LE MATEMATICHE
Vol. LI (1996) – Fasc. I, pp. 169–185

OPERATORI ELLITTICI MASSIMINIMANTI

CRISTINA GIANNOTTI

In the theory of second order elliptic equations, in non divergence form, two non linear elliptic operators, which are non convex with respect to the second derivatives, are studied. Such operators are called maximinimal because of their extremal properties and they are a generalization of the extremal elliptic operators in [7]. They can be used to study eigenvalues of elliptic equations, corresponding to eigenfunctions with changes of sign. In this work the Dirichlet problem for these operators in studied. A nonuniqueness example, in dimension $m \geq 2$, is costrued and a nonexistence theorem in $W^{2,m}$, $m \geq 3$, is proved.

Introduzione.

Se Ω è un dominio limitato in $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, si considera la classe $\mathscr{L}_\alpha$ degli operatori uniformemente ellittici e lineari della forma $\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}$ con coefficienti misurabili in Ω e verificanti, in Ω, le condizioni: $\sum_{i,j} a_{ij}\lambda_i\lambda_j \geq \alpha|\lambda|^2$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^m$ e per qualche costante $\alpha \in (0, \frac{1}{m}]$, e $\sum_i a_{ii} \equiv 1$.

Gli operatori ellittici massiminimanti relativi alla classe $\mathscr{L}_\alpha$ vengono indicati con i simboli P_α^A e K_α, dove A è un sottoinsieme misurabile di Ω, e sono definiti nel modo seguente. Per ogni funzione u differenziabile due volte in Ω, $P_\alpha^A[u]$ coincide in A con l'estremo superiore di Lu al variare dell'operatore L

Entrato in Redazione il 15 ottobre 1996.

Key words: Fully nonlinear elliptic equations, Boundary value problems for nonlinear elliptic PDE.

nella classe $\mathscr{L}_\alpha$, in $\Omega \setminus A$ con l'estremo inferiore di Lu; $K_\alpha[u]$, invece, coincide con l'estremo superiore di Lu, sempre al variare di L in $\mathscr{L}_\alpha$, dove la funzione u è maggiore od uguale a zero, con l'estremo inferiore di Lu dove u è minore di zero.

Tali operatori costituiscono una generalizzazione degli operatori ellittici estremanti introdotti in [7], i quali si riottengono come casi particolari dall'operatore P_α^A ponendo A uguale ad Ω oppure uguale all'insieme vuoto. Gli operatori P_α^A e K_α sono anche evidentemente correlati tra loro dalla relazione: $K_\alpha[u] = P_\alpha^{\{u\geq 0\}}[u]$, si linearizzano su ciascuna funzione u fissata e soddisfano il principio di massimo.

A differenza degli operatori estremanti, P_α^A e K_α non rientrano nella classe degli operatori ellittici convessi o concavi nelle derivate seconde, per i quali sono noti teoremi di esistenza e unicità della soluzione per il problema di Dirichlet (si veda, ad esempio, [4], Cap. 17, oppure [8] per teoremi di esistenza di tipo Schauder in classi di Hölder e [1] per un teorema di esistenza in $C^0 \cap W^{2,m}_{\text{loc}}$, ottenuto mediante maggiorazioni all'interno in spazi di Sobolev $W^{2,m}$). Le questioni dell'esistenza e unicità della soluzione per il problema di Dirichlet si presentano piuttosto complesse e non sempre hanno risposta positiva. I due risultati principali esposti nel presente lavoro sono un esempio di non unicità della soluzione per il problema di Dirichlet relativo all'operatore K_α in dimensione $m \geq 2$ (par. 4) e la dimostrazione dell'impossibilità di un teorema di esistenza in $W^{2,m}$, $m \geq 3$, per la soluzione del problema di Dirichlet relativo all'operatore P_α^A (par. 5). In particolare, nel paragrafo 5 si stabilisce una relazione tra l'esistenza di una soluzione $W^{2,m}$ del nostro problema ed il problema dell'unicità debole, ossia dell'unicità della soluzione generalizzata per il problema di Dirichlet per operatori della classe $\mathscr{L}_\alpha$ a coefficienti limitati e misurabili. Il teorema di non esistenza per P_α^A si ottiene, quindi, come conseguenza di un recente risultato di non unicità per le soluzioni deboli in [6].

Nel paragrafo 1 si introducono le definizioni e le prime proprietà degli operatori massiminimanti. Nel paragrafo 2 si stabiliscono teoremi di esistenza per la soluzione del problema di Dirichlet nel piano; per un numero qualsiasi di dimensioni l'esistenza è provata nel paragrafo 3 solo nel caso particolare di soluzioni radiali. Per una trattazione più ampia e dettagliata dei risultati si rinvia a [3].

1. Definizioni e prime proprietà.

Sia Ω un aperto limitato connesso contenuto in $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$.

Ricordiamo la definizione, data in [7], degli operatori ellittici estremanti relativi alla classe $\mathscr{L}_\alpha$, il massimante M_α ed il minimante m_α:

$$M_\alpha[u](x) = \sup_{L\in\mathscr{L}_\alpha} Lu(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$m_\alpha[u](x) = \inf_{L\in\mathscr{L}_\alpha} Lu(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

per ogni $u \in C^{1,1}(\Omega)$.

Ricordiamo anche che, in termini degli autovalori $\mathscr{C}_1[u], \cdots, \mathscr{C}_m[u]$ della matrice hessiana di u, ordinati dal più piccolo al più grande, gli operatori M_α ed m_α hanno la seguente rappresentazione non lineare:

$$\begin{aligned} M_\alpha[u] &= \alpha \sum_{i=1}^{m-1} \mathscr{C}_i[u] + (1-(m-1)\alpha)\mathscr{C}_m[u]\,, \\ m_\alpha[u] &= \alpha \sum_{i=2}^{m} \mathscr{C}_i[u] + (1-(m-1)\alpha)\mathscr{C}_1[u]\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Definiamo ora gli operatori massiminimanti P_α^A e K_α relativi alla classe $\mathscr{L}_\alpha$.

Definizione 1. *Sia A un insieme misurabile assegnato contenuto in Ω; per ogni $u \in C^{1,1}(\Omega)$, è :*

$$P_\alpha^A[u](x) = \begin{cases} \sup_{L\in\mathscr{L}_\alpha} Lu(x) & x \in A \\ \inf_{L\in\mathscr{L}_\alpha} Lu(x) & x \in \Omega \setminus A, \end{cases} \tag{4}$$

cioè l'operatore P_α^A coincide con il massimante in A e con il minimante nel complementare $\Omega \setminus A$.

Definizione 2. *Per ogni funzione u assegnata in $C^{1,1}(\Omega)$, si pone:*

$$K_\alpha[u] = P_\alpha^{\{x\in\Omega: u(x)\geq 0\}}[u], \tag{5}$$

cioè K_α, applicato ad u, opera come il massimante dove u è positiva o nulla e come il minimante dove u è negativa.

E' immediato ottenere le prime proprietà degli operatori P_α^A e K_α dalle analoghe proprietà del massimante e del minimante provate in [7]. In particolare, P_α^A e K_α si possono linearizzare su ciascuna u fissata, ossia per ogni $u \in C^{1,1}(\Omega)$ esistono due operatori lineari $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_\alpha$ tali che:

$$L_1[u] = P_\alpha^A[U] \quad \text{ed} \quad L_2[u] = K_\alpha[u].$$

Per l'operatore P_α^A, fissate $u, v \in C^{1,1}(\Omega)$, anche la differenza $P_\alpha^A[u] - P_\alpha^A[v]$ si linearizza, cioè esiste un operatore $L \in \mathscr{L}_\alpha$ tale che:

$$P_\alpha^A[u] - P_\alpha^A[v] = L(u - v).$$

E' chiaro, inoltre, che gli operatori massiminimanti, definiti per funzioni di classe $C^{1,1}(\Omega)$, possono essere ugualmente definiti per funzioni di classe $W^{2,m}(\Omega)$.

Consideriamo i problemi di Dirichlet per i due operatori massiminimanti P_α^A e K_α:

$$P_\alpha^A[u] = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = \phi \quad \text{su } \partial\Omega \tag{6}$$

e

$$K_\alpha[u] = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = \phi \quad \text{su } \partial\Omega. \tag{7}$$

Come conseguenza del principio di massimo si ha l'unicità della soluzione per il problema relativo a P_α^A e, a certe condizioni, anche per il problema (7):

Teorema 1. *Il problema* (6)*, con f misurabile in Ω e ϕ continua su $\partial\Omega$, ammette al più una soluzione di classe $C^{1,1}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

Teorema 2. *Sia f misurabile e di segno costante in Ω. Allora, il problema* (7)*, con $\phi \equiv 0$, ha al più una soluzione in $C^{1,1}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

Diamo ora una definizione ed un lemma utili per lo studio del problema di Dirichlet relativo a K_α.

Definizione 3. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^m$ ed $\alpha \in (0, \frac{1}{m}]$ costante. Ad ogni funzione v assegnata, misurabile in Ω, si associa l'operatore:*

$$K_{\alpha,v} = P_\alpha^{\{x \in \Omega : v(x) \geq 0\}}, \tag{8}$$

cioè $K_{\alpha,v}$ coincide con l'operatore massimante M_α dove v è non negativa, con l'operatore minimante m_α dove v è negativa.

Lemma 1 (di monotonia). *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^m$ ed $\alpha \in (0, \frac{1}{m}]$. Siano u_1 ed u_2 soluzioni di classe $W^{2,m}(\Omega)$ rispettivamente dei problemi:*

$$\begin{cases} K_{\alpha,v_1}[u] = f_1 & \text{in } \Omega \\ u = \phi_1 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} K_{\alpha,v_2}[u] = f_2 & \text{in } \Omega \\ u = \phi_2 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

con $f_1, f_2 \in L^m(\Omega)$ tali che $f_1 \leq f_2$, $\phi_1, \phi_2 \in C^0(\partial\Omega)$ tali che $\phi_1 \geq \phi_2$ e v_1 e v_2 funzioni misurabili in Ω, tali che $v_1 \geq v_2$. Allora, è anche $u_1 \geq u_2$ in Ω.

Dimostrazione. Si osserva che esiste un operatore $L \in \mathscr{L}_\alpha$ tale che $L(u_1 - u_2) \leq 0$. Infatti, suddividendo Ω nei tre insiemi:

$$I_1 = \{v_1 \geq 0, v_2 \geq 0\},\ I_2 = \{v_1 < 0, v_2 < 0\},\ I_3 = \{v_1 \geq 0, v_2 < 0\},$$

si costruisce L nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
&L(u_1 - u_2) = M_\alpha[u_1] - M_\alpha[u_2] = f_1 - f_2 \leq 0 \quad \text{in } I_1\\
&L(u_1 - u_2) = m_\alpha[u_1] - m_\alpha[u_2] = f_1 - f_2 \leq 0 \quad \text{in } I_2\\
&Lu_1 = M_\alpha[u_1] = f_1 \quad \text{in } I_3,
\end{aligned}$$

così che , anche in I_3, $L(u_1 - u_2) \leq M_\alpha[u_1] - m_\alpha[u_2] = f_1 - f_2 \leq 0$.
Poichè, d'altra parte $u_1 - u_2 \geq 0$ su $\partial\Omega$, per il principio di massimo, $u_1 \geq u_2$ in Ω. $\square$

2. Teoremi di esistenza nel piano.

Teorema 3. *Sia Ω un aperto limitato del piano con frontiera di classe C^3 e sia A un sottoinsieme misurabile di Ω. Se $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$, per ogni $f \in L^2(\Omega)$ e per ogni $\phi \in W^{\frac{3}{2},2}(\partial\Omega)$ esiste una ed una sola funzione $u \in W^{2,2}(\Omega)$, soluzione del problema* (6).

Teorema 4. *Se Ω è un aperto limitato del piano con frontiera di classe C^3 ed $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$, il problema* (7)*, con $f \equiv 0$, ha almeno una soluzione di classe $W^{2,2}(\Omega)$ qualunque sia $\phi \in W^{\frac{3}{2},2}(\partial\Omega)$.*

La dimostrazione del Teorema 3, che omettiamo, è in gran parte standard, basata su un metodo classico di continuità e su note limitazioni a priori per soluzioni di classe $W^{2,2}(\Omega)$ delle equazioni ellittiche lineari della classe $\mathscr{L}_\alpha$ in due variabili. Tali limitazioni, dimostrate in [9], si trasferiscono all'operatore P_α^A per la possibilità di linearizzarlo su ciascuna u fissata. In particolare, si ha, per ogni $u \in W^{2,2}(\Omega)$ con traccia ϕ su $\partial\Omega$:

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C_\alpha(\|P_\alpha^A[u]\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi\|_{W^{\frac{3}{2},2}(\partial\Omega)}). \tag{9}$$

Dimostrazione (del Teorema 4). Sia $X = \{u \in W^{2,2}(\Omega) : u = \phi \text{ su } \partial\Omega\}$. Utilizzando l'operatore in (8), definiamo per ricorrenza una successione $\{u_n\}$ di funzioni in X, nel modo seguente:

$$\begin{cases} u_0 = \max\{\sup\phi, 0\} \\ u_n \in W^{2,2}(\Omega) : u_n = \phi \text{ su } \partial\Omega \text{ e } K_{\alpha,u_{n-1}}[u_n] = 0 \quad \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{10}$$

Osserviamo che la possibilità di costruire la successione $\{u_n\}$ è garantita dal Teorema 3. Per il principio di massimo $u_0 \geq u_1$, perciò, applicando il Lemma 1, si prova per induzione che la successione $\{u_n\}$ è non crescente, cioè $u_n \geq u_{n+1}$ per ogni n.

Poichè, d'altra parte, la successione $\{u_n\}$ ha norma $W^{2,2}(\Omega)$ limitata per la (9), esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ convergente debolmente in $W^{2,2}(\Omega)$ ad una funzione $u \in W^{2,2}(\Omega)$. Inoltre, per il teorema di Rellich e per la monotonia, l'intera successione converge ad u uniformemente in $\overline{\Omega}$, perciò $u \in X$.

Proviamo ora che u è soluzione in Ω dell'equazione $K_\alpha[u] = 0$. Poichè $W^{2,2}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$, si può considerare l'insieme aperto $A = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$: su A $u_n > 0$ per ogni n, quindi soddisfa l'equazione $M_\alpha[u_n] = 0$. Allora, per ogni n, m esiste un operatore $L \in \mathscr{L}_\alpha$ tale che $L(u_n - u_m) = 0$ in A; dunque, per ogni aperto A' tale che $\overline{A}' \subset A$, si ha:

$$\|u_n - u_m\|_{W^{2,2}(A')} \leq C\|u_n - u_m\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} ;$$

per la convergenza uniforme della successione $\{u_n\}$, ne segue che u_n converge ad u fortemente in $W^{2,2}(A')$ per ogni $\overline{A}' \subset A$ e quindi anche $M_\alpha[u_n]$ converge ad $M_\alpha[u]$ in $L^2(A')$, perciò $M_\alpha[u] = 0$ q.o. in A.

Sia ora $B = \{x \in \Omega : u(x) < 0\}$: se K è un compatto, dotato di punti interni, contenuto in B, per la convergenza uniforme della successione $\{u_n\}$, le funzioni u_n sono tutte negative in K da un certo n in poi, quindi verificano $m_\alpha[u_n] = 0$. Come prima, in ogni aperto B' con $\overline{B}'$ propriamente contenuto in K, u_n converge ad u fortemente in $W^{2,2}(B')$, quindi $m_\alpha[u_n]$ converge ad $m_\alpha[u]$ in $L^2(B')$ da cui segue che $m_\alpha[u] = 0$ q.o. in B. Dove $u = 0$, infine, dall'espressione (3) per il massimante e ricordando che se u è differenziabile due volte in Ω, dove si annulla anche le derivate prime e seconde di u sono nulle q.o., si ha ancora $M_\alpha[u] = 0$ q.o.. Allora, u verifica l'equazione $K_\alpha[u] = 0$ in Ω e dunque è soluzione del problema considerato. □

In modo analogo, possiamo ottenere un'altra soluzione v del problema (7), con $f \equiv 0$, come limite della successione non decrescente:

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} v_0 = \min\{\inf \phi, 0\} \\ v_n \in W^{2,2}(\Omega) : v_n = \phi \text{ su } \partial\Omega \text{ e } K_{\alpha, v_{n-1}}[v_n] = 0 \text{ in } \Omega. \end{cases}$$

Anzi, applicando il Lemma 1 e procedendo per induzione, si prova che $v_n \leq u_n$ per ogni n, dunque, al limite, $v \leq u$. Se poi w è soluzione del problema (7), con $f \equiv 0$, e quindi verifica $K_{\alpha,w}[w] = 0$, si prova allo stesso modo che $v_n \leq w \leq u_n$ per ogni n, e perciò, anche $v \leq w \leq u$. Ricapitolando, si ha:

Teorema 5. *Sia $\phi \in W^{\frac{3}{2},2}(\partial\Omega)$. Se $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ sono le successioni definite in* (10) *e* (11) *rispettivamente e se u e v sono i loro limiti, allora, u e v sono soluzioni del problema* (7)*, con $f \equiv 0$, e risulta $v \leq u$. Inoltre, se w è una qualunque altra soluzione, risulta $v \leq w \leq u$.*

Corollario 1. *Nelle ipotesi del Teorema 4, il problema* (7) *ammette una ed una sola soluzione se e solo se i limiti u e v delle successioni* (10) *e* (11) *coincidono.*

Osservazione. Se il termine noto f nel problema (7) non è identicamente nullo, la questione dell'esistenza di una soluzione rimane aperta: il metodo utilizzato per la dimostrazione del Teorema 4, infatti, non si può applicare per i punti della frontiera di $\{u \geq 0\}$, che possono costituire un insieme di misura positiva. Anche la convergenza debole ad u in $W^{2,2}(\Omega)$ di una sottosuccessione u_{n_k} non aiuta in quanto non garantisce la convergenza debole in $L^2(\Omega)$ della successione $M_\alpha[u_{n_k}]$ ad $M_\alpha[u]$.

3. Teoremi di esistenza nel caso radiale.

Teorema 6. *Sia Ω la sfera aperta unitaria in $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, con centro l'origine e sia A un sottoinsieme misurabile di Ω, radiale, cioè tale che la sua funzione caratteristica χ_A dipenda solo dalla distanza dall'origine O. Fissato $\alpha \in (0, \frac{1}{m}]$ ed $f = f(|x|)$, radiale, in $L^\infty(\Omega)$, il problema di Dirichlet:*

$$P_\alpha^A[u] = f \quad in\ \Omega, \qquad u = 0 \quad su\ \partial\Omega \tag{12}$$

ammette una ed una sola soluzione $u \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$ e tale soluzione è radiale.

Teorema 7. *Siano Ω, α ed f come nel teorema precedente. Allora, il problema di Dirichlet:*

$$K_\alpha[u] = f \quad in\ \Omega, \qquad u = 0 \quad su\ \partial\Omega \tag{13}$$

ammette almeno una soluzione $u \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$ e tale soluzione è radiale.

Le espressioni assunte dagli operatori P_α^A e K_α quando sono applicati a funzioni che dipendono solo dalla distanza dall'origine permettono di trasformare i problemi (12) e (13) in problemi per equazioni differenziali ordinarie con una singolarità nell'origine e con coefficienti che dipendono dalla soluzione stessa.

Posto $r = |x|$, se $u(x) = \phi(r)$ è una funzione radiale, infatti, dalle definizioni di P^A_α e di K_α e dalle espressioni (3) per gli operatori massimante e minimante, si ottengono le seguenti espressioni radiali per gli operatori massiminimanti applicati ad u:

$$P^A_\alpha[u](|x|) = \mathscr{P}^{\mathscr{A}}_\alpha \phi(r) = h(r)\phi''(r) + \frac{1-h(r)}{r}\phi'(r) \tag{14}$$

dove $\mathscr{A} = \{r \in [0,1) : r = |x| \text{ con } x \in A\}$ e:

$$h(r) = \begin{cases} \alpha \quad \text{se } \phi'' < \dfrac{\phi'}{r} \text{ ed } r \in \mathscr{A} \text{ oppure } \phi'' \geq \dfrac{\phi'}{r} \text{ ed } r \in [0,1) \setminus \mathscr{A} \\ \alpha' \quad \text{se } \phi'' \geq \dfrac{\phi'}{r} \text{ ed } r \in \mathscr{A} \text{ oppure } \phi'' < \dfrac{\phi'}{r} \text{ ed } r \in [0,1) \setminus \mathscr{A}; \end{cases} \tag{15}$$

$$K_\alpha[u](|x|) = \mathscr{K}_\alpha \phi(r) = h(r)\phi'' + \frac{1-h(r)}{r}\phi' \tag{16}$$

dove:

$$h(r) = \begin{cases} \alpha \text{ se } \phi \geq 0 \text{ e } (\phi'' - \dfrac{\phi'}{r}) < 0 \text{ oppure } \phi < 0 \text{ e } (\phi'' - \dfrac{\phi'}{r}) \geq 0 \\ \alpha' \text{ se } \phi \geq 0 \text{ e } (\phi'' - \dfrac{\phi'}{r}) \geq 0 \text{ oppure } \phi < 0 \text{ e } (\phi'' - \dfrac{\phi'}{r}) < 0. \end{cases} \tag{17}$$

E' chiaro, allora, che, cercando soluzioni radiali dei problemi (12) e (13), questi si trasformano rispettivamente nei problemi:

$$\mathscr{P}^{\mathscr{A}}_\alpha \phi(r) = f(r) \quad \text{in } (0,1), \quad \phi'(0) = \phi(1) = 0 \tag{18}$$

e:

$$\mathscr{K}_\alpha \phi(r) = f(r) \quad \text{in } (0,1), \quad \phi'(0) = \phi(1) = 0. \tag{19}$$

I Teoremi 6 e 7 si possono quindi riformulare nel modo seguente:

Teorema 6′. *Sia $f \in L^\infty\big((0,1)\big)$. Allora il problema* (18) *ammette una ed una sola soluzione ϕ di classe $C^{1,1}\big([0,1]\big)$.*

Teorema 7′. *Assegnata $f \in L^\infty\big((0,1)\big)$, il problema* (19) *ammette almeno una soluzione $\phi \in C^{1,1}\big([0,1]\big)$.*

In particolare, la dimostrazione del Teorema 7′ si basa sullo stesso procedimento iterativo usato per provare il Teorema 4. Osserviamo che se v è radiale in Ω, l'operatore $K_{\alpha,v}$, definito in (8), applicato ad una funzione $u(|x|) = \phi(r)$ radiale, diventa

$$\mathscr{K}_{\alpha,v}\phi(r) = \mathscr{P}_\alpha^{\{v\geq 0\}}\phi(r). \tag{20}$$

Le successioni approssimanti, corrispondenti alle (10) e (11), sono quindi così definite in $C^{1,1}\big([0,1]\big)$:

$$\phi_0 = +\infty, \quad \mathscr{K}_{\alpha,\phi_{n-1}}\phi_n = f \text{ in } (0,1), \; \phi_n'(0) = \phi_n(1) = 0 \tag{21}$$

e

$$\psi_0 = -\infty, \quad \mathscr{K}_{\alpha,\psi_{n-1}}\psi_n = f \text{ in } (0,1), \; \psi_n'(0) = \psi_n(1) = 0. \tag{22}$$

Valgono risultati analoghi a quelli del Teorema 5 e del Corollario 1, cioè le funzioni ϕ e ψ, limiti delle successioni (21) e (22), sono rispettivamente la soluzione superiore e la soluzione inferiore del problema (19) e ogni altra soluzione è intermedia tra queste due.

Notiamo che, a differenza di quanto accade nel piano, le espressioni radiali delle equazioni considerate permettono di provare la convergenza delle successioni (21) e (22) ad una soluzione del problema (19) qualunque sia $f \in L^\infty\big((0,1)\big)$.

4. Esempio di non unicità.

Siano $m \geq 2$ ed $\alpha \in (0, \frac{1}{m})$. Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} \mathscr{K}_\alpha\phi = f(r) & \text{in } (0,1) \\ \phi'(0) = \phi(1) = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad f(r) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad r \in [0, x_0] \\ -1 & \text{se} \quad r \in (x_0, 1] \end{cases} \tag{23}$$

dove x_0 è un punto assegnato dell'intervallo $(0,1)$ e dove $\mathscr{K}_\alpha$ è l'operatore in (16). Il Teorema 7′ garantisce l'esistenza di almeno una soluzione di classe $C^{1,1}([0,1])$ per il problema (23). Scopo di questo paragrafo è provare che in certe condizioni il problema ammette almeno due soluzioni.

Teorema 8. *Sia $m \geq 2$; se $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, esiste $\overline{\alpha} \in (0, \frac{1}{m})$, dipendentemente da x_0 e da m, tale che per $\alpha \in (0, \overline{\alpha})$ il problema* (23) *ha due soluzioni distinte di classe $C^{1,1}([0,1])$.*

Prima di tutto diamo un lemma preliminare, la cui dimostrazione è basata su semplici considerazioni algebriche (vedasi [3]).

Lemma 2. *Siano $m \geq 2$, $\alpha \in (0, \frac{1}{m})$, $\alpha' = 1 - (m-1)\alpha$ ed $x \in (0, 1)$.*
i) La funzione:

$$\sigma(x) = -1 + \frac{2\alpha - 1}{2\alpha} \frac{x^2 - 1}{x^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}} - 1} \tag{24}$$

è crescente e negativa e $\lim_{x \to 0+} \sigma(x) = -1$, $\lim_{x \to 1-} \sigma(x) = 0$.
ii) Esiste $\alpha_1 = \alpha_1(x, m) \in (0, \frac{1}{m})$ tale che $\forall \alpha \in (0, \alpha_1)$ è verificata la disuguaglianza:

$$-1 + 2x^{1/\alpha} < \sigma(x). \tag{25}$$

iii) Se $x \in (\frac{1}{2}, 1)$, posto $\alpha_2 = \min\left\{\frac{1}{m-1}(1 + \frac{\ln x}{\ln 2}), \frac{1}{m}\right\}$, la disuguaglianza

$$-1 + 2x^{\frac{1}{\alpha'}} > 0 \tag{26}$$

è soddisfatta per ogni $\alpha \in (0, \alpha_2)$.
iv) Se $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ e $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(m, x)$è il massimo valore per cui (25) *e* (26) *sono verificate entrambe, risulta: $\overline{\alpha} < \frac{1}{m}$.*

Introduciamo il problema di Cauchy:

$$\mathscr{K}_\alpha \phi = f(r) \quad \text{in } (0, 1) \quad \phi(1) = 0, \phi'(1) = c \tag{27}$$

con termine noto come in (23) e al variare del dato iniziale $c \in \mathbb{R}$. Utilizzando noti teoremi di esistenza si può provare che il problema (27) ammette una ed una sola soluzione di classe $C^{1,1}\big((0, 1]\big)$ per ogni valore di $c \in \mathbb{R}$ assegnato.

Ora è chiaro che determinare le soluzioni del problema (23) equivale a risolvere il problema di Cauchy (27) per quei valori del dato iniziale $c \in \mathbb{R}$, in corrispondenza dei quali la soluzione soddisfa l'ulteriore condizione $\phi'(0) = 0$.

Si tratta allora di determinare almeno due di questi valori di c. Il primo passo consiste nello stabilire una condizione necessaria e sufficiente affinchè una soluzione del problema (27) abbia derivata nulla nell'origine.

Proposizione 1. *Sia $m \geq 2$, $\alpha \in (0, 1/m]$, $x_0 \in (0, 1)$ e sia $\phi \in C^{1,1}\big((0, 1]\big)$ soluzione del problema* (27) *per qualche $c \in \mathbb{R}$. La funzione ϕ soddisfa la condizione $\phi'(0) = \lim_{r \to 0} \phi'(r) = 0$ se e solo se $\phi'(r) = r$ per ogni $r \in (0, x_0)$, ovvero se e solo se:*

$$\frac{\phi'(x_0)}{x_0} = 1. \tag{28}$$

Dimostrazione. Se ϕ è soluzione del problema (27), nell'intervallo $(0, x_0)$ verifica:

$$h(r)\phi'' + \frac{1-h(r)}{r}\phi' = 1,$$

con il coefficiente $h(r)$ determinato in base alla (17). Integrando, si ottiene:

$$\phi'(r) = r + r\left(\frac{\phi'(x_0)}{x_0} - 1\right)\exp\left(\int_r^{x_0} \frac{1}{h}\frac{d\theta}{\theta}\right).$$

Poichè:

$$r \exp\left(\int_r^{x_0} \frac{1}{h}\frac{d\theta}{\theta}\right) \geq r \exp\left(\int_r^{x_0} \frac{1}{\alpha'}\frac{d\theta}{\theta}\right) = x_0^{1/\alpha'} r^{1-1/\alpha'} \to +\infty$$

per $r \to 0$, segue subito che:

$$\lim_{r\to 0} \phi'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\phi'(x_0)}{x_0} = 1,$$

da cui si ha anche: $\phi'(r) = r$ in $[0, x_0]$. $\square$

Proposizione 2. *Fissati $m \geq 2$ ed $x_0 \in (1/2, 1)$, consideriamo il problema* (27) *con $\alpha \in (0, \overline{\alpha})$, $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(m, x_0)$ definito come nel Lemma 2: esistono almeno due valori $c \in \mathbb{R}$ del dato iniziale, tali che le corrispondenti soluzioni verificano la condizione $\phi'(0) = 0$.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 1, si devono determinare i valori di c per i quali si annulla la quantità $1 - \phi'(x_0)/x_0$. Andiamo quindi a studiare questa quantità al variare di $c \in (-\infty, +\infty)$. Nell'intervallo $(x_0, 1)$ la soluzione ϕ del problema (27) verifica l'equazione:

$$h(r)\phi'' + \frac{1-h(r)}{r}\phi' = -1, \tag{29}$$

sempre con il coefficiente h definito dalla (17). Integrando e tenendo conto della condizione iniziale $\phi'(1) = c$, si ottiene:

$$\phi'(r) = r\left[(c+1)\exp\left(\int_r^1 \frac{1}{h}\frac{d\theta}{\theta}\right) - 1\right], \quad \text{per } r \in [x_0, 1].$$

Dunque:

$$1 - \frac{\phi'(x_0)}{x_0} = 2 - (c+1)\exp\left(\int_{x_0}^1 \frac{1}{h}\frac{d\theta}{\theta}\right). \tag{30}$$

Studiamo ora il coefficiente h nell'intervallo $(x_0, 1)$. Dall'espressione di ϕ' si ha:

$$f(r) - \frac{\phi'(r)}{r} = -1 - \frac{\phi'(r)}{r} = -(c+1)\exp\left(\int_r^1 \frac{1}{r}\frac{d\theta}{\theta}\right) \quad \text{per } r \in (x_0, 1);$$

perciò, $-1 - \frac{\phi'(r)}{r}$ ha segno costante in $(x_0, 1)$; in particolare, è maggiore di zero se $c < -1$ e minore o uguale a zero se $c \geq -1$.

Dalla (17) e dall'equazione, allora, segue che i salti del coefficiente h nell'intervallo $(x_0, 1)$ coincidono esattamente con i cambiamenti di segno di ϕ in questo intervallo:

$$h(r) = \begin{cases} \alpha & \text{se } \phi \geq 0 \text{ e } c > -1 \text{ oppure } \phi < 0 \text{ e } c \leq -1 \\ \alpha' & \text{se } \phi \geq 0 \text{ e } c \leq -1 \text{ oppure } \phi < 0 \text{ e } c > -1. \end{cases} \tag{31}$$

Se $c \geq 0$, $\phi'(r)$ è positiva in $(x_0, 1)$ e quindi ϕ, che è nulla per $r = 1$, è negativa in tutto l'intervallo $(x_0, 1)$. Ne segue, in base alla (31), che il coefficiente h nell'equazione (29) è costante, uguale ad α', in tutto l'intervallo. Ponendo $h = \alpha'$ nella (30) si ottiene, allora:

$$1 - \frac{\phi'(x_0)}{x_0} = 2 - (c+1)x_0^{-\frac{1}{\alpha'}}. \tag{32}$$

Quindi, per $c \geq 0$:

$$1 - \frac{\phi'(x_0)}{x_0} = 0 \quad \text{se} \quad c = 2x_0^{\frac{1}{\alpha'}} - 1$$

e per il Lemma 2, essendo $\alpha < \overline{\alpha}$, il valore di c così determinato è positivo (condizione (26) con $x = x_0$). Dunque, esiste un valore positivo del dato iniziale c al quale corrisponde una soluzione con $\phi'(0) = 0$.

Passiamo a considerare $c < 0$, anzi $c \in (-1, 0)$, in quanto dalla (30) è chiaro che per $c \leq -1$ la condizione (28) non può essere verificata.

Se $-1 < c < 0$, dalla (31) e dal fatto che $\phi > 0$ in un intorno del punto $r = 1$, in tale intorno si ha $h = \alpha$ nella (29), quindi:

$$\phi'(r) = -r + (c+1)r^{1-\frac{1}{\alpha}} \tag{33}$$

e integrando ancora:

$$\phi(r) = -\frac{r^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\alpha - 1}(c+1)(r^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}} - 1). \tag{34}$$

Notiamo che ϕ' è negativa per $r = 1$ e decrescente, quindi può annullarsi in un punto interno all'intervallo $(x_0, 1)$ nel quale cambia segno da positivo a negativo e che quindi è punto di massimo per la soluzione ϕ; allora, ϕ è positiva in $(x_0, 1)$ se e solo se risulta: $\phi(x_0) \geq 0$. Dalla (34), d'altra parte, ricordando la funzione σ del lemma 2 e posto $\hat{c} = \sigma(x_0)$, segue che la condizione $\phi(x_0) \geq 0$ equivale alla condizione $c \leq \hat{c}(< 0)$.

Se $c \in (-1, \hat{c}]$, allora, la soluzione ϕ del problema (27) ha segno costante, positivo, nell'intervallo $(x_0, 1)$: quindi $h = \alpha$ in $(x_0, 1)$ e dalla (30) si ottiene:

$$1 - \frac{\phi'(x_0)}{x_0} = 2 - (c + 1)x_0^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{35}$$

che si annulla per $c = 2x_0^{\frac{1}{\alpha}} - 1$. Sempre per il Lemma 2, se $\alpha < \overline{\alpha}$, questo valore di c appartiene proprio all'intervallo $(-1, \hat{c})$ (condizione (25) con $x = x_0$). Dunque, anche in questo intervallo esiste un valore di c per il quale la soluzione verifica $\phi'(0) = 0$. $\square$

Abbiamo già osservato che le soluzioni del problema (27) che soddisfano la condizione $\phi'(0) = 0$ sono tutte e sole le soluzioni del problema (23). Dalla Proposizione 2 è allora immediato ottenere il Teorema 8: in particolare, il valore $\overline{\alpha}$ in questo teorema coincide con quello del Lemma 2 per $x = x_0$.

Osservazione. Uno studio più approfondito, che si può trovare in [3], permette di stabilire che il problema (23), nelle ipotesi del teorema 8, ammette esattamente tre soluzioni distinte di classe $C^{1,1}\big([0, 1]\big)$.

Osservazione. Dalla non unicità della soluzione per il problema di Dirichlet per l'operatore K_α, segue anche che la differenza $K_\alpha[u] - K_\alpha[v]$, dove u e v sono funzioni assegnate, in generale non può essere linearizzata, cioè non esiste $L \in \mathscr{L}_\alpha$ tale che $K_\alpha[u] - K_\alpha[v] = L(u - v)$.

5. Conseguenze dell'unicità debole: teorema di non esistenza.

Sia Ω un dominio limitato e regolare contenuto in $\mathbb{R}^m$, $m \geq 3$. Consideriamo il problema di Dirichlet:

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega \quad u = \phi \quad \text{su } \partial\Omega, \tag{36}$$

dove L è un operatore ellittico definito in Ω ed appartenente alla classe $\mathscr{L}_\alpha$, $f \in L^m(\Omega)$ e $\phi \in C(\partial\Omega)$. Se i coefficienti dell'operatore L sono funzioni continue in $\overline{\Omega}$, il problema (36) ammette una ed una sola soluzione $u \in W^{2,m}_{\text{loc}}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Se L è un operatore a coefficienti solo misurabili e limitati, in [2] sono definite soluzioni generalizzate o good solutions:

Definizione 4. *Sia Ω un dominio limitato e regolare in $\mathbb{R}^m$. Una funzione $u \in C_0(\overline{\Omega})$ è una $\{L_n\}$-good solution per il problema* (36) *se esiste una successione $\{L_n\}$ di operatori $L_n = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}^{(n)}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}$ della classe $\mathscr{L}_\alpha$ con coefficienti $a_{ij}^{(n)} \in C(\overline{\Omega})$ tali che:*

a) $\{L_n\}$ converge ad L q.o. in Ω, ossia i coefficienti $a_{i,j}^{(n)}$ convergono q.o. ai coefficienti $a_{i,j}$ dell'operatore L;

b) la successione $\{u_n\}$ delle soluzioni dei problemi di Dirichlet $L_n u = f$ in Ω, $u = \phi$ su $\partial\Omega$ converge ad u uniformemente in $\overline{\Omega}$.

Si può provare, usando le disuguaglianze di Alexandrov-Pucci e di Krylov-Safonov, che ogni problema del tipo (36) ammette almeno una good solution. Il problema dell'unicità debole riguarda la questione dell'unicità di tale soluzione. Una risposta al problema è stata data molto recentemente in [6] mediante un esempio di non unicità: vi sono costruiti, infatti, un operatore L definito nella sfera unitaria Ω in $\mathbb{R}^m$, per $m \geq 3$, ed una funzione $v \in C^2(\partial\Omega)$ tali che il problema $Lu = 0$ in Ω, $u = v$ su $\partial\Omega$ ammette almeno due good solutions, u_1 e u_2 tali che $u_1(0) \neq u_2(0)$.

Tornando al caso di un operatore L regolare, per ogni punto $x \in \Omega$ esiste una funzione $g(x, \cdot)$, detta funzione di Green per il problema di Dirichlet per L in Ω, tale che la soluzione u del problema $Lu = f$ in Ω, $u = 0$ su $\partial\Omega$ si scrive nella forma:

$$u(x) = -\int_\Omega g(x, y) f(y)\, dy. \tag{37}$$

Anche il concetto di funzione di Green si estende ad operatori con coefficienti limitati e misurabili, utilizzando ancora una successione approssimante di operatori regolari.

Definizione 5. *Sia $L \in \mathscr{L}_\alpha$ e sia x un punto assegnato in Ω, dominio limitato e regolare in $\mathbb{R}^m$. Una funzione $g(x, \cdot)$ si dice funzione di Green per L in Ω con polo x se esiste una successione $\{L_n\}$ di operatori in $\mathscr{L}_\alpha$, a coefficienti $a_{i,j}^n$ regolari in Ω, tali che:*

a) $\{L_n\}$ converge ad L q.o. in Ω;

b) la successione $\{g_n(x, \cdot)\}$ delle corrispondenti funzioni di Green converge alla funzione $g(x, \cdot)$ debolmente in $L^{m'}(\Omega)$, con $m' = \frac{m}{m-1}$;

c) se u è una $\{L_n\}$ - good solution del problema (36)*, vale la* (37).

Sia $G(\Omega, L, x)$ l'insieme, non vuoto, delle funzioni di Green dell'operatore L in Ω con polo x: si può dire, allora, che per l'operatore L vale l'unicità debole in Ω se l'insieme $G(\Omega, L, x)$ contiene un solo elemento per ogni $x \in \Omega$. In [4] è dimostrato che l'unicità debole vale in Ω se vale in un punto x qualunque di Ω.

Il seguente teorema stabilisce una relazione tra il problema dell'unicità debole e l'operatore massiminimante P_α^A.

Teorema 9. *Sia* Ω *un dominio limitato in* $\mathbb{R}^m$*, contenente l'origine* 0 *e con frontiera regolare e sia* $L \in \mathscr{L}_\alpha$*. Siano, inoltre,* $g_1(0, y)$ *e* $g_2(0, y)$ *due funzioni di Green nella classe* $G(\Omega, L, 0)$ *ed:*

$$A = \{y \in \Omega : g_1(0, y) \geq g_2(0, y)\}.$$

Il problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} P_\alpha^A[u] = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{38}$$

con termine noto:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{in } A \\ 1 & \text{in } \Omega \setminus A \end{cases}$$

ha soluzione in $W^{2,m}(\Omega)$ *se e solo se* g_1 *e* g_2 *coincidono in* Ω.

Dimostrazione. Supponiamo che il problema (38) abbia una soluzione $u \in W^{2,m}(\Omega)$. Applicando l'operatore L alla funzione u si ottiene:

$$Lu \leq M_\alpha[u] = -1 \quad \text{in } A \quad \text{e} \quad Lu \geq m_\alpha[u] = 1 \quad \text{in } \Omega \setminus A.$$

D'altra parte, poichè $g_1(0, y)$ e $g_2(0, y)$ sono funzioni di Green per L, si ha:

$$u(0) = -\int_\Omega g_1(0, y) Lu(y)\, dy = -\int_\Omega g_2(0, y) Lu(y)\, dy\,.$$

Dunque, deve essere:

$$\int_\Omega [g_1(0, y) - g_2(0, y)] Lu(y)\, dy = 0,$$

cioè:

$$\int_A [g_1(0, y) - g_2(0, y)] Lu(y)\, dy + \int_{\Omega \setminus A} [g_1(0, y) - g_2(0, y)] Lu(y)\, dy = 0.$$

In quest'ultima uguaglianza entrambi gli integrali a primo membro sono minori o uguali a zero (infatti in A, $g_1 - g_2 \geq 0$, mentre $Lu \leq -1$; in $\Omega \setminus A$,

$g_1 - g_2 \leq 0$, mentre $Lu \geq 1$), dunque sono entrambi nulli, il che è possibile se e solo se $g_1 \equiv g_2$ in Ω.

Viceversa, se g_1 e g_2 coincidono in Ω, $A = \Omega$, quindi l'operatore P_α^A coincide con il massimante M_α in Ω ed il termine noto f è costante uguale a -1. I risultati di esistenza per il problema di Dirichlet relativo al massimante, citati nell'introduzione, garantiscono, allora, l'esistenza di una soluzione del problema (38). □

Come conseguenza del teorema precedente e del risultato di non unicità in [6], si deduce che il problema di Dirichlet per l'operatore P_α^A può non avere soluzione in $W^{2,m}$:

Teorema 10. *Sia $m \geq 3$ ed Ω la sfera aperta di raggio 1 e centro l'origine in $\mathbb{R}^m$. Allora, esiste un sottoinsieme A di Ω tale che il problema di Dirichlet* (38) *non ha soluzione in* $W^{2,m}(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia:

$$Lu = 0 \quad \text{in } \Omega \quad u = v \quad \text{su } \partial\Omega$$

il problema considerato in [6] che ammette due good solutions, u_1 e u_2 con $u_1(0) \neq u_2(0)$. Sia $\tilde{v}$ una funzione regolare in $\overline{\Omega}$ e tale che $\tilde{v} = v$ su $\partial\Omega$; definiamo: $v_1 = u_1 - \tilde{v}$ e $v_2 = u_2 - \tilde{v}$. Si ha che v_1 e v_2 verificano lo stesso problema in Ω:

$$Lu = -L\tilde{v} \quad \text{in } \Omega \quad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega;$$

inoltre, $v_1(0) \neq v_2(0)$ in Ω: applicando la formula (37) a v_1 e v_2 ne segue che L ammette almeno due distinte funzioni di Green $g_1(0, \cdot)$ e $g_2(0, \cdot)$ in Ω. Scegliendo l'insieme A come nel Teorema 9, quindi, il problema (38) non ha soluzione in $W^{2,m}(\Omega)$. □

BIBLIOGRAFIA

[1] L.A. Caffarelli, *Interior a priori estimates for solutions of fully non linear equations,* Annals of Mathematics, 130 (1989), pp. 189-213.

[2] M.C. Cerutti - L. Escauriaza - E.B. Fabes, *Uniqueness in the Dirichlet problem for some elliptic operators with discontinuous coefficients,* Ann. Mat. Pura Appl., (IV) 163 (1993), pp. 161-180.

[3] C. Giannotti, *Operatori ellittici massiminimanti,* Tesi di dottorato, Università di Firenze, 1996.

[4] D. Gilbarg - N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order,* 2nd Ed., Springer, New York, 1983.

[5] N.V. Krylov, *On one-point weak uniqueness for elliptic equations,* Communications in Partial Differential Equations, 17 (11 - 12) (1992), pp. 1759-1784.

[6] N. Nadirashvili, *Nonuniqueness in the martingale problem and the Dirichlet problem for uniformly elliptic operators,* Pubblicazioni dell'Istituto di Analisi globale e Applicazioni di Firenze (C.N.R.), Serie Verde n.45, 1995.

[7] C. Pucci, *Operatori ellittici estremanti,* Ann. Mat. Pura Appl., (IV) 72 (1966), pp. 141-170.

[8] M.V. Safonov, *Nonlinear elliptic equations of second order,* Pubblicazione del Dipartimento di Matematica Applicata "G. Sansone" Università degli Studi di Firenze n.11, 1991.

[9] G. Talenti, *Equazioni lineari ellittiche in due variabili,* Le Matematiche, 21 (1966), pp. 339-376.

Istituto Analisi Globale e Applicazioni (CNR),
Via Santa Marta 13/A,
50139 Firenze (ITALY)