Omega(k)} \sum_{i=1}^{n} |f_i(\cdot, w)|^2 dx)^{1/2}}{\min(\nu, C_1) - Sn(|\rho|_{n,\Omega(k_o)} + |\omega|_{n,\Omega(k_o)})}. \tag{1.7.3}$$

Ora per ogni $h > k \geq k_o$:

$$\begin{aligned}(h-k)|\Omega(h)|^{1/2^*} &= \Big(\int_{\Omega(h)} (h-k)^{2^*}\, dx\Big)^{1/2^*} = |h-k|_{2^*,\Omega(h)} \leq \\ &\leq \Big(\int_{\Omega(h)} |v_k|^{2^*}\, dx\Big)^{1/2^*} \leq \Big(\int_{\Omega(k)} |v_k|^{2^*} dx\Big)^{1/2^*},\end{aligned}$$

in quanto su $\Omega(h)$ si ha $|v_k| = |v_o| - k \geq h - k$. Allora, tenendo conto di (1.7.3):

$$\begin{aligned}|\Omega(h)|^{1/2^*} &\leq (h-k)^{-1}|v_k|_{2^*,\Omega(k)} \leq (h-k)^{-1} S|v_k|_{H^{1,2}(\Omega)} \leq \\ &\leq \frac{(h-k)^{-1} S\sqrt{n}(|C_o|_{np/(n-2),\Omega} + b_o|w|^{2/p}_{2^*,\Omega})|\Omega(k)|^{[n(p-2)+4]/2np}}{\min(\nu, C_1) - Sn(|\rho|_{n,\Omega(k_o)} + |\omega|_{n,\Omega(k_o)})}\ ,\end{aligned}$$

cioè:

$$|\Omega(h)| \leq \left[\frac{\sqrt{n} S(|C_o|_{np/(n-2),\Omega} + b_o |w|^{2/p}_{2^*,\Omega})}{\min(\nu, C_1) - Sn(|\rho|_{n,\Omega(k_o)} + |\omega|_{n,\Omega(k_o)})} \right]^{2^*} \cdot$$

$$\cdot (h-k)^{-2^*} |\Omega(k)|^{2^*[n(p-2)+4]/2np}.$$

Per [7] ed [8], poiché $\varpi = \frac{2^*[n(p-2)+4]}{2np} > 1$, si ha: $|\Omega(k_o + \varsigma_w)| = 0$, essendo

$$\varsigma_w = \left[\frac{\sqrt{n} S(|C_o|_{np/(n-2),\Omega} + b_o |w|^{2/p}_{2^*,\Omega})}{\min(\nu, C_1) - Sn(|\rho|_{n,\Omega(k_o)} + |\omega|_{n,\Omega(k_o)})} \right] |\Omega(k_o)|^{(\varpi-1)/2^*} 2^{\varpi/(\varpi-1)}$$

da cui:

$$v_o \in L^\infty(\Omega) \ \text{ e } \ |v_o|_{\infty,\Omega} \leq k_o + \varsigma_w.$$

Teorema 1.8. *Siano* Γ^+, Γ°, u° *come in* 0.1, $\text{mis}\,\Gamma^+ \neq 0$, $V = \{u \in H^{1,2}(\Omega) : u = 0$ *su* $\Gamma^+\}$, $w \in M(u^\circ)$, a_w *come in* (1.1.1), *tale che* $a_w(u,u) \geq 0$ *per ogni* $u \in V$ *e, se* $a_w(u,u) = 0$, *allora* $\nabla u = 0$, l_w *come in* (1.1.2) *e valga* (1.1.3). *Allora la soluzione* u_w *del problema* (1.1.4) *è tale che:*

$$u_w \in L^\infty(\Omega).$$

Dimostrazione. Siano v_o la soluzione di (1.7.1) e $v_1 = v_o + \operatorname{ess\,inf}_\Omega (u^\circ - v_o)$. Sia inoltre $\operatorname{ess\,inf}_\Omega (u^\circ - v_o) \leq 0$. Poiché $v_1 \leq u^\circ$, se $v = v_1 \vee u_w$, allora $v \in M(u^\circ)$, quindi può essere utilizzata come funzione test in (1.1.4) ottenendo:

$$(1.8.1) \qquad 0 \leq a_w(u_w, (v_1 - u_w) \vee 0) + l_w((v_1 - u_w) \vee 0) =$$
$$= -a_w((v_1 - u_w) \vee 0, (v_1 - u_w) \vee 0) + a_w(v_1, (v_1 - u_w) \vee 0) + l_w((v_1 - u_w) \vee 0) =$$
$$= -a_w((v_1 - u_w) \vee 0, (v_1 - u_w) \vee 0) +$$
$$+ \int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n c_i(\cdot, w) \operatorname{ess\,inf}_\Omega (u^\circ - v_o) \partial_i ((v_1 - u_w) \vee 0) +$$
$$+ d(\cdot, w) \operatorname{ess\,inf}_\Omega (u^\circ - v_o)((v_1 - u_w) \vee 0) \Big\} dx,$$

avendo tenuto conto del fatto che $(v_1 - u_w) \vee 0 \in V$ e che, per (1.7.1),

$$a_w(v_o, (v_1 - u_w) \vee 0) + l_w((v_1 - u_w) \vee 0) = 0.$$

Poiché

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^{n} c_i(\cdot, w) \operatorname*{ess\,inf}_\Omega (u^\circ - v_o) \partial_i((v_1 - u_w) \vee 0) + \\ + d(\cdot, w) \operatorname*{ess\,inf}_\Omega (u^\circ - v_o)((v_1 - u_w) \vee 0) \Big\} \, dx \le 0$$

da (1.8.1) segue: $a_w((v_1 - u_w) \vee 0, (v_1 - u_w) \vee 0) = 0$, quindi $\nabla((v_1 - u_w) \vee 0) = 0$, da cui:

$$u_w \ge \operatorname*{ess\,inf}_\Omega -u^\circ - 2|v_o|_{\infty,\Omega}. \tag{1.8.2}$$

Se $\operatorname*{ess\,inf}_\Omega (u^\circ - v_o) > 0$, allora la traccia di u° è non negativa su Γ^+, quindi $v = v_o \vee u_w \in M(u^\circ)$ può essere utilizzata come funzione test in (1.1.4), ottenendo, grazie a (1.7.1),

$$0 \le a_w(u_w, (v_o - u_w) \vee 0) + l_w((v_o - u_w) \vee 0) = \\ = -a_w((v_o - u_w) \vee 0, (v_o - u_w) \vee 0),$$

perciò $\nabla((v_o - u_w) \vee 0) = 0$ e quindi

$$u_w \ge -|v_o|_{\infty,\Omega}. \tag{1.8.3}$$

Sia ora $v_2 = v_o + \operatorname*{ess\,sup}_\Omega (u^\circ - v_o)$ e supponiamo $\operatorname*{ess\,sup}_\Omega (u^\circ - v_o) \ge 0$. Poiché $v_2 \ge u^\circ$, considerata $\varphi = v_2 \wedge u_w \in M(u^\circ)$, da (1.1.4), grazie a (1.7.1), segue:

$$0 \le a_w(u_w, (v_2 - u_w) \wedge 0) + l_w((v_2 - u_w) \wedge 0) = \\ = -a_w((v_2 - u_w) \wedge 0, (v_2 - u_w) \wedge 0) + \\ + \int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^{n} c_i(\cdot, w) \operatorname*{ess\,sup}_\Omega (u^\circ - v_o) \partial_i((v_2 - u_w) \wedge 0) + \\ + d(\cdot, w) \operatorname*{ess\,sup}_\Omega (u^\circ - v_o)((v_2 - u_w) \wedge 0) \Big\} \, dx.$$

Ma, poiché $\operatorname*{ess\,sup}_\Omega (u^\circ - v_o) \ge 0$ e $(v_2 - u_w) \wedge 0 \le 0$, per (1.1.3) si ottiene:

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^{n} c_i(\cdot, w) \operatorname*{ess\,sup}_\Omega (u^\circ - v_o) \partial_i((v_2 - u_w) \wedge 0) + \\ + d(\cdot, w) \operatorname*{ess\,sup}_\Omega (u^\circ - v_o)((v_2 - u_w) \wedge 0) \Big\} \, dx \le 0$$

per cui: $a_w((v_2 - u_w) \wedge 0, (v_2 - u_w) \wedge 0) = 0$. Allora:

$$u_w \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u^\circ + 2|v_o|_{\infty,\Omega}. \tag{1.8.4}$$

Se $\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}(u^\circ - v_o) < 0$, allora $u^\circ \leq 0$ su Γ^+, e $v = v_o \wedge u_w \in M(u^\circ)$ si può utilizzare come funzione test in (1.1.4), ottenendo:

$$0 \leq a_w(u_w, (v_o - u_w) \wedge 0) + l_w((v_o - u_w) \wedge 0) = -a_w((v_o - u_w) \wedge 0, (v_o - u_w) \wedge 0),$$

perció $(v_o - u_w) \wedge 0 = 0$ q.o. in Ω e quindi

$$u_w \leq |v_o|_{\infty,\Omega}. \tag{1.8.5}$$

Tenendo conto di (1.8.2) – (1.8.5) allora:

$$\begin{aligned} &u_w \in L^\infty(\Omega) \\ &|u_w|_{\infty,\Omega} \leq |u^\circ|_{\infty,\Omega} + 2(k_o + \varsigma_w), \end{aligned} \tag{1.8.6}$$

con $k_o, \varsigma_w \in \mathbb{R}_+$ come in 1.7.

Teorema 1.9. *Siano* Γ^+, Γ°, u° *come in* 0.1, mis $\Gamma^+ \neq 0$, *a come in* 0.3, *l come in* 0.4 *e valga* (1.1.3). *Siano inoltre* Φ *come in* 1.5, V *come in* 1.8, $(w_h)_{h\in\mathbb{N}}$ *una successione in* $M(u^\circ)$, $w_h \rightharpoonup w \in M(u^\circ)$ *in* $H^{1,2}(\Omega)$, a_{w_h} *ed* a_w *come in* (1.1.1), *tali che* $a_{w_h}(u,u) \geq 0$, $a_w(u,u) \geq 0$ *per ogni* $u \in V$ *e, se* $a_{w_h}(u,u) = 0$ *o* $a_w(u,u) = 0$, *allora* $\nabla u = 0$. *Sotto queste ipotesi esiste un'estratta di* $\Phi(w_h)$, *che continueremo ad indicare con* $\Phi(w_h)$, *tale che:*

$$\Phi(w_h) \to \Phi(w) \text{ in } H^{1,2}(\Omega). \tag{1.9.1}$$

Dimostrazione. Per definizione di Φ, $\Phi(w_h) = u_{w_h}$ e $\Phi(w) = u_w$ sono le soluzioni del problema (1.1.4) rispettivamente associate ad a_{w_h} e l_{w_h} ed a_w e l_w. Sia perciò $\bar{u}_h = u_{w_h} - u_w \in H^{1,2}(\Omega)$; allora $\bar{u}_h = 0$ su Γ^+, per 1.8 $\bar{u}_h \in L^\infty(\Omega)$ per ogni $h \in \mathbb{N}$, per 1.6, a meno di un'estratta, $\bar{u}_h \rightharpoonup 0$ in $H^{1,2}(\Omega)$ e $\bar{u} \to 0$ q.o. in Ω.
Notiamo che, essendo $(|w_h|_{H^{1,2}(\Omega)})_{h\in\mathbb{N}}$ limitata, allora risulta limitata anche $(|w_h|_{2^*,\Omega})_{h\in\mathbb{N}}$, quindi $(\varsigma_{w_h})_{h\in\mathbb{N}}$ è limitata e, per (1.8.6), $(|\bar{u}_h|_{\infty,\Omega})_{h\in\mathbb{N}}$ è limitata.
Consideriamo ora:

$$v_h = \{1 - C\exp(\bar{u}_h)^2\}u_{w_h} + C\exp(\bar{u}_h)^2 u_w$$

con $C \in \mathbb{R}_+$ tale che $0 < C \exp(\bar{u}_h)^2 \leq 1$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. (Ciò è possibile in quanto $(|\bar{u}_h|_{\infty,\Omega})_{h\in\mathbb{N}}$ è limitata.)
Poiché $v_h \in M(u^\circ)$, può essere utilizzata come funzione test nel problema (1.1.4) associato a $w_h \in M(u^\circ)$. Allora, dopo aver svolto alcuni conti, si ottiene:

$$a_{w_h}(\bar{u}_h, \exp(\bar{u}_h)^2\bar{u}_h) \leq -l_{w_h}(\exp(\bar{u}_h)^2\bar{u}_h) - a_{w_h}(u_w, \exp(\bar{u}_h)^2\bar{u}_h). \tag{1.9.2}$$

Ma, sfruttando (0.3.2):

$$\begin{aligned} a_{w_h}(\bar{u}_h, \exp(\bar{u}_h)^2\bar{u}_h) \geq \nu \int_\Omega \exp(\bar{u}_h)^2|\nabla\bar{u}_h|^2\,dx + \\ + 2\nu\int_\Omega \exp(\bar{u}_h)^2(\bar{u}_h)^2|\nabla\bar{u}_h|^2\,dx + \int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n b_i(\cdot, w_h)\exp(\bar{u}_h)^2\bar{u}_h\partial_i\bar{u}_h + \\ + \sum_{i=1}^n c_i(\cdot, w_h)\exp(\bar{u}_h)^2\bar{u}_h[1+2(\bar{u}_h)^2]\partial_i\bar{u}_h + d(\cdot, w_h)\exp(\bar{u}_h)^2(\bar{u}_h)^2\Big\}dx, \end{aligned} \tag{1.9.3}$$

mentre, per (0.4.1), si ha:

$$\begin{aligned} -l_{w_h}(\exp(\bar{u}_h)^2\bar{u}_h) - a_{w_h}(u_w, \exp(\bar{u}_h)^2\bar{u}_h) \leq \\ -\int_\Omega \sum_{i=1}^n f_i(\cdot, w_h)\exp(\bar{u}_h)^2\partial_i\bar{u}_h\,dx + \\ + 2\int_\Omega n[C_o(\cdot) + b_o|w_h|^{2/p}](\bar{u}_h)^2\exp(\bar{u}_h)^2|\nabla\bar{u}_h|\,dx + \\ - \int_\Omega \Big\{ \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(\cdot, w_h)\exp(\bar{u}_h)^2[1+2(\bar{u}_h)^2]\partial_j u_w\partial_i\bar{u}_h + \\ + \sum_{i=1}^n b_i(\cdot, w_h)\exp(\bar{u}_h)^2\bar{u}_h\partial_i u_w + \\ + \sum_{i=1}^n c_i(\cdot, w_h)\exp(\bar{u}_h)^2[1+2(\bar{u}_h)^2]u_w\partial_i\bar{u}_h + d(\cdot, w_h)\exp(\bar{u}_h)^2(\bar{u}_h)u_w\Big\}dx. \end{aligned} \tag{1.9.4}$$

Tenendo ora conto che $2ab \leq a^2 + b^2$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e, considerando

$$a = \Big(\frac{\exp(\bar{u}_h)^2}{n}\Big)^{1/2}\sqrt{\nu}|\bar{u}_h||\nabla\bar{u}_h|\ ,\ b = \Big(n\frac{\exp(\bar{u}_h)^2}{\nu}\Big)^{1/2}|\bar{u}_h|[C_o(\cdot)+b_o|w_h|^{2/p}],$$

si ottiene:

$$(1.9.5)\qquad \int_\Omega 2[C_o(\cdot)+b_o|w_h|^{2/p}](\bar u_h)^2\exp(\bar u_h)^2|\nabla\bar u_h|\,dx \le$$

$$\le \int_\Omega \frac{\nu}{n}(\bar u_h)^2\exp(\bar u_h)^2|\nabla\bar u_h|^2\,dx+\int_\Omega \frac{n}{\nu}[C_o(\cdot)+b_o|w_h|^{2/p}]^2\exp(\bar u_h)^2(\bar u_h)^2\,dx.$$

Utilizzando a questo punto (1.9.2) – (1.9.5) segue che:

$$(1.9.6)\qquad \nu\int_\Omega \exp(\bar u_h)^2|\nabla\bar u_h|^2dx+2\nu\int_\Omega \exp(\bar u_h)^2(\bar u_h)^2|\nabla\bar u_h|^2\,dx+$$

$$+\int_\Omega\Big\{\sum_{i=1}^n b_i(\cdot,w_h)\exp(\bar u_h)^2\bar u_h\partial_i\bar u_h+\sum_{i=1}^n c_i(\cdot,w_h)\exp(\bar u_h)^2[1+2(\bar u_h)^2]\bar u_h\partial_i\bar u_h+$$

$$+d(\cdot,w_h)\exp(\bar u_h)^2(\bar u_h)^2\}\,dx\le-\int_\Omega\sum_{i=1}^n f_i(\cdot,w_h)\exp(\bar u_h)^2\partial_i\bar u_h\,dx+$$

$$+\int_\Omega \nu(\bar u_h)^2\exp(\bar u_h)^2|\nabla\bar u_h|^2\,dx+\int_\Omega\frac{2n^2}{\nu}[C_o^2(\cdot)+b_o^2|w_h|^{4/p}]\exp(\bar u_h)^2(\bar u_h)^2\,dx+$$

$$-\int_\Omega\Big\{\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(\cdot,w_h)\exp(\bar u_h)^2[1+2(\bar u_h)^2]\partial_j u_w\partial_i\bar u_h+$$

$$+\sum_{i=1}^n b_i(\cdot,w_h)\exp(\bar u_h)^2\bar u_h\partial_i u_w+$$

$$+\sum_{i=1}^n c_i(\cdot,w_h)\exp(\bar u_h)^2[1+2(\bar u_h)^2]u_w\partial_i\bar u_h+d(\cdot,w_h)\exp(\bar u_h)^2(\bar u_h)u_w\Big\}dx.$$

Da cui:

$$(1.9.7)\qquad \nu\int_\Omega \exp(\bar u_h)^2|\nabla\bar u_h|^2\,dx+\nu\int_\Omega\exp(\bar u_h)^2(\bar u_h)^2|\nabla\bar u_h|^2\,dx\le$$

$$\le-\int_\Omega\Big\{\sum_{i=1}^n f_i(\cdot,w_h)\exp(\bar u_h)^2\partial_i\bar u_h+$$

$$+\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(\cdot,w_h)\exp(\bar u_h)^2[1+2(\bar u_h)^2]\partial_j u_w\partial_i\bar u_h+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} b_i(\cdot, w_h)\exp(\bar{u}_h)^2\bar{u}_h\partial_i u_{w_h} + \sum_{i=1}^{n} c_i(\cdot, w_h)\exp(\bar{u}_h)^2[1+2(\bar{u}_h)^2]u_{w_h}\partial_i\bar{u}_h +$$
$$+ d(\cdot, w_h)\exp(\bar{u}_h)^2\bar{u}_h u_w + \big(d(\cdot, w_h) -$$
$$- \frac{2n^2}{\nu}[C_o^2(\cdot) + b_o^2|w_h|^{4/p}]\big)\exp(\bar{u}_h)^2(\bar{u}_h)^2\Big\}\, dx.$$

Valutiamo ora il secondo membro di (1.9.7).
Tenendo conto che $(|\bar{u}_h|_{\infty,\Omega})_{h\in\mathbb{N}}$ è limitata, per il teorema di Lebesgue si ha:

$$(1.9.8) \qquad \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} f_i(\cdot, w_h)\exp(\bar{u}_h)^2\partial_i\bar{u}_h dx \to 0.$$

Inoltre, poiché:

$$\Big|\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(\cdot, w_h)\exp(\bar{u}_h)^2[1+2(\bar{u}_h)^2]\partial_j u_w\Big| \le$$
$$\le \sup_h(|\exp(\bar{u}_h)^2|_{\infty,\Omega}\, n^2\eta(1+2|(\bar{u}_h)^2|_{\infty,\Omega})|\nabla u_w| \in L^2(\Omega)$$

e

$$a_{i,j}(\cdot, w_h)\exp(\bar{u}_h)^2[1+2(\bar{u}_h)^2]\partial_j u_w \to a_{i,j}(\cdot, w)\partial_i u_w \quad \text{q.o. in } \Omega,$$

segue:

$$(1.9.9) \qquad \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(\cdot, w_h)\exp(\bar{u}_h)^2[1+2(\bar{u}_h)^2]\partial_j u_w\partial_i\bar{u}_h\, dx \to 0$$

ed analogamente:

$$(1.9.10) \qquad \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i(\cdot, w_h)\exp(\bar{u}_h)^2\bar{u}_h\partial_i u_{w_h}\, dx \to 0.$$

Tenendo ora conto di (0.3.5) e del fatto che $(|u_{w_h}|_{\infty,\Omega})_{h\in\mathbb{N}}$ è limitata, si ha:

$$(1.9.11) \qquad \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} c_i(\cdot, w_h)\exp(\bar{u}_h)^2[1+2(\bar{u}_h)^2]u_{w_h}\partial_i\bar{u}_h\, dx \to 0$$

e poiché $\bar{u}_h \rightharpoonup 0$ in $L^{2^*}(\Omega)$, seguono:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega d(\cdot, w_h)\exp(\bar{u}_h)^2\bar{u}_h u_w\,dx \to 0,\\ &\int_\Omega d(\cdot, w_h)\exp(\bar{u}_h)^2(\bar{u}_h)^2\,dx \to 0.\end{aligned} \tag{1.9.12}$$

Inoltre, poiché, se $n > 2$, $\frac{np}{n-2} > 2$, si ha:

$$\int_\Omega \frac{2n^2}{\nu} C_o^2(\cdot)\exp(\bar{u}_h)^2(\bar{u}_h)^2\,dx \to 0. \tag{1.9.13}$$

Da ultimo, in quanto $\frac{4}{p} < 2^*$, per il teorema di Vitali, segue:

$$\int_\Omega \frac{2n^2}{\nu} b_o^2|w_h|^{4/p}\exp(\bar{u}_h)^2(\bar{u}_h)^2\,dx \to 0. \tag{1.9.14}$$

Allora, per (1.9.8) – (1.9.14), il secondo membro di (1.9.7) tende a zero. D'altra parte, poiché $\exp(\bar{u}_h)^2 \geq 1$, il primo membro di (1.9.7) è tale che:

$$\nu\int_\Omega \exp(\bar{u}_h)^2|\nabla\bar{u}_h|^2\,dx + \nu\int_\Omega \exp(\bar{u}_h)^2(\bar{u}_h)^2|\nabla\bar{u}_h|^2\,dx \geq \nu\int_\Omega |\nabla\bar{u}_h|^2\,dx,$$

ottenendo che: $\int_\Omega |\nabla\bar{u}_h|^2\,dx \to 0$, da cui la tesi.

Teorema 1.10. *Siano* Γ^+, Γ°, u° *come in* 0.1, $\operatorname{mis}\Gamma^+ \neq 0$, a *come in* 0.3, l *come in* 0.4 *e valga* (1.1.3). *Siano inoltre* Φ *come in* 1.5, V *come in* 1.8, $w \in M(u^\circ)$, a_w *come in* (1.1.1), *tale che* $a_w(u, u) \geq 0$ *per ogni* $u \in V$ *e, se* $a_w(u, u) = 0$, *allora* $\nabla u = 0$. *Sotto queste ipotesi esiste* $u \in M(u^\circ) \cap L^\infty(\Omega)$ *soluzione di* (1.0.1).

Dimostrazione. Poiché $M(u^\circ)$ risulta chiuso e convesso in $H^{1,2}(\Omega)$ per 0.2 e Φ risulta compatta per 1.5 e 1.9, si puó applicare il teorema del punto fisso di Schauder, per cui esiste $u \in M(u^\circ)$ tale che $\Phi(u) = u$.
Dalla definizione di Φ (Teorema 1.5) si ottiene allora l'esistenza di una soluzione di:

$$\begin{cases} a(u, v-u) + l(u, v-u) \geq 0 & \text{per ogni } v \in M(u^\circ)\\ u \in M(u^\circ) & . \end{cases}$$

Tale soluzione, per 1.8, risulta anche in $L^\infty(\Omega)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] H.W. Alt, *Strömungen durch inhomogene poröse Medien mit freiem Rand,* J. Reine Angew Math., 305 (1979), pp. 255–272.

[2] G.F. Bottaro, *Alcune condizioni sufficienti per l'esistenza e l'unicità della soluzione di una disequazione variazionale non coerciva,* Ann. Mat. Pura Appl., 106 (1975), pp. 187–204.

[3] M.E. Marina, *Un problema al contorno di tipo misto per un operatore ellittico che può degenerare,* Rend. Lincei Sc. fis. mat. e nat., 55 (1973), pp. 149–160.

[4] M.K.V. Murthy - G. Stampacchia, *Boundary value problems for some degenerate elliptic operators,* Ann. Mat. Pura Appl., 80 (1968), pp. 1–122.

[5] J. Necas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques,* Masson, Paris et Academia, Prague, 1967.

[6] G. Stampacchia, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus,* Ann. Inst. Fourier Grenoble, 15 (1965), pp. 189–258.

[7] G. Stampacchia, *Régularization des solutions de problèmes aux limites elliptiques à donnés discontinues,* Inter. Symp. on Lin. Spaces, Jerusalem, 1960, pp. 399–408.

[8] G. Stampacchia, *Some limit cases of L^p-estimates for solutions of second order elliptic equations,* Comm. Pure Appl. Math., 16 (1963), pp. 505–510.

Dipartimento di Matematica,
Università di Genova,
Via Dodecaneso 35,
16146 Genova (ITALY),
e-mail: rossia@dima.unige.it