LE MATEMATICHE
Vol. LI (1996) – Fasc. II, pp. 315–333

UN' ESTENSIONE DEL METODO DI CONTINUITA'

ALBINO CANFORA

A Francesco Guglielmino con ammirazione ed affetto

0. Introduzione.

Uno degli strumenti più efficaci dell'Analisi Funzionale è il così detto "metodo di continuità":

Siano X ed Y due spazi di Banach e siano $\mathcal{A}_0$ ed $\mathcal{A}_1$ due operatori lineari e continui da X in Y; esista inoltre $c > 0$ tale che:

$$(a) \qquad \forall \theta \in [0, 1], \quad \forall x \in X, \quad \|x\|_X \leq c\|[\mathcal{A}_0 + \theta(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0)]x\|_Y;$$

allora se $\mathcal{A}_0$ è biettivo da X in Y, anche $\mathcal{A}_1$ lo è.

Ma che si può dire – ferma restando l'ipotesi *(a)* – se l'operatore $\mathcal{A}_0$ [pur sempre iniettivo, per via di (a)] risulta non più suriettivo ma soltanto fredholmiano (con indice ovviamente negativo) tra gli spazi X ed Y? Si può forse dire che risulta fredholmiano anche $\mathcal{A}_1$ (e con lo stesso indice di $\mathcal{A}_0$)? Non mi risulta che tale questione sia stata affrontata; per cui mi è sembrato opportuno occuparmene nella presente nota, sia pur limitatamente al caso degli spazi di Hilbert. Si

Entrato in Redazione il 23 aprile 1997.

Key words: Method of continuity; Elliptic equations with discontinuous coefficients.
A.M.S. Classification: 35J25.

vede (Teorema 2.1) che è affermativa la risposta al quesito dianzi considerato: effettivamente l'ipotesi (a) assicura la conservazione dell'indice dall'operatore $\mathcal{A}_0$ all'operatore $\mathcal{A}_1$.

Come applicazione si studia, nell'aperto $\Omega =]0, \pi[^3$, il problema:

$$\begin{cases} \text{(b)} \qquad \mathcal{L}u \equiv -\sum_i^{1\ldots 3} a_i(x) D^2_{x_i} u + \lambda u = f \in L^2(\Omega), \\ \text{(b}'\text{)} \qquad u \in W^{2,2}(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = 0,\ u\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right) = \alpha \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

nelle ipotesi (alla Miranda):

$$\text{(c)} \qquad a_i \in W^{1,3}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),\quad \lambda \text{ “abbastanza grande”}.$$

Anche qui, non mi pare che il problema (b) - (b$'$) sia stato considerato in ipotesi di tipo (c). Ebbene, si trova (Teorema 3.3) che esiste una $\psi_1 \in L^2(\Omega)$ tale che il problema (b) - (b$'$) risulti risolubile (univocamente) per ogni $f \in L^2(\Omega)$ verificante la condizione di compatibilità:

$$\int_\Omega \psi_1(x)\, f(x)\, dx = \int_\Omega \psi_1(x)\, \mathcal{L}w(x)\, dx,$$

dove w è una funzione verificante (b$'$) arbitrariamente prefissata [il secondo membro *non* varia al variare di w tra le funzioni che verificano (b$'$)].

Per ottenere il Teorema 3.3 si considera inizialmente il problema (b) - (b$'$) nel caso: $\alpha = 0$; è allora, infatti, che risulta direttamente applicabile il Teorema 2.1.

1. Alcuni richiami.

Come è noto (cfr. ad esempio [3], p. 106) se X ed Y sono due spazi di Banach si denota con $B(X, Y)$ lo spazio degli operatori lineari e continui da X in Y; un operatore $A \in B(X, Y)$ si dice fredholmiano se verifica le condizioni:

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} \alpha(A) \equiv \dim N(A) < +\infty,\ \ R(A) \text{ chiuso in } Y, \\ \beta(A) \equiv \dim N(A') < +\infty, \end{cases}$$

[dove, detti rispettivamente Y' ed X' i duali di Y e di X, l'operatore $A' \in B(Y', X')$ è definito dalla posizione: $\langle A'\varphi, x\rangle = \langle \varphi, Ax\rangle$, $\forall x \in X$, $\forall \varphi \in Y'$];

la classe degli operatori fredholmiani si denota con $\Phi(X, Y)$; e si pone:

$$\text{(1.1}'\text{)} \qquad i(A) \equiv \text{indice di } A = \alpha(A) - \beta(A).$$

Con $K(X, Y)$ si indica, invece, la classe degli operatori compatti da X in Y; se $X \equiv Y$ si ha notoriamente, per ogni $K \in K(X, X)$:

$$(1.2) \qquad I - K \in \Phi(X, X), \quad i(I - K) = 0$$

[I è l'operatore identico su X].

Si ha anche (cfr. [3], p. 111), se X, Y e Z sono tre spazi di Banach:

$$(1.3) \quad A \in \Phi(X, Y),\ B \in \Phi(Y, Z) \Rightarrow BA \in \Phi(X, Z),\ i(BA) = i(B) + i(A).$$

Sussistono i seguenti importanti teoremi([1]) (cfr. [3], pp. 108, 110):

Teorema 1.1. *Se $A \in \Phi(X, Y)$, esistono un sottospazio chiuso X_0 di X ed un sottospazio chiuso Y_0 di Y tali che:*

$$(1.4) \qquad \begin{cases} X = X_0 \oplus N(A), \quad Y = R(A) \oplus Y_0, \\ \dim Y_0 = \beta(A) \equiv \dim N(A'). \end{cases}$$

Inoltre esiste un operatore $A_0 \in B(Y, X)$ tale che:

$$(1.5) \qquad \begin{cases} N(A_0) = Y_0, \quad R(A_0) = X_0, \\ A_0 A = I \text{ su } X_0, \quad AA_0 = I \text{ su } R(A) \end{cases}$$

[I è l'operatore identico]. Infine:

$$(1.6) \qquad A_0 A = I - F_1 \text{ su } X, \quad AA_0 = I - F_2 \text{ su } Y,$$

dove: $F_1 \in K(X, X)$ ed $R(F_1) = N(A)$, $F_2 \in K(Y, Y)$ ed $R(F_2) = Y_0$, per cui gli operatori F_1 ed F_2 hanno addirittura rango di dimensione finita.

Teorema 1.2 (Nikolski)**.** *Sia $A \in B(X, Y)$ e siano $A_1, A_2 \in B(Y, X)$, $K_1 \in K(X, X)$, $K_2 \in K(Y, Y)$ degli operatori tali che:*

$$(1.7) \qquad A_1 A = I - K_1 \text{ su } X,\ AA_2 = I - K_2 \text{ su } Y.$$

Allora si ha: $A \in \Phi(X, Y)$.

I teoremi su cui si basa la Teoria della Perturbazione sono i seguenti (cfr. [3], pp. 114 e 115):

([1]) Nei Teoremi 1.1, ..., 1.5, con X ed Y si denotano degli spazi di Banach. Talvolta, per chiarezza, si scriverà $\|\cdot\|_X$ ($\|\cdot\|_Y$) in luogo di $\|\cdot\|$.

Teorema 1.3 (Gohberg - Krein). *Se $A \in \Phi(X, Y)$ e se $K \in K(X, Y)$, allora si ha:*

$$A + K \in \Phi(X, Y)\,, \quad i(A + K) = i(A). \tag{1.8}$$

Teorema 1.4. *Sia $A \in \Phi(X, Y)$ e si ponga: $\eta = \|A_0\|^{-1}$ (> 0; cfr. Teorema 1.1). Allora per ogni $T \in B(X, Y)$ con $\|T\| < \eta$ risulta:*

$$A + T \in \Phi(X, Y), \quad i(A + T) = i(A), \quad \alpha(A + T) \le \alpha(A). \tag{1.9}$$

Ricordiamo infine il ben noto "Metodo di Continuità" (cfr. ad esempio [1], p. 75):

Teorema 1.5. *Dati A_0, $A_1 \in B(X, Y)$, si consideri la famiglia di operatori: $A_\theta = A_0 + \theta(A_1 - A_0)$, $\theta \in [0, 1]$. Se risulta verificata l'ipotesi:*

$$\exists c > 0 : \forall \theta \in [0, 1], \quad \forall x \in X, \quad \|x\|_X \le c\|A_\theta x\|_Y, \tag{1.10}$$

allora vale l'implicazione:

$$A_0 \text{ biettivo tra } X \text{ ed } Y \Rightarrow A_1 \text{ biettivo tra } X \text{ ed } Y. \tag{1.11}$$

Sia ora Y uno spazio di Hilbert reale [con prodotto scalare $(\cdot\,,\cdot)$] e sia Z un sottospazio chiuso di Y; come è noto per il sottospazio ortogonale $Z^\perp \equiv \{y \in Y : (y, z) = 0\ \forall z \in Z\}$ risulta: $Y = Z \oplus Z^\perp$, e cioè:

$$\forall y \in Y,\ \exists | z \in Z \text{ ed } \exists | z' \in Z^\perp : y = z + z'; \tag{1.12}$$

i proiettori $P_Z : y \in Y \to z \in Z$, $P_{Z^\perp} : y \in Y \to z' \in Z^\perp$ [cfr. (1.12)] sono degli operatori lineari e continui, ed è chiaro che si ha: $\forall y \in Y$, $(P_Z y, P_{Z^\perp} y) = (z, z') = 0$.

Molto utile risulta il seguente

Lemma 1.1. *Sia Y uno spazio di Hilbert reale e siano Z ed Y_1 due sottospazi chiusi di Y tali che:*

$$\begin{cases} \dim Y_1 = n < +\infty, \\ \forall y \in Y, \exists | \tilde{z} \in Z \text{ ed } \exists | \tilde{z}' \in Y_1 : y = \tilde{z} + \tilde{z}' \ [\text{cioè} : Y = Z \oplus Y_1]. \end{cases} \tag{1.13}$$

Allora si ha:

$$\dim Z^\perp = \dim Y_1 = n. \tag{1.13$'$}$$

Dimostrazione. Se $n = 0$, l'asserto è banalmente vero([2]); sia dunque $n > 0$. Detta $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base di Y_1 [cfr. (1.13)], si ha:

$$\text{(1.14)} \qquad \forall\, y \in Y,\ \exists\,|\tilde{z} \in Z \text{ ed } \exists\,|(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : \quad y = \tilde{z} + t_1 e_1 + \dots + t_n e_n.$$

Ricordando (1.12) si può asserire che:

$$\text{(1.15)} \qquad \exists\,|z_i \in Z \text{ ed } \exists\,|z'_i \in Z^{\perp} : e_i = z_i + z'_i \ \ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Da (1.14) e (1.15) segue, per il generico $y \in Y$:

$$\text{(1.16)} \qquad y = \tilde{z} + \sum_i^{1\dots n} t_i e_i = \left(\tilde{z} + \sum_i^{1\dots n} t_i z_i\right) + \sum_i^{1\dots n} t_i z'_i \equiv \xi + \xi', \quad \text{con} : \xi \in Z,\ \xi' \in Z^{\perp}.$$

In particolare, per il generico $z' \in Z^{\perp}$ (1.16) si scrive:

$$\text{(1.16}'\text{)} \qquad z' = \xi + \xi' \equiv \xi + \sum_i^{1\dots n} t_i z'_i, \ \text{ con } \xi \in Z \text{ e } t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R};$$

ma da (1.16′) discende:

$$Z \ni \xi = z' - \sum_i^{1\dots n} t_i z'_i \in Z^{\perp} \Rightarrow \xi \in Z \cap Z^{\perp} \Rightarrow \xi = \underline{0};$$

allora da (1.16′) si deduce:

$$\text{(1.16}''\text{)} \qquad \forall\, z' \in Z^{\perp},\ \exists\,(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : z' = t_1 z'_1 + \dots + t_n z'_n\ .$$

Possiamo quindi già asserire che:

$$\text{(1.16}'''\text{)} \qquad \dim Z^{\perp} \equiv m \le n \ ([3]).$$

Sia per assurdo $m < n$; e sia $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base di $Z^{\perp}$; allora [cfr. (1.12)] si ha:

$$\text{(1.17)} \quad \forall\, y \in Y,\ \exists\,|z \in Z \text{ ed } \exists\,|(\tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathbb{R}^m : y = z + \tau_1 v_1 + \dots \tau_m v_m.$$

([2]) Se la dimensione di uno Spazio Vettoriale V è zero, allora $V \equiv \{\underline{0}\}$.

([3]) Non può essere $m = 0$; altrimenti sarebbe anche $n = 0$.

Ricordando (1.13) si può asserire che:

$$\exists|\tilde{z}_i \in Z \text{ ed } \exists|\tilde{z}'_i \in Y_1 : v_i = \tilde{z}_i + \tilde{z}'_i \quad (i = 1, \dots, m). \tag{1.18}$$

Da (1.17) e (1.18) segue, per il generico $y \in Y$:

$$\begin{aligned} y = z + \sum_i^{1\dots m} \tau_i v_i = \left(z + \sum_i^{1\dots m} \tau_i \tilde{z}_i\right) + \sum_i^{1\dots m} \tau_i \tilde{z}'_i \equiv \\ \equiv \tilde{\xi} + \tilde{\xi}', \quad \text{con} : \tilde{\xi} \in Z,\ \tilde{\xi}' \in Y_1. \end{aligned} \tag{1.19}$$

In particolare per il generico $\tilde{z}' \in Y_1$ (1.19) si scrive:

$$\tilde{z}' = \tilde{\xi} + \tilde{\xi}' \equiv \tilde{\xi} + \sum_i^{1\dots m} \tau_i \tilde{z}'_i, \text{ con } \tilde{\xi} \in Z \text{ e } \tau_1, \dots, \tau_m \in \mathbb{R}; \tag{1.19$'$}$$

ma da (1.19′) discende:

$$Z \ni \tilde{\xi} = \tilde{z}' - \sum_i^{1\dots m} \tau_i \tilde{z}'_i \in Y_1 \Rightarrow \tilde{\xi} \in Z \cap Y_1 \Rightarrow \tilde{\xi} = \underline{0};$$

allora da (1.19′) si deduce:

$$\forall \tilde{z}' \in Y_1,\ \exists(\tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathbb{R}^m : \tilde{z}' = \sum_i^{1\dots m} \tau_i \tilde{z}'_i. \tag{1.19$''$}$$

Ma (1.19″) contraddice l'ipotesi (1.13) secondo cui $\dim Y_1 = n$ [$> m$; cfr. ipotesi per assurdo]. Non resta quindi che ammettere che:

$$m \equiv \dim Z^{\perp} = n \equiv \dim Y_1. \qquad \square \tag{1.20}$$

2. Il teorema principale.

Teorema 2.1. *Siano X ed Y due spazi di Hilbert reali, e siano ${}_0\mathcal{A}$ ed ${}_1\mathcal{A}$ due operatori (distinti) $\in B(X, Y)$. Si supponga che per la famiglia di operatori: ${}_\theta\mathcal{A} = {}_0\mathcal{A} + \theta({}_1\mathcal{A} - {}_0\mathcal{A})$, $\theta \in [0, 1]$, risulti:*

$$\exists c > 0 : \forall \theta \in [0, 1],\ \forall x \in X,\ \|x\|_X \le c\|{}_\theta\mathcal{A}x\|_Y. \tag{2.1}$$

Allora si ha

$$(2.1') \qquad \forall\theta \in [0,1], \quad \begin{cases} R({}_\theta\mathcal{A}) \text{ è chiuso in } Y, \\ N({}_\theta\mathcal{A}) \equiv \{\underline{0}\} \text{ e quindi } \alpha({}_\theta\mathcal{A}) = 0. \end{cases}$$

Inoltre sussiste l'implicazione:

$$(2.2) \qquad \dim N({}_0\mathcal{A}') \equiv \beta({}_0\mathcal{A}) = n < +\infty \Rightarrow \dim N({}_1\mathcal{A}') \equiv \beta({}_1\mathcal{A}) = n;$$

e cioè [cfr. (2.1′)*]:*

$$(2.2') \qquad i({}_0\mathcal{A}) \equiv \alpha({}_0\mathcal{A}) - \beta({}_0\mathcal{A}) = -n \Rightarrow i({}_1\mathcal{A}) = -n.$$

Dimostrazione. La (2.1′) è conseguenza immediata di (2.1); passiamo senz'altro a stabilire la (2.2).
Per il generico (fissato) $\theta \in [0,1]$ supponiamo che risulti [scrivendo per brevità A in luogo di ${}_\theta\mathcal{A}$]:

$$(2.1'') \qquad \dim N(A') \equiv \beta(A) \equiv \beta({}_\theta\mathcal{A}) = m < +\infty$$
$$[\text{da cui, per } (2.1') : i({}_\theta\mathcal{A}) = -m].$$

Da (2.1′) e (2.1″), grazie al Teorema 1.1 [cfr. (1.4)] si trae:

$$(2.3) \qquad \begin{cases} \exists \text{ sottospazi chiusi } X_0 \text{ di } X \text{ ed } Y_1 \text{ di } Y \text{ tali che :} \\ X = X_0 \oplus N(A) \equiv X_0; \ Y = R(A) \oplus Y_1; \ \dim Y_1 = \beta(A) = m. \end{cases}$$

Grazie al Lemma 1.1 [cfr. (1.12), (1.13), (1.13′)] da (2.3) consegue:

$$(2.3') \qquad \begin{cases} \exists \text{ sottospazi chiusi } X_0 \text{ di } X \text{ ed } Y_0 \equiv R(A)^\perp \text{ di } Y \text{ tali che :} \\ X = X_0; \ Y = R(A) \oplus Y_0; \ R(A) \perp Y_0; \\ \qquad \dim Y_0 = \dim Y_1 = \beta(A) = m. \end{cases}$$

Da (2.3′) si ricava [ponendo: $y_R = P_{R(A)}y$, $y_0 = P_{Y_0}y$]:

$$(2.4) \qquad \begin{cases} \forall y \in Y, \ \exists | y_R \in R(A) \text{ ed } \exists | y_0 \in Y_0 : y = y_R + y_0 \\ [\text{quindi } \|y\|_Y^2 = \|y_R\|_Y^2 + \|y_0\|_Y^2, \ \text{perché } (y_R, y_0) = 0]; \end{cases}$$

da (2.4) discende:

$$(2.4') \qquad \forall y \in Y, \quad \|y\|_Y \geq \|y_R\|_Y.$$

Denotando con $\tilde{A}$ l'operatore A pensato come $\in B(X, R(A))$, grazie a (2.1) [e (2.1′)] si può asserire che $\tilde{A}$ è biettivo tra gli spazi di Hilbert X ed $R(A)$; e la (2.1) stessa si può scrivere (col $\theta \in [0, 1]$ fissato all'inizio):

$$(2.1''') \qquad \begin{cases} \forall z \in R(A), \quad \|\tilde{A}^{-1} z\|_X \le c\|z\|_Y \\ [\text{ovviamente}: \ \tilde{A}^{-1} \in B(R(A), X)]. \end{cases}$$

A questo punto definiamo l'operatore [cfr. (2.4) e (2.4′)]:

$$(2.5) \qquad A_0 y \equiv A_0(y_R + y_0) = \tilde{A}^{-1} y_R \in X, \quad y \in Y;$$

l'operatore A_0 (ovviamente lineare, dato che è lineare il proiettore $P_{R(A)}$) è continuo da Y in X, in quanto si ha [cfr. (2.4′) e (2.1‴)]:

$$(2.5') \qquad \forall y \in Y, \quad \|A_0 y\|_X = \|\tilde{A}^{-1} y_R\|_X \le c\|y_R\|_Y \le c\|y\|_Y;$$

si ha pertanto:

$$(2.5'') \qquad \|A_0\| \le c.$$

[c è la costante di cui alla (2.1), e quindi *non* dipende dal θ fissato all'inizio].
Si ha poi, ovviamente, da (2.4) e (2.5):

$$\forall z \in Y_0, \quad A_0 z \equiv A_0(\underline{0}_Y + z) = \tilde{A}^{-1}\underline{0}_Y = \underline{0}_X;$$

viceversa: $A_0 y = \underline{0}_X \Rightarrow \tilde{A}^{-1} y_R = \underline{0}_X \Rightarrow y_R = \underline{0}_Y$
(dato che $\tilde{A}^{-1}$ è biettivo) $\Rightarrow y = y_R + y_0 = y_0 \in Y_0$.
Ciò implica [cfr. (2.3′)]:

$$(2.6) \qquad N(A_0) \equiv Y_0 \Rightarrow \alpha(A_0) \equiv \dim N(A_0) = \dim Y_0 = m.$$

Peraltro A_0 è suriettivo da Y ad X, in quanto:

$$(2.6') \qquad \forall x \in X, \ \exists y \equiv Ax \equiv \tilde{A}x \in R(A) \subset Y : A_0 y = \tilde{A}^{-1}\tilde{A}x = x.$$

Da (2.6) e (2.6′) discende:

$$(2.5''') \qquad A_0 \in \Phi(Y, X), \quad i(A_0) = \alpha(A_0) - \beta(A_0) = m = -i(A).$$

È facile vedere che l'operatore A_0 di cui al Teorema 1.1 [verificante (1.5) e (1.6)] si può qui far coincidere proprio con l'operatore A_0 di (2.5).
Infatti da (2.6′) discende:

$$(2.7) \qquad \begin{cases} A_0 A = I \text{ su } X_0 \equiv X, \quad A_0 A = I - F_1 \equiv I - 0 \text{ su } X \\ (\text{l'operatore } F_1 \equiv 0 \text{ è banalmente } \in K(X, X)). \end{cases}$$

Inoltre [indicando con F_2 il proiettore $F_2 \equiv P_{Y_0} : y \in Y \to P_{Y_0} y \equiv y_0 \in Y_0$], da (2.5) discende:

$$\forall y \in Y,\ AA_0 y \equiv AA_0(y_R + y_0) = A\tilde{A}^{-1} y_R \equiv \tilde{A}\tilde{A}^{-1} y_R = y_R \equiv y - F_2 y;$$

si ha quindi:

$$(2.7') \qquad \begin{cases} AA_0 \equiv \tilde{A}\tilde{A}^{-1} = I \text{ su } R(A), \quad AA_0 = I - F_2 \text{ su } Y \\ (\text{l'operatore } F_2 \equiv P_{Y_0} \text{ appartiene a } K(Y,Y) \text{ perché } \dim Y_0 = m). \end{cases}$$

Ricapitolando, da (2.5‴), (2.7) e (2.7′) discende:

$$(2.8) \qquad \begin{cases} A_0 \in \Phi(Y,X); \quad i(A_0) = m = -i(A); \\ F_1 \equiv 0 \in K(X,X); \quad F_2 \equiv P_{Y_0} \in K(Y,Y); \\ A_0 A = I - F_1 \text{ su } X; \quad AA_0 = I - F_2 \text{ su } Y. \end{cases}$$

Dopo ciò, con procedimento standard, si completa la dimostrazione; poniamo: $\eta = \|A_0\|^{-1}$ (> 0) e osserviamo che [cfr. (2.5″)]:

$$(2.9) \qquad \eta \equiv \|A_0\|^{-1} \geq \frac{1}{c}; \quad c \textit{ non} \text{ dipende dal } \theta \in [0,1] \text{ fissato all'inizio.}$$

Per l'operatore $T = \Delta\theta({}_1\mathcal{A} - {}_0\mathcal{A}) \in B(X,Y)$, con:

$$0 \leq \theta + \Delta\theta \leq 1 \ \ [\theta \text{ è quello fissato all'inizio}], \quad |\Delta\theta| < \frac{1}{c\|{}_1\mathcal{A} - {}_0\mathcal{A}\|},$$

si ha facilmente, grazie a (2.9):

$$(2.10) \qquad \|T\| < \frac{1}{c} \leq \frac{1}{\|A_0\|} \Rightarrow \begin{cases} \|A_0 T\| \leq \|A_0\| \cdot \|T\| < 1 \\ \|T A_0\| < 1; \end{cases}$$

risulta quindi, notoriamente:

$$(2.11) \qquad \begin{cases} I + A_0 T \text{ biettivo tra } X \text{ ed } X\ [\Rightarrow i((I + A_0 T)^{-1}) = 0] \\ I + T A_0 \text{ biettivo tra } Y \text{ ed } Y\ [\Rightarrow i((I + T A_0)^{-1}) = 0] \end{cases}$$

D'altro canto l'operatore $A + T \equiv {}_\theta\mathcal{A} + T \equiv {}_0\mathcal{A} + (\theta + \Delta\theta)({}_1\mathcal{A} - {}_0\mathcal{A}) \equiv {}_{\theta+\Delta\theta}\mathcal{A}$ [col θ fissato all'inizio e con $0 \leq \theta + \Delta\theta \leq 1$], grazie a (2.8) verifica le condizioni:

$$(2.12) \qquad \begin{cases} A_0(A + T) = I + A_0 T - F_1 \equiv I + A_0 T \text{ su } X \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{con } F_1 \equiv 0 \in K(X,X), \\ (A + T)A_0 = I + T A_0 - F_2 \text{ su } Y \text{ con } F_2 \equiv P_{Y_0} \in K(Y,Y). \end{cases}$$

Da (2.12) e (2.11) consegue:

$$\text{(2.13)}\qquad \begin{cases} (I + A_0T)^{-1}A_0(A + T) = I \text{ su } X \\ (A + T)A_0(I + TA_0)^{-1} = I - F_2(I + TA_0)^{-1} \text{ su } Y, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{con } F_2(I + TA_0)^{-1} \in K(Y, Y), \end{cases}$$

da cui, grazie al Teorema 1.2 di Nikolski:

$$\text{(2.13}'\text{)}\qquad A + T \in \Phi(X, Y).$$

Poiché gli operatori a secondo membro di (2.13) hanno notoriamente indice $= 0$, si ha, grazie ad (1.3), a (2.5‴) ed a (2.11):

$$i((I+A_0T)^{-1})+i(A_0)+i(A+T) \equiv 0+m+i(A+T) \equiv -i(A)+i(A+T) = 0,$$

e quindi:

$$\text{(2.14)}\qquad A + T \in \Phi(X, Y), \quad i(A + T) = i(A) = -m = -\beta({}_\theta\mathcal{A}).$$

D'altro canto [essendo: $0 \leq \theta + \Delta\theta \leq 1$] per l'operatore $A + T = {}_{\theta+\Delta\theta}\mathcal{A}$ vale (2.1); quindi:

$$\text{(2.15)}\qquad \forall x \in X,\ \|x\|_X \leq c\|(A + T)x\|_Y \Rightarrow \alpha(A + T) = 0.$$

Di qui e da (2.14) discende:

$$-\beta({}_\theta\mathcal{A}) = i(A + T) \equiv \alpha(A + T) - \beta(A + T) = -\beta({}_{\theta+\Delta\theta}\mathcal{A}).$$

Resta così provata l'implicazione:

$$\text{(2.16)}\qquad \left.\begin{array}{r} 0 \leq \theta \leq 1;\ 0 \leq \theta + \Delta\theta \leq 1; \\ |\Delta\theta| < 1/[c\|{}_1\mathcal{A} - {}_0\mathcal{A}\|]; \\ \beta({}_\theta\mathcal{A}) = m < +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \beta({}_{\theta+\Delta\theta}\mathcal{A}) = \beta({}_\theta\mathcal{A}) = m \\ i({}_{\theta+\Delta\theta}\mathcal{A}) = i({}_\theta\mathcal{A}) = -m. \end{cases}$$

Ma allora suddividiamo l'intervallo [0, 1] mediante i punti: $0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_i < \theta_{i+1} < \ldots < \theta_k = 1$, con: $\max_i(\theta_{i+1} - \theta_i) < 1/(c\|{}_1\mathcal{A} - {}_0\mathcal{A}\|)$. Ricordando l'ipotesi (2.2) [$\beta({}_0\mathcal{A}) = n$], ed applicando la (2.16) [con: $m = n$] successivamente alle coppie: $(\theta_0, \theta_1), (\theta_1, \theta_2), \ldots, (\theta_{k-1}, \theta_k)$, si ha infine:

$$n = \beta({}_0\mathcal{A}) = \beta({}_{\theta_1}\mathcal{A}) = \ldots = \beta({}_{\theta_{k-1}}\mathcal{A}) = \beta({}_1\mathcal{A}). \qquad \square$$

3. Una applicazione.

Siano $a_i(x_1, x_2, x_3)$ $[i = 1, 2, 3]$ tre funzioni verificanti in $\Omega =]0, \pi[^3$ le condizioni:

$$a_i \in W^{1,3}(\Omega); \quad 1 \leq a_i(x) \leq \Lambda, \ \forall x \in \Omega. \tag{3.1}$$

Se per la costante K risulta (Teorema di Sobolev):

$$\forall w \in W^{1,2}(\Omega), \quad \left(\int_\Omega |w|^6 dx\right)^{1/6} \leq K \|w\|_{W^{1,2}(\Omega)}, \tag{3.2}$$

e se si sceglie $M \equiv M_K \in \mathbb{R}$ in guisa che in $\Omega_M^{ij} \equiv \{x \in \Omega \mid |D_{x_i} a_j(x)| > M\}$ si abbia:

$$\left(\int_{\Omega_M^{ij}} |D_{x_i} a_j|^3 dx\right)^{1/3} < \frac{1}{36K} \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{3.3}$$

sia λ un numero reale tale che:

$$\lambda \geq \overline{\lambda} \equiv 1 + (12M + 3\Lambda) \max\{36M, 9\Lambda\}. \tag{3.4}$$

Ebbene, ci proponiamo di studiare il problema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \equiv -\sum_i^{1\ldots3} a_i(x) D_{x_i}^2 u + \lambda u = f(x), \quad \text{in } \Omega; \\ u|_{\partial\Omega} = 0; \ u(\overline{x}) = 0; \ u \in W^{2,2}(\Omega); \ f \in L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.5}$$

dove: $\overline{x} = (\pi/2, \pi/2, \pi/2)$, mentre λ ed i coefficienti $a_i(x)$ verificano le ipotesi (3.1) e (3.4). Si noti che, per via del Teorema di Sobolev, nel problema (3.5) le condizioni: $u|_{\partial\Omega} = 0$, $u(\overline{x}) = 0$ vanno intese in senso classico.

Al fine di affrontare il problema (3.5) col metodo di continuità, introduciamo la famiglia di operatori:

$$\mathcal{L}_\theta = -\sum_i^{1\ldots3} (1 + \theta[a_i(x) - 1]) D_{x_i}^2 + \lambda \equiv -\sum_i^{1\ldots3} b_i(x) D_{x_i}^2 + \lambda, \ \theta \in [0, 1]; \tag{3.6}$$

evidentemente si ha [per $i, j = 1, 2, 3$]:

$$\begin{cases} \forall \theta \in [0, 1], \ \forall x \in \Omega, \ 1 \leq b_i(x) \leq a_i(x) \text{ e } |D_{x_i} b_j(x)| \leq |D_{x_i} a_j(x)|, \\ \forall \theta \in [0, 1], \ \mathcal{L}_\theta \in B(W^{2,2}(\Omega), L^2(\Omega)), \\ \mathcal{L}_1 \equiv \mathcal{L}, \ \mathcal{L}_0 \equiv -\sum_i^{1\ldots3} D_{x_i}^2 + \lambda \equiv -\Delta + \lambda. \end{cases} \tag{3.7}$$

Conviene introdurre i seguenti sottospazi dello spazio di Hilbert (reale) $W^{2,2}(\Omega)$:

$$V_0 = \{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \mid u_{|\partial\Omega=0}\},$$
$$V = \text{chiusura di } V_0 \text{ in } W^{2,2}(\Omega),$$
$$W = \{u \in V \mid u(\overline{x}) = 0\};$$

giova osservare che, mentre W è un sottospazio vettoriale (chiuso) di $W^{2,2}(\Omega)$, la varietà:

$$W_\alpha = \{u \in V \mid u(\overline{x}) = \alpha\} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

è, per $\alpha \neq 0$, un sottoinsieme chiuso di $W^{2,2}(\Omega)$, ma *non* un sottospazio vettoriale. Si noti che:

$$u, v \in W_\alpha \Rightarrow u - v \in W.$$

Ragionando "alla Miranda" (cfr. [2]) si prova anzitutto il seguente

Lemma 3.1. *Nelle ipotesi* (3.1) *e* (3.4) *vale la diseguaglianza:*

$$\forall\theta \in [0,1],\ \forall u \in V, \quad \|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq 12\|\mathcal{L}_\theta u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.8}$$

Dimostrazione. Posto, per brevità: $f = \mathcal{L}_\theta u$ (con $u \in V_0$), moltiplicando per $-D^2_{x_i} u$ [nonché per u], integrando per parti e tenendo conto della condizione: $u|_{\partial\Omega} = 0$, si perviene alla diseguaglianza:

$$\|u\|^2_{W^{2,2}(\Omega)} + (\lambda - 1)\sum_i^{1\ldots3}\int_\Omega (D_{x_i}u)^2 dx + (\lambda - 1)\int_\Omega u^2 dx \leq \tag{3.9}$$
$$\leq \int_\Omega fudx - \sum_i^{1\ldots3}\int_\Omega fD^2_{x_i}udx + \sum_i^{1\ldots3}\int_\Omega b_i u D^2_{x_i}udx +$$
$$+ \sum_{i\neq j}^{1\leq i,j\leq 3}\int_\Omega D_{x_i}b_j D_{x_i}uD^2_{x_j}udx - \sum_{i\neq j}^{1\leq i,j\leq 3}\int_\Omega D_{x_j}b_j D_{x_i}uD_{x_i}D_{x_j}udx, \forall u \in V_0.$$

D'altro canto, tenendo conto di (3.2) e (3.3), si ha facilmente [per $i \neq j$ ed

$1 \leq i, j \leq 3]$:

$$\left|\int_\Omega D_{x_i} b_j D_{x_i} u D^2_{x_j} u dx\right| \leq \left|\int_{\Omega^{ij}_M} D_{x_i} b_j D_{x_i} u D^2_{x_j} u dx\right| +$$

$$+ \left|\int_{\{x\in\Omega | |D_{x_i} a_j| \leq M\}} M \cdot |D_{x_i} u| \cdot |D^2_{x_j} u| dx\right| \leq$$

$$\leq \left(\int_{\Omega^{ij}_M} |D_{x_i} b_j|^3 dx\right)^{1/3} \left(\int_{\Omega^{ij}_M} |D_{x_i} u|^6 dx\right)^{1/6} \left(\int_{\Omega^{ij}_M} |D^2_{x_j} u|^2 dx\right)^{1/2} +$$

$$+ M\varepsilon \int_\Omega (D^2_{x_j} u)^2 dx + \frac{M}{\varepsilon} \int_\Omega (D_{x_i} u)^2 dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{36K} K \|u\|^2_{W^{2,2}(\Omega)} + M\varepsilon \|u\|^2_{W^{2,2}(\Omega)} + \frac{M}{\varepsilon} \int_\Omega (D_{x_i} u)^2 dx;$$

di qui e dalle analoghe maggiorazioni valide per i sei addendi dell'ultima sommatoria del secondo membro di (3.9), si ottiene dalla (3.9):

$$\frac{2}{3}\|u\|^2_{W^{2,2}(\Omega)} + (\lambda - 1) \sum_i^{1\ldots 3} \int_\Omega (D_{x_i} u)^2 dx + (\lambda - 1) \int_\Omega u^2 dx \leq \tag{3.10}$$

$$\leq \int_\Omega f u dx - \sum_i^{1\ldots 3} \int_\Omega f D^2_{x_i} u dx + (12M + 3\Lambda)\varepsilon \|u\|^2_{W^{2,2}(\Omega)} +$$

$$+ \frac{12M}{\varepsilon} \sum_i^{1\ldots 3} \int_\Omega (D_{x_i} u)^2 dx + \frac{3\Lambda}{\varepsilon} \int_\Omega u^2 dx, \ \forall u \in V_0 .$$

Fissando qui $\varepsilon = 1/[3(12M + 3\Lambda)]$, si ha infine la (3.8), ove si tenga conto di (3.4) e della densità di V_0 in V. $\square$

Corollario 3.1. *Nelle stesse ipotesi* (3.1) *e* (3.4) *del Lemma 3.1 vale la disegua-glianza:*

$$\forall \theta \in [0, 1], \ \forall u \in W, \quad \|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq 12 \|\mathcal{L}_\theta u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.11}$$

Una volta acquisita la (3.11), il secondo passo da compiere per applicare il metodo di continuità richiede che si studi il problema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 u \equiv -\Delta u + \lambda u = f, \ \text{in } \Omega; \\ u \in W, \quad f \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{3.12}$$

Ma prima ancora conviene studiare [con procedimenti standard] il problema:

$$-\Delta u + \lambda u = f \in L^2(\Omega), \quad u \in V. \tag{3.13}$$

Rammentiamo, all'uopo, che il sistema dei seni:

$$\left\{ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \sin h_1 x_1 \sin h_2 x_2 \sin h_3 x_3 \right\}_{(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{N}^3}$$

[dove $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$] è ortonormale in $L^2(\Omega)$.

Esso è anche completo in $L^2(\Omega)$; per cui, ordinando, ad esempio, gli indici $(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{N}^3$ secondo lo "schema diagonale":

$$h_i \geq 1 : \tag{3.14}$$

$$\begin{array}{lllllll}
\sum_i^{1\ldots 3} h_i = 3, & & \sum_i^{1\ldots 3} h_i = 4, & & \sum_i^{1\ldots 3} h_i = 5, \; \ldots\ldots\ldots, & & \sum_i^{1\ldots 3} h_i \;=\; n, \; \ldots \\
(1,1,1) & \longrightarrow & (2,1,1) & & (3,1,1) & & (n-2,1,1) \quad \ldots \\
 & & \left.\begin{matrix}(1,1,2)\\(1,2,1)\end{matrix}\right\} & \nearrow & \left.\begin{matrix}(2,1,2)\\(2,2,1)\end{matrix}\right\} & & \left.\begin{matrix}(n-3,1,2)\\(n-3,2,1)\end{matrix}\right\} \quad \ldots \\
 & & & & \left.\begin{matrix}(1,1,3)\\(1,2,2)\\(1,3,1)\end{matrix}\right\} & \nearrow & \begin{matrix}\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{matrix} \\
 & & & & & & \left.\begin{matrix}(1,1,n-2)\\(1,2,n-3)\\(1,3,n-4)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\(1,n-2,1)\end{matrix}\right\}
\end{array}$$

si ha:

$$\forall f \in L^2(\Omega), \; \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left| f(x) - \sum_{h=3}^{n} \sum_{h_1+h_2+h_3=h}^{h_1,h_2,h_3 \geq 1} f_{h_1 h_2 h_3}(x) \right|^2 dx \equiv \tag{3.15}$$

$$\equiv \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left| f(x) - \sum_{h=3}^{n} \sum_{h_1+h_2+h_3=h}^{h_1,h_2,h_3 \geq 1} c_{h_1 h_2 h_3} \prod_j^{1\ldots 3} \sin h_j x_j \right|^2 dx = 0,$$

$$\text{con: } c_{h_1 h_2 h_3} = \left\{ \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \int_\Omega f(\xi) \sin h_1 \xi_1 \sin h_2 \xi_2 \sin h_3 \xi_3 d\xi \right\};$$

ovviamente, qualunque sia $f \in L^2(\Omega)$, risulta che:

$$(3.15') \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n \geq \nu,\ \ \forall k \in \mathbb{N},$$
$$\left\| \sum_{h=n+1}^{n+k} \sum_{h_1+h_2+h_3=h}^{h_1,h_2,h_3 \geq 1} f_{h_1 h_2 h_3} \right\|^2_{L^2(\Omega)} < \varepsilon.$$

E siccome la funzione:

$$(3.16) \qquad \begin{cases} u_{h_1 h_2 h_3} = (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \lambda)^{-1} f_{h_1 h_2 h_3} \equiv \\ \equiv \dfrac{c_{h_1 h_2 h_3}}{(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \lambda)} \ \sinh_1 x_1 \sinh_2 x_2 \sinh_3 x_3 \in V_0, \\ \qquad \text{con } c_{h_1 h_2 h_3} \text{ dato da (3.15)} \end{cases}$$

banalmente risolve il problema:

$$(3.13') \qquad -\Delta u + \lambda u = f_{h_1 h_2 h_3}, \quad u \in V,$$

si può asserire che: se valgono (3.1) e (3.4), allora, grazie alla (3.8) del Lemma 3.1, si ha:

$$(3.17) \qquad \begin{aligned} &\forall n, k \in \mathbb{N}, \quad \left\| \sum_{h=n+1}^{n+k} \sum_{h_1+h_2+h_3=h}^{h_1,h_2,h_3 \geq 1} u_{h_1 h_2 h_3} \right\|^2_{W^{2,2}(\Omega)} \leq \\ &\leq 144 \left\| \sum_{h=n+1}^{n+k} \sum_{h_1+h_2+h_3=h}^{h_1,h_2,h_3 \geq 1} f_{h_1 h_2 h_3} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \underset{n,k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

avendo ricordato (3.15′).
Sulla base di (3.17), (3.8) e (3.15) si ha:

Lemma 3.2. *Nelle ipotesi* (3.1) *e* (3.4)*, comunque si assegni* $f \in L^2(\Omega)$ *il problema* (3.13) *ammette una ed una sola soluzione* $u \in V$*, e tale soluzione è data da [cfr.* (3.16)*]:*

$$(3.18) \qquad u(x) = \sum_{h=3}^{\infty} \sum_{h_1+h_2+h_3=h}^{h_1,h_2,h_3 \geq 1} \frac{c_{h_1 h_2 h_3}}{(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \lambda)} \prod_{j}^{1\ldots 3} \sinh_j x_j.$$

A questo punto, andando al Problema (3.12), è evidente che la funzione u data da (3.18) [che risolve (3.13)] risolverà (3.12) se e solo se:

$$0 = u(\overline{x}) = \sum_{h=3}^{\infty} \sum_{h_1+h_2+h_3=h}^{h_1,h_2,h_3 \geq 1} \left[\frac{\sinh_1\left(\frac{\pi}{2}\right)\sinh_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\sinh_3\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h_1^2+h_2^2+h_3^2+\lambda} \right] c_{h_1h_2h_3}; \tag{3.19}$$

viceversa, se una $u \in W$ risolve (3.12), tale u [dovendo necessariamente risolvere anche (3.13)] avrà la forma (3.18) e verificherà la condizione (3.19).

D'altro canto, valendo l'implicazione:

$$\left.\begin{array}{l} h_1+h_2+h_3=h; \quad h_1,h_2,h_3 \geq 1 \\ \dfrac{h_1+h_2+h_3}{3} \leq \sqrt{\dfrac{h_1^2+h_2^2+h_3^2}{3}} \end{array}\right\} \Longrightarrow h_1^2+h_2^2+h_3^2 \geq \frac{h^2}{3},$$

ed essendo in numero di $\frac{(h-2)(h-1)}{2}$ le terne (h_1, h_2, h_3) che riempiono la colonna $\sum_i^{1\ldots3} h_i = h$ dello schema (3.14), si ha facilmente:

$$\sum_{h=3}^{\infty} \sum_{h_1+h_2+h_3=h}^{h_1,h_2,h_3 \geq 1} \left[\frac{\sinh_1\left(\frac{\pi}{2}\right)\sinh_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\sinh_3\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h_1^2+h_2^2+h_3^2+\lambda} \right]^2 \leq \tag{3.20}$$

$$\leq \sum_{h=3}^{\infty} \frac{(h-2)(h-1)}{2} \left[\frac{3}{h^2}\right]^2 < 5\sum_{h=3}^{\infty} \frac{1}{h^2} < +\infty.$$

Dopo ciò la condizione (3.19) può essere posta nella forma:

$$\int_\Omega \psi_0(x) f(x)\, dx = 0, \tag{3.21}$$

dove:

$$f \equiv \sum_{h=3}^{\infty} \sum_{h_1+h_2+h_3=h}^{h_1,h_2,h_3 \geq 1} f_{h_1h_2h_3} \equiv \sum\sum c_{h_1h_2h_3} \prod_j^{1\ldots3} \sinh_j x_j \in L^2(\Omega)$$

[cfr. (3.15) e (3.16)], e dove ψ_0 è la funzione:

$$\psi_0(x) = \sum_{h=3}^{\infty} \sum_{h_1+h_2+h_3=h}^{h_1,h_2,h_3 \geq 1} \left[\frac{\prod_j^{1\ldots3} \sinh_j\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h_1^2+h_2^2+h_3^2+\lambda} \right] \prod_j^{1\ldots3} \sinh_j x_j \in L^2(\Omega) \tag{3.22}$$

[cfr. (3.20)].

Resta così provato il seguente:

Teorema 3.1. *Nelle ipotesi* (3.1) *e* (3.4)*, esiste una funzione* $\psi_0 \in L^2(\Omega)$ *[data da* (3.22)*] tale che il problema* (3.12) *risulti risolubile* se e solo se $f \in L^2(\Omega)$ *verifica la* (3.21)*; soddisfatta la* (3.21)*, il problema* (3.12) *ammette un'unica soluzione* $u \in W$ *la quale è data da* (3.18) *[e* (3.16)*].*

Come conseguenza del Teorema 3.1, del Corollario 3.1 e del Teorema 2.1, si ha facilmente il:

Teorema 3.2. *Nelle ipotesi* (3.1) *e* (3.4)*, esiste una ben determinata* $\psi_1 \in L^2(\Omega)$ *tale che il problema:*

$$\mathcal{L}u \equiv \mathcal{L}_1 u \equiv \left[-\sum_i^{1\dots3} a_i(x) D_{x_i}^2 + \lambda \right] u = f \in L^2(\Omega), \quad u \in W \tag{3.5}$$

risulti risolubile se e solo se $f \in L^2(\Omega)$ *verifica la condizione:*

$$\int_\Omega \psi_1(x) f(x) dx = 0. \tag{3.23}$$

Soddisfatta la (3.23) *[da* $f \in L^2(\Omega)$*], il problema* (3.5) *ammette una ed una sola soluzione* $u \in W$*.*

Consideriamo a questo punto il problema:

$$\mathcal{L}u \equiv \left[-\sum_i^{1\dots3} a_i(x) D_{x_i}^2 + \lambda \right] u = f \in L^2(\Omega), \quad u \in W_\alpha \tag{3.24}$$

dove, ricordiamo: $W_\alpha = \{v \in V \mid v(\overline{x}) = \alpha\},\ \alpha \in \mathbb{R}$.
Ci proponiamo di scoprire per quali $f \in L^2(\Omega)$ il problema (3.24) risulti risolubile.

Conviene anzitutto osservare che $[\forall \alpha \in \mathbb{R}]$:

$$w, z \in W_\alpha \Rightarrow \int_\Omega \psi_1(x) \mathcal{L}w(x)\, dx = \int_\Omega \psi_1(x) \mathcal{L}z(x)\, dx, \tag{3.25}$$

dove $\psi_1 \in L^2(\Omega)$ è la funzione di cui alla (3.23) del Teorema 3.2. Infatti $w - z$ certo risolve il problema (3.5) con $f = g \equiv \mathcal{L}w - \mathcal{L}z$:

$$\mathcal{L}(w - z) = \mathcal{L}w - \mathcal{L}z \equiv g \in L^2(\Omega), \quad w - z \in W; \tag{3.5'}$$

quindi, grazie al Teorema 3.2, deve risultare:

$$\int_\Omega \psi_1(x) g(x)\, dx = \int_\Omega \psi_1(x) \mathcal{L}w(x)\, dx - \int_\Omega \psi_1(x) \mathcal{L}z(x)\, dx = 0;$$

la (3.25) è così provata.

Possiamo ora stabilire il seguente

Teorema 3.3. *Nelle ipotesi* (3.1) *e* (3.4)*, il problema* (3.24) *risulta risolubile* se e solo se $f \in L^2(\Omega)$ *verifica la condizione:*

$$\int_\Omega \psi_1(x) f(x)\,dx = \int_\Omega \psi_1(x)\mathcal{L}w(x)\,dx, \tag{3.26}$$

dove $\psi_1 \in L^2(\Omega)$ *è la funzione di cui alla* (3.23) *del Teorema 3.2, e dove* w *è una funzione* $\in W_\alpha$ *prefissata arbitrariamente. Soddisfatta la* (3.26) *[da* $f \in L^2(\Omega)$*], il problema* (3.24) *ammette una ed una sola soluzione* $u \in W_\alpha$.

Dimostrazione. Fissata arbitrariamente una $w \in W_\alpha$ [e si noti che, grazie a (3.25), il secondo membro di (3.26) è indipendente dalla particolare scelta di $w \in W_\alpha$], cerchiamo di risolvere il problema:

$$\mathcal{L}v = f - \mathcal{L}w, \quad f \in L^2(\Omega), \quad v \in W \tag{3.27}$$

che non è altro che il problema (3.5) con $f - \mathcal{L}w$ in luogo di f.

Se $f \in L^2(\Omega)$ verifica (3.26), è chiaro che $f - \mathcal{L}w$ verifica (3.23); per cui, grazie al Teorema 3.2, il problema (3.27) risulta risolubile (da una ben determinata $v \in W$); e quindi la funzione $u = v + w$ viene a risolvere il problema (3.24).

Viceversa se $u \in W_\alpha$ risolve il problema (3.24), la funzione $v \equiv u - w$ [dove w è la funzione $\in W_\alpha$ fissata all'inizio] risolve evidentemente il problema (3.27); pertanto, in forza del Teorema 3.2, il termine noto $f - \mathcal{L}w$ *deve* verificare (3.23), e cioè f deve verificare (3.26).

Per provare che [una volta che $f \in L^2(\Omega)$ soddisfi la (3.26)] la soluzione di (3.24) è unica, supponiamo che [oltre ad $u \in W_\alpha$] (3.24) ammetta anche la soluzione $u' \in W_\alpha$; allora [cfr. (3.11) con $\theta = 1$] vale l'implicazione:

$$\{\mathcal{L}(u - u') \equiv \mathcal{L}_1(u - u') = 0, \quad u - u' \in W\} \Rightarrow u' \equiv u. \qquad \square$$

BIBLIOGRAFIA

[1] D. Gilbarg - N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of second order,* 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[2] C. Miranda, *Sulle Equazioni Ellittiche del secondo ordine a coefficienti discontinui,* Ann. Mat. Pura Appl., 63 (1963), pp. 353-386.

[3] M. Schechter, *Principles of Functional Analysis,* Academic Press, New York, 1971.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli",
Università di Napoli "Federico II",
Complesso Monte S. Angelo, Via Cintia,
80126 Napoli (ITALY)