LE MATEMATICHE
Vol. LI (1996) – Fasc. II, pp. 299–313

UN NUOVO INTEGRALE PER IL PROBLEMA DELLE PRIMITIVE

BENEDETTO BONGIORNO

A Francesco Guglielmino nel Suo 70^{mo} *compleanno*

We introduce a new type of integral, which solves the problem of finding antiderivatives but which does not contain the improper integral.

1. Introduzione.

Il problema delle primitive è stato risolto da A. Denjoy nel 1912 e, con metodo diverso, da O. Perron nel 1914, mediante un integrale non assolutamente convergente, detto *integrale di Denjoy-Perron*.

J. Kurzweil in [12] e R. Henstock in [9] hanno fornito una nuova soluzione per il problema delle primitive, facendo uso di un integrale di tipo Riemann, equivalente all'integrale di Denjoy-Perron e noto come *integrale di Henstock-Kurzweil*.

Nell'intento di estendere l'integrale di Henstock-Kurzweil a $\mathbb{R}^n$, onde ottenere una versione del teorema di Gauss-Green, più generale di quella consentita dall'integrale di Lebesgue, W.F. Pfeffer ha introdotto in [20] un integrale che, sulla retta reale, pur consentendo la soluzione del problema delle primitive, risulta strettamente compreso tra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Denjoy-Perron (vedi [1]).

Entrato in Redazione il 23 aprile 1997.

Il fatto che l'integrale di Denjoy-Perron sia "grande" per il problema delle primitive pone la questione di cercare il più "piccolo" integrale che integra le derivate e che include l'integrale di Lebesgue. A.M. Bruckner, R.J. Fleissner e J. Foran hanno dato in [4] una caratterizzazione descrittiva di tale integrale.

Scopo di questa nota è di migliorare il risultato di W.F. Pfeffer. Nel n. 3 viene introdotto il C-integrale (di tipo Henstock-Kurzweil) che è strettamente compreso tra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Pfeffer e che consente la soluzione del problema delle primitive. È interessante osservare che il C-integrale non comprende l'integrale improprio di Riemann, sebbene la funzione

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \text{sen} \dfrac{1}{x^2}\,, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

che fornisce l'esempio più noto di primitiva non ricostruibile mediante l'integrale di Lebesgue, sia ricostruibile mediante l'integrale improprio e sebbene non solo l'integrale di Denjoy-Perron ma anche l'integrale di Pfeffer comprendano l'integrale improprio di Riemann.

2. Premesse.

L'insieme dei numeri reali è denotato con $\mathbb{R}$. Dato $E \subset \mathbb{R}$, il diametro e la misura secondo Lebesgue di E vengono denotati con $d(E)$ e $|E|$, rispettivamente. Sia f una funzione reale definita su un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Se $I = [\alpha, \beta]$ si pone $f(I) = f(\beta) - f(\alpha)$. Dato un punto $x \in [a, b]$ ed un intervallo $I \subset [a, b]$ si pone

$$r(I, x) = \frac{|I|}{d(I \cup \{x\})}.$$

Una collezione di coppie *intervallo-punto* $P = \{(I_1, x_1), \cdots, (I_p, x_p)\}$ è detta *partizione* se gli intervalli $I_1, \dots, I_p$ sono a due a due con parte interna disgiunta. Data una partizione $P = \{(I_1, x_1), \dots, (I_p, x_p)\}$ si pone

$$c(P) = \sum_{i=1}^{p} d(I_i \cup \{x_i\}).$$

Se $\bigcup_{i=1}^{p} I_i = [a, b]$, allora si dice che P è una partizione di $[a, b]$.

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ed una partizione $P = \{(I_1, x_1), \dots, (I_p, x_p)\}$ si pone

$$\sigma(f, P) = \sum_{i=1}^{p} f(x_i)\,|I_i|.$$

Dicesi *gage* ogni funzione positiva $\delta(x)$ definita su $[a, b]$. Dati una costante $\varepsilon > 0$, una *gage* δ ed una partizione $P = \{(I_1, x_1), \cdots, (I_p, x_p)\}$ si dice che P è

1) δ*-fine* se $d(I_i \cup \{x_i\}) < \delta(x_i)$, per $i = 1, 2, \cdots, p$;
2) ε*-regolare* se $r(I_i, x_i) > \varepsilon$, per $i = 1, 2, \cdots, p$;
3) $1/\varepsilon$*-controllata* se $c(P) < 1/\varepsilon$;
4) *ancorata* su E se $x_i \in E$, per $i = 1, 2, \cdots, p$;
5) *di Perron* se $x_i \in I_i$, per $i = 1, 2, \cdots, p$.

Si noti che se P è una partizione di Perron di un intervallo I allora $c(P) = |I|$.

Definizione 1. Si dice che una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è *integrabile secondo McShane* su $[a, b]$ se esiste una costante (detta *integrale di McShane* di f su $[a, b]$ e denotata col simbolo $(Mc) \int_a^b f(x)\, dx$) tale che: dato $\varepsilon > 0$ esiste una *gage* δ soddisfacente la condizione

$$\left| \sum_{i=1}^{p} f(x_i)|I_i| - (Mc) \int_a^b f(x)\, dx \right| < \varepsilon,$$

per ogni partizione $\{(I_1, x_1), \ldots, (I_p, x_p)\}$ δ-fine di $[a, b]$.

L'integrale di McShane è equivalente all'integrale di Lebesgue (vedi [17], [18], [19]).

Definizione 2. Si dice che una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è *integrabile secondo Henstock-Kurzweil* su $[a, b]$ se esiste una costante (detta *integrale di Henstock-Kurzweil* di f su $[a, b]$ e denotata col simbolo $(HK) \int_a^b f(x)\, dx$) tale che: dato $\varepsilon > 0$ esiste una *gage* δ soddisfacente la condizione

$$\left| \sum_{i=1}^{p} f(x_i)|I_i| - (HK) \int_a^b f(x)\, dx \right| < \varepsilon,$$

per ogni partizione $\{(I_1, x_1), \ldots, (I_p, x_p)\}$ di $[a, b]$ che sia δ-fine e di Perron.

L'integrale di Henstock-Kurzweil è equivalente all'integrale di Denjoy-Perron (vedi [9], [10], [11]).

Definizione 3. Si dice che una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è *integrabile secondo Pfeffer* su $[a, b]$ se esiste una costante (detta *integrale di Pfeffer* di f su $[a, b]$

e denotata col simbolo $(Pf)\int_a^b f(x)\,dx$) tale che: dato $\varepsilon > 0$ esiste una *gage* δ soddisfacente la condizione

$$\left|\sum_{i=1}^{p} f(x_i)|I_i| - (Pf)\int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

per ogni partizione $\{(I_1, x_1), \dots, (I_p, x_p)\}$ δ-fine e ε-regolare di $[a, b]$.

3. Il C-integrale.

Definizione 4. Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, diciamo che f è *C-integrabile* su $[a, b]$ se esiste una costante (detta *C-integrale* di f su $[a, b]$ e denotata col simbolo $(C)\int_a^b f(x)\,dx$) tale che: per ogni $0 < \varepsilon < \frac{1}{b-a}$ esiste una *gage* δ soddisfacente la condizione

$$\left|\sum_{i=1}^{p} f(x_i)|I_i| - (C)\int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

per ogni partizione $\{(I_1, x_1), \dots, (I_p, x_p)\}$ δ-fine e $1/\varepsilon$-controllata di $[a, b]$.

Segue direttamente dalle definizioni che ogni funzione integrabile secondo McShane è C-integrabile (con $(Mc)\int_a^b f(x)\,dx = (C)\int_a^b f(x)\,dx$) e che ogni funzione C-integrabile è integrabile secondo Pfeffer (con $(C)\int_a^b f(x)\,dx = (Pf)\int_a^b f(x)\,dx$).

Il seguente esempio mostra che

1) il C-integrale non coincide con l'integrale di Pfeffer,
2) il C-integrale non comprende l'integrale improprio di Riemann.

Esempio. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(-2)^n}{n}, & \text{se} \quad x \in \left[\frac{n}{2^n}, \frac{n+1}{2^n}\right], \quad n \geq 3 \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

Per ogni $k \geq 3$, f è integrabile secondo Riemann su $[k/2^k, 1]$, con

$$\int_{k/2^k}^{1} f(x)\,dx = \sum_{n=3}^{k} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Quindi f è integrabile in senso improprio su [0, 1] e, tenuto conto delle Proposizioni 2.8 e 3.5 di [1], è integrabile secondo Pfeffer con

$$(Pf)\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_{k/2^k}^1 f(x)\,dx = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}.$$

Ora mostriamo che $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ non è il C-integrale di f su [0, 1]; pertanto f non è C-integrabile su $[a, b]$. A tal fine, dato $0 < \varepsilon < 1$ e data una generica *gage* δ, fissiamo m e k tali che

$$\frac{2m+1}{2^{2m}} < \delta(0), \tag{1}$$

$$\sum_{n=m}^{m+k}\frac{2n+1}{2^{2n}} + \frac{2(m+k)}{2^{2(m+k)}} < \frac{1}{\varepsilon} - 1, \tag{2}$$

$$\sum_{n=m}^{m+k}\frac{1}{n} > 4\varepsilon \quad \text{e} \quad \left|\sum_{n>2(m+k)}(-1)^n\frac{1}{n}\right| < \varepsilon. \tag{3}$$

Utilizzando il Lemma di Cousin (vedi [21], Prop. 1.2.4), determiniamo una partizione Q^*, di Perron e δ-fine, di [1/2, 1]. Determiniamo, inoltre, per ogni $3 \le n < 2(m+k)$, $n \neq 2m, 2(m+1), \cdots, 2(m+k-1)$, delle partizioni P_n e Q_n, di Perron e δ-fini, di $[n/2^n, (n+1)/2^n]$ e $[(n+1)/2^n, (n-1)/2^{n-1}]$, rispettivamente. La partizione

$$P = \left(\left[0, \frac{2(m+k)}{2^{2(m+k)}}\right], 0\right) \cup P^* \cup Q^* \cup \bigcup_{n=m}^{m+k}\left(\left[\frac{2n}{2^{2n}}, \frac{2n+1}{2^{2n}}\right], 0\right),$$

ove

$$P^* = \bigcup_{\substack{3\le n<2(m+k)\\ n\neq 2m,\dots,2(m+k-1)}} (P_n \cup Q_n),$$

è una partizione di [0, 1], δ-fine e $1/\varepsilon$-controllata. Infatti, $P^* \cup Q^*$ è δ-fine, per definizione, e $P \setminus (P^* \cup Q^*)$ è δ-fine per la (1). Inoltre, siccome Q^*, P_n e Q_n sono partizioni di Perron, dalla (2) segue

$$c(P) = \frac{2(m+k)}{2^{2(m+k)}} + c(P^*) + c(Q^*) + \sum_{n=m}^{m+k}\frac{2n+1}{2^{2n}} <$$

$$< 1 + \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{1}{\varepsilon}\,.$$

D'altronde

$$\sigma(f, Q^*) = 0, \quad \sigma(f, P_n) = (-1)^n \frac{1}{n}, \quad \sigma(f, Q_n) = 0.$$

Da cui

$$\sigma(f, P) = \sum_{\substack{3 \le n < 2(m+k) \\ n \ne 2m, \dots, 2(m+k-1)}} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Pertanto, dalla (3) discende

$$\left| \sigma(f, P) - \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=m}^{m+k} \frac{1}{2n} - \left| \sum_{n > 2(m+k)} (-1)^n \frac{1}{n} \right| >$$

$$> 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon \,.$$

Quindi, essendo δ una *gage* arbitraria, $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ non è il C-integrale di f su$[a, b]$; dunque f non è C-integrabile su $[a, b]$.

4. C-integrabilità delle derivate.

Nell'introduzione è stato richiamato il noto esempio di funzione derivabile in tutti i punti di [0, 1] con derivata non sommabile, ma integrabile in senso improprio. Anche se si è appena visto che il C-integrale non comprende l'integrale improprio, tutte le derivate sono C-integrabili.

Teorema 1. *Se F è derivabile in tutti i punti di $[a, b]$, allora F' è C-integrabile su $[a, b]$ e risulta*

$$(C) \int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, per ogni $x \in [a, b]$ esiste una costante $\delta(x) > 0$ tale che

$$\left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - F'(x) \right| < \frac{\varepsilon^2}{2}, \tag{4}$$

per ogni $y \in [a, b]$ soddisfacente la condizione $|y - x| < \delta(x)$. Sia $I = (\alpha, \beta)$ un intervallo tale che $d(I \cup \{x\}) < \delta(x)$. Utilizzando la (4) si ottiene

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad | F(I) - F'(x)|I| \,| &\leq |F(\beta) - F(x) - F'(x)(\beta - x)| + \\
&+ |F(\alpha) - F(x) - F'(x)(\alpha - x)| \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon^2}{2}|\beta - x| + \frac{\varepsilon^2}{2}|\alpha - x| \leq \varepsilon^2 d(I \cup \{x\}).
\end{aligned}
$$

Sia pertanto $\{(I_1, x_1), \ldots, (I_p, x_p)\}$ una partizione δ-fine e $1/\varepsilon$-controllata di $[a, b]$. Dalla (5) segue

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^{p} F'(x_i)|I_i| - (F(b) - F(a)) \right| &\leq \sum_{i=1}^{p} |F'(x_i)|I_i| - F(I_i)| \leq \\
&\leq \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{p} d(I_i \cup \{x_i\}) \leq \\
&\leq \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

5. Caratterizzazione del C-integrale indefinito.

Utilizzando tecniche standard (vedi [16], Chapter 2) si prova che:

Teorema 2. *Se f è C-integrabile su $[a, b]$, allora*

(a) *f è C-integrabile su $[a, x]$, per ogni $a < x < b$;*
(b) *la funzione $F(x) = (C)\int_a^x f(t)\,dt$ è continua;*
(c) *dato $\varepsilon > 0$ esiste una gage δ tale che*

$$\sum_{i=1}^{p} |f(x_i)|I_i| - F(I_i)| < \varepsilon,$$

per ogni partizione $\{(I_1, x_1), \cdots, (I_p, x_p)\}$ δ-fine e $1/\varepsilon$-controllata di $[a, b]$.

Definizione 5. Sia $E \subset [a, b]$ e sia F una funzione continua su $[a, b]$. Si dice che F è AC_c su E se dato $\varepsilon > 0$ esistono una costante $\eta > 0$ ed una *gage* δ tali che $\sum_i |F(I_i)| < \varepsilon$ per ogni partizione $\{(I_1, x_1), \ldots, (I_p, x_p)\}$ δ-fine, $1/\varepsilon$-controllata, ancorata su E e soddisfacente la condizione $\sum_i |I_i| < \eta$.

Definizione 6. Una funzione continua F si dice ACG_c su $[a, b]$ se esiste una successione di insiemi misurabili $\{E_n\}$ tale che $[a, b] = \cup_n E_n$ e tale che F è AC_c su E_n, per ogni n.

R.A. Gordon ha introdotto in [8] la nozione di funzione ACG_δ e ha dimostrato che una funzione F è ACG_δ su $[a, b]$ se e solo se esiste f, integrabile secondo Henstock-Kurzweil su $[a, b]$, tale che $F(x) - F(a) = (HK) \int_a^x f$, per ogni $x \in [a, b]$.

Segue direttamente dalle definizioni che se F è ACG_c allora è ACG_δ.

Lemma 1. *Sia F una funzione ACG_c su $[a, b]$ e sia $E \subset [a, b]$ con $|E| = 0$. Dato $\varepsilon > 0$ esiste una gage δ su $[a, b]$ tale che*

$$\sum_{i=1}^{p} |F(I_i)| < \varepsilon,$$

per ogni partizione $\{(I_1, x_1), \dots, (I_p, x_p)\}$ δ-fine, $1/\varepsilon$-controllata ed ancorata su E.

Dimostrazione. Sia E_n, $n = 1, 2, \dots,$ una successione di insiemi a due a due disgiunti tale che $[a, b] = \cup_n E_n$ e tale che F è AC_c su ogni E_n. Dato $\varepsilon > 0$, sia δ_n una gage tale che

$$\sum_{i=1}^{q} |F(I_i)| < \frac{\varepsilon}{2^n},$$

per ogni partizione $\{(J_1, x_1), \dots, (J_p, x_p)\}$ δ_n-fine, $1/\varepsilon$-controllata ed ancorata su $E \cap E_n$. Per ogni $x \in [a, b]$ esiste un unico naturale n tale che $x \in E_n$. Poniamo $\delta(x) = \delta_n(x)$. Sia $\{(I_1, x_1), \dots, (I_p, x_p)\}$ una partizione δ-fine, $1/\varepsilon$-controllata ed ancorata su E. Allora

$$\sum_{i=1}^{p} |F(I_i)| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x_i \in E_n} |F(I_i)| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Teorema 3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione F sia ACG_c su $[a, b]$ è che esista f, C-integrabile su $[a, b]$, tale che*

$$F(x) - F(a) = (C) \int_a^x f(t)\, dt, \quad \textit{per ogni} \quad x \in [a, b]. \tag{6}$$

Dimostrazione. *Necessità*. Se F è ACG_c su $[a, b]$ allora è ivi ACG_δ. Pertanto F è quasi ovunque derivabile in $[a, b]$ (vedi [8], Theorem 6 e [22], Chapter VII, Theorem 7.2). Sia E l'insieme dei punti $x \in [a, b]$ tali che F non è derivabile in x. Siccome $|E| = 0$, dato $\varepsilon > 0$ esiste, per il lemma 1, una gage τ su $[a, b]$ tale che

$$\sum_{i=1}^{p} |F(I_i)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

per ogni partizione $\{(J_1, x_1), \cdots, (J_p, x_p)\}$ τ-fine, $1/\varepsilon$-controllata ed ancorata su E. Se F è derivabile in x, adattando opportunamente il ragionamento che precede la (5), si prova l'esistenza di $\gamma(x) > 0$ tale che

$$|F(I) - F'(x)|I|| < \frac{\varepsilon^2 d(I \cup \{x\})}{2},$$

per ogni intervallo I soddisfacente la condizione $d(I \cup \{x\}) < \gamma(x)$. Posto

$$\delta(x) = \begin{cases} \tau(x) & \text{se} \quad x \in E \\ \gamma(x) & \text{se} \quad x \notin E \end{cases}$$

e posto

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in E \\ F'(x) & \text{se} \quad x \notin E, \end{cases}$$

per ogni partizione $P = \{(I_1, x_1), \ldots, (I_p, x_p)\}$ δ-fine ed $1/\varepsilon$-controllata, si ha

$$\sum_{i=1}^{p} |f(x_i)|I_i| - F(I_i)| < \sum_{x_i \in E} |F(I_i)| + \sum_{x_i \notin E} |F'(x_i)|I_i| - F(I_i)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{x_i \notin E} \frac{\varepsilon^2 d(I_i \cup \{x_i\})}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Pertanto, nel caso particolare che P sia una partizione di $[a, x]$, si ha

$$\left| \sum_{i=1}^{p} f(x_i)|I_i| - (F(x) - F(a)) \right| \leq \sum_{i=1}^{p} |f(x_i)|I_i| - F(I_i)| < \varepsilon.$$

Resta così provato che f è C-integrabile su $[a, b]$ e che vale la (6).

Sufficienza. Per ogni naturale n, poniamo $E_n = \{x \in [a, b] : |f(x)| \leq n\}$. Allora $[a, b] = \cup_n E_n$. Mostreremo che F è AC_c su E_n, per ogni n. Per il Teorema 2(c), dato $\varepsilon > 0$, esiste una *gage* δ tale che

$$\sum_{i=1}^{p} |f(x_i)|I_i| - F(I_i)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

per ogni partizione $P = \{(I_1, x_1), \ldots, (I_p, x_p)\}$ δ-fine e $1/\varepsilon$-controllata di $[a, b]$. Supponiamo che P sia ancorata su E_n e che $\sum_i |I_i| < \varepsilon/2n$. Allora

$$\sum_{i=1}^{p} |F(I_i)| \leq \sum_{i=1}^{p} |f(x_i)|I_i| - F(I_i)| + \sum_{i=1}^{p} |f(x_i)| \cdot |I_i| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + n \sum_i |I_i| < \varepsilon.$$

Pertanto F è ACG_c su $[a, b]$.

6. Teoremi di convergenza.

Per il C-integrale valgono teoremi sulla convergenza monotona, sulla convergenza dominata e sulla convergenza controllata, analoghi agli omonimi teoremi validi per gli integrali di Henstock-Kurzweil e di Pfeffer.

Teorema sulla convergenza monotona. *Sia* $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \cdots$ *una successione di funzioni C-integrabili su* $[a, b]$ *tale che* $\lim_n (C)\int_a^b f_n$ *esiste finito. Allora la funzione* $f(x) = \lim_n f_n(x)$ *è C-integrabile su* $[a, b]$ *e risulta*

$$(C)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} (C)\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Dimostrazione. Siccome ogni funzione C-integrabile è integrabile secondo Henstock-Kurzweil, dal Corollario 6.3.5 di [21] segue che ogni funzione C-integrabile non negativa è sommabile e, dal teorema 6.3.3 di [21], segue che ogni funzione C-integrabile è misurabile. Allora si consideri la successione di funzioni non negative

$$0 \leq f_2 - f_1 \leq f_3 - f_1 \leq \cdots f_n - f_1 \leq \cdots$$

Per il teorema sulla convergenza monotona relativo all'integrale di Lebesgue, risulta

$$(Mc)\int_a^b \{f(x) - f_1(x)\}\,dx = \lim_{n\to\infty} (Mc)\int_a^b \{f_n(x) - f_1(x)\}\,dx. \tag{7}$$

Intanto, siccome l'integrale di Lebesgue è equivalente all'integrale di McShane e siccome ogni funzione integrabile secondo McShane è C-integrabile, per ogni

n si ha

$$(Mc)\int_a^b \{f_n(x) - f_1(x)\}\,dx = (C)\int_a^b \{f_n(x) - f_1(x)\}\,dx =$$
$$= (C)\int_a^b f_n(x)\,dx - (C)\int_a^b f_1(x)\,dx.$$

Passando al limite al divergere di n e, tenuto conto che $\lim_n (C)\int_a^b f_n$ esiste finito, dalla (7) segue che $f - f_1$ è sommabile, quindi C-integrabile. Allora $f = (f - f_1) + f_1$ è C-integrabile. Dunque

$$(C)\int_a^b f(x)\,dx = (C)\int_a^b \{f(x) - f_1(x)\}\,dx + (C)\int_a^b f_1(x)\,dx =$$
$$= \lim_{n\to\infty} (C)\int_a^b f_n(x)\,dx - (C)\int_a^b f_1(x)\,dx +$$
$$+ (C)\int_a^b f_1(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} (C)\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Teorema sulla convergenza dominata. *Sia $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ una successione di funzioni misurabili tale che*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *q.o. in* $[a, b]$*;*

(ii) $g(x) \leq f_n(x) \leq h(x)$, *q.o. in* $[a, b]$, *con* g *e* h *funzioni C-integrabili su* $[a, b]$;

allora f *è C-integrabile su* $[a, b]$ *e risulta*

$$(C)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} (C)\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Dimostrazione. Dalla (ii) segue $0 \leq f_n - g \leq h - g$, q.o. in $[a, b]$. Intanto $h - g$ è sommabile, in quanto è C-integrabile non negativa. Allora, per il teorema sulla convergenza dominata relativo all'integrale di Lebesgue, $f - g$ è sommabile su $[a, b]$ e risulta

$$(Mc)\int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx = \lim_{n\to\infty} (Mc)\int_a^b \{f_n(x) - g(x)\}\,dx.$$

Pertanto, dall'identità $f = (f - g) + g$, segue che f è C-integrabile su $[a, b]$. Infine

$$(C)\int_a^b f(x)\,dx = (C)\int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx + = (C)\int_a^b g(x)\,dx =$$

$$=(Mc)\int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx + (C)\int_a^b g(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(C)\int_a^b f_n(x)\,dx - (C)\int_a^b g(x)\,dx +$$

$$+ (C)\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}(C)\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Il teorema sulla convergenza controllata è stato dimostrato in [3], [5], [8], [14] relativamente all'integrale di Henstock-Kurzweil e in [3] relativamente all'integrale di Pfeffer.

Definizione 7. Si dice che una successione di funzioni F_n è *uniformemente* ACG_c su $[a, b]$ se $[a, b] = \cup_h E_h$ e se, dato $\varepsilon > 0$, esistono, per ogni h, una costante $\eta_h > 0$ ed una *gage* δ_h tali che

$$\sup_n \sum_i |F_n(I_i)| < \varepsilon,$$

per ogni partizione $\{(I_1, x_1), \dots, (I_p, x_p)\}$ δ_h-fine, $1/\varepsilon$-controllata, ancorata su E_h e soddisfacente la condizione $\sum_i |I_i| < \eta_h$.

Definizione 8. Si dice che una successione di funzioni F_n è *uniformemente* ACG_δ su $[a, b]$ se $[a, b] = \cup_h E_h$ e se, dati $\varepsilon > 0$ e $h \in \mathbb{N}$, esistono una costante $\eta_h > 0$ ed una *gage* δ_h tali che $\sup_n \sum_i |F_n(I_i)| < \varepsilon$, per ogni partizione $\{(I_1, x_1), \dots, (I_p, x_p)\}$ δ_h-fine, ancorata su E_h e soddisfacente la condizione $\sum_i |I_i| < \eta_h$.

Segue direttamente dalle definizioni che ogni successione di funzioni uniformente ACG_c è uniformemente ACG_δ.

Teorema sulla convergenza controllata. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni C-integrabili su $[a, b]$, soddisfacente le condizioni:*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ q.o. in $[a, b]$;
(ii) la successione $F_n(x) = (C)\int_a^x f_n(t)\,dt$ è uniformemente ACG_c su $[a, b]$.

Allora f è C-integrabile su $[a, b]$ e risulta

$$(C)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}(C)\int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{8}$$

Dimostrazione. Siccome ogni funzione C-integrabile è integrabile secondo Henstock-Kurzweil e siccome ogni successione uniformemente ACG_c è uniformemente ACG_δ, dal Teorema 4.1 di [3] segue che f è integrabile secondo Henstock-Kurzweil su $[a, b]$ e

$$(9) \qquad (HK)\int_a^x f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}(HK)\int_a^x f_n(t)\,dt, \quad \text{per ogni} \quad x \in [a, b].$$

Inoltre, per la (ii), esiste una successione $\{E_h\}$ di insiemi misurabili soddisfacente le condizioni:

- $[a, b] = \cup_h E_h$,
- dato $\varepsilon > 0$ esistono, per ogni h, una costante $\eta_h > 0$ ed una *gage* δ_h tali che

$$(10) \qquad \sup_n \sum_i |F_n(I_i)| < \varepsilon,$$

per ogni partizione $\{(I_1, x_1), \dots, (I_p, x_p)\}$ δ_h-fine, $1/\varepsilon$-controllata, ancorata su E_h con $\sum_i |I_i| < \eta_h$.

Allora, posto $F(x) = (HK)\int_a^x f(t)\,dt$ e, tenuto conto che

$$F_n(x) = (C)\int_a^x f_n(t)\,dt = (HK)\int_a^x f_n(t)\,dt,$$

dalla (9) segue $F(x) = \lim_n F_n(x)$, per ogni $x \in [a, b]$. Quindi, per ogni h e per ogni partizione $\{(I_1, x_1), \dots, (I_p, x_p)\}$ δ_h-fine, $1/\varepsilon$-controllata, ancorata su E_h e soddisfacente la condizione $\sum_i |I_i| < \eta_h$, dalla (10) segue

$$\sum_{i=1}^p |F(I_i)| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^p |F_n(I_i)| \le \varepsilon.$$

Pertanto F è ACG_c su $[a, b]$ e, per il Teorema 3, $F(x) = (C)\int_a^x f(t)\,dt$ per ogni $x \in [a, b]$. Allora la (8) segue dalla (9).

BIBLIOGRAFIA

[1] B. Bongiorno - M. Giertz - W.F. Pfeffer, *Some nonabsolutely convergent integrals in the real line,* Boll. U.M.I., 6-B (1992), pp. 371-402.

[2] B. Bongiorno - W.F. Pfeffer, *A concept of absolute continuity and a Riemann type integral,* Comm. Math. Univ. Carolinae, 33 (1992), pp. 189-196.

[3] B. Bongiorno - L. Di Piazza, *Convergence theorems for generalized Riemann Stieltjes integrals,* Real Analysis Exchange, 17 (1991-92), pp. 339-362.

[4] A.M. Bruckner - R.J. Fleissner - J. Foran, *The minimal integral which includes Lebesgue integrable functions and its derivatives,* Coll. Math., 50 (1986), pp. 289-293.

[5] V. Chelidze - A.G. Dzhvarsheiishivili, *Theory of the Denjoy integral and some of its applications,* (in russo), Tbilisi 1978.

[6] J. Foran, *Differentiation and Lusin's condition (N),* Real Analysis Exchange, 3 (1977), pp. 34-37.

[7] J. Foran, *An extension of the Denjoy integral,* Proc. Amer. Math. Soc., 49 (1975), pp. 359-365.

[8] R.A. Gordon, *A descriptive characterization of the generalized Riemann integral,* Real Analysis Exchange, 15 (1989-90), pp. 397-400.

[9] R. Henstock, *Theory of integration,* Butterworth, London, 1963.

[10] R. Henstock, *Lectures on the Theory of integration,* World Scientific, Singapore, 1988.

[11] R. Henstock, *The general Theory of integration,* Clarendon Press, Oxford, 1991.

[12] J. Kurzweil, *Generalized ordinary differential equations and continuous dependance on a parameter,* Czechoslovak Math. J., 82 (1957), pp. 418-446.

[13] J. Kurzweil, *Nichtabsolut konvergente Integrale,* Teubner, Leibzig, 1980.

[14] P.Y. Lee - T.S. Chew, *A better convergence theorem for Henstock integrals,* Bull. London Math. Soc., 17 (1985), pp. 557-564.

[15] P.Y. Lee - T.S. Chew, *A Riesz-type definition of the Denjoy integral,* Real Analysis Exchange, 11 (1985), pp. 221-227.

[16] R.M. McLeod, *The generalized Riemann integral,* Math. Asso. America, Carus Math. Monographs, 20, Washington D.C., 1980.

[17] E.J. McShane, *A Riemann-type integral that includes Lebesgue-Stieltjes, Bochner and stochastic integrals,* Mem. American Math. Soc., 88, 1969.

[18] E.J. McShane, *A unified theory of integration,* Amer. Math. Monthly, 80 (1973), pp. 349-359.

[19] E.J. McShane, *Unified integration,* Academic Press, New York, 1983.

[20] W.F. Pfeffer, *The Gauss-Green theorem,* Adv. in Math., 87 (1991), pp. 93-147.

[21] W.F. Pfeffer, *The Riemann approach to integration,* Cambridge Univ. Press, New York, 1993.

[22] S. Saks, *Theory of the integral,* Dover Publications, New York, 1964.

Dipartimento di Matematica,
Via Archirafi 34,
90123 PALERMO (ITALY)
e-mail: bongiorno@ipamat.math.unipa.it