LE MATEMATICHE
Vol. LI (1996) – Fasc. II, pp. 413–443

PROCESSI DI CONTROLLO CON PARAMETRI DISTRIBUITI IN INSIEMI NON LIMITATI. PROBLEMI DI CONTROLLO

G. PULVIRENTI - G. SANTAGATI - A. VILLANI

Con stima e devozione a Francesco Guglielmino nel suo 70^{mo} compleanno

We consider the following distributed parameter linear control system

(E)
$$z_{xy} + A(x, y)z_x + B(x, y)z_y + C(x, y)z = \\ = F(x, y)U(x, y) + G(x, y)\,.$$

Here (x, y) ranges over the unbounded set

$$L(\alpha, \beta) = ([0, \alpha[\times[0, +\infty[) \cup ([0, +\infty[\times[0, \beta[)\ , \\ (\alpha, \beta) \in\,]0, +\infty]\times]0, +\infty]\,,$$

the state vector function z belongs to the Sobolev space

$$\widetilde{W}^*_p(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n) = \\ = \left\{ z \in L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n) : z_x\,, z_y\,, z_{xy} \in L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n) \right\}$$

and the control vector function U is in $L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$; moreover, the traces of z on

$$l(0, 0) = ([0, +\infty[\times\{0\}) \cup (\{0\} \times [0, +\infty[)\,,$$

Entrato in Redazione il 18 agosto 1997.
Lavoro eseguito con il contributo finanziario del MURST.

and on

$$l(a, b) = ([a, +\infty[\times\{b\}) \cup (\{a\} \times [b, +\infty[) \ , \ (a, b) \in]0, \alpha[\times]0, \beta[\ ,$$

(which are elements of the same functional space of Sobolev type) are taken to be the initial state and the final state, respectively.

In this setting, we study some classical control problems related to the control system (E), considering both the function U and the initial state as the controls (the permanent control and the initial control, respectively). To this aim, we previously establish a characterization of the attainable set.

1. Introduzione.

Posto, per ogni $(u, v) \in]0, +\infty]\times]0, +\infty]$,

$$L(u, v) = ([0, u[\times[0, +\infty[) \cup ([0, +\infty[\times[0, v[)$$

e, per ogni $(u, v) \in [0, +\infty[\times[0, +\infty[$,

$$l(u, v) = ([u, +\infty[\times\{v\}) \cup (\{u\} \times [v, +\infty[) \ ,$$

e assegnati $(\alpha, \beta) \in]0, +\infty]\times]0, +\infty]$, $(a, b) \in]0, \alpha[\times]0, \beta[$, $p \in [1, +\infty]$, si consideri il *processo di controllo con parametri distribuiti*

$$\text{(E)} \qquad \begin{aligned} & z_{xy} + A(x, y)z_x + B(x, y)z_y + C(x, y)z = \\ & \qquad = F(x, y)U(x, y) + G(x, y) \quad \text{q.o. } (x, y) \in L(\alpha, \beta) \, , \end{aligned}$$

dove A, B, C, F, G sono funzioni, definite in $L(\alpha, \beta)$ ed a valori matrici di dimensioni appropriate, verificanti opportune ipotesi di regolarità, il *controllo* U è una funzione m-vettore, elemento di $L^p_{\text{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$, la *risposta* z è una funzione n-vettore, elemento dello spazio (del tipo di Sobolev) $\widetilde{W}^*_p(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$, e si assumano come *stato iniziale* la traccia di z su $l(0, 0)$ e come *stato finale* la traccia di z su $l(a, b)$, elementi dello stesso spazio funzionale $\widetilde{\Xi}^{(n)}_p$ (anche questo del tipo di Sobolev).

L'opportunità di scegliere gli stati iniziali e finali in uno stesso spazio funzionale e senza condizioni "di raccordo" è stata evidenziata in alcuni lavori (A. Villani [9], G. Pulvirenti - G. Santagati [5]), nei quali, supposto che il controllo U potesse variare in tutto lo spazio $L^p_{\text{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$, sono state stabilite delle condizioni affinchè, per ogni stato iniziale, il corrispondente insieme degli stati finali sia coincidente con lo spazio $\widetilde{\Xi}^{(n)}_p$ (problema della *controllabilità completa esatta*) ovvero sia un insieme ivi denso (problema della *controllabilità completa approssimata*).

Successivamente è stata studiata (G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [6]) la struttura dell'*insieme raggiungibile*, cioè dell'insieme degli stati finali che si ottengono a partire da un prefissato stato iniziale $(\varphi, \psi) \in \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ mediante i controlli U di un assegntato insieme $\mathcal{U} \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$.

Nel presente lavoro, prendendo spunto da una classica formulazione di problemi di controllo per processi a parametri concentrati (R. Conti [1], Cap. IV), supposto di poter fare variare lo stato iniziale (φ, ψ) (*controllo iniziale*) in un insieme $\Omega_0 \subseteq \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$, non necessariamente ridotto ad un punto, e dato un insieme (di *controlli permanenti*) $\mathcal{U} \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$, viene considerato come controllo l'elemento $((\varphi, \psi), U) \in \Omega_0 \times \mathcal{U}$ e, assegnata una *Proprietà* $\mathcal{P}$ (connessa con il processo (E)), viene studiato, nei nn. 5, 6, 7, il *Problema di controllo* consistente nello stabilire se tra i controlli $((\varphi, \psi), U) \in \Omega_0 \times \mathcal{U}$ ne esista qualcuno verificante la *Proprietà* $\mathcal{P}$.

A tale scopo, dopo aver dato preliminarmente, nei nn. 2 e 3, brevi richiami, rispettivamente, sugli spazi funzionali utilizzati e sulla formula di rappresentazione delle soluzioni di (E), viene effettuato, nel n. 4, uno studio dell'insieme raggiungibile mediante i controlli $((\varphi, \psi), U) \in \Omega_0 \times \mathcal{U}$.

Nel n. 8, supposto $p \in [1, +\infty[$, viene data una veste più agevole ai risultati precedentemente acquisiti mediante l'uso delle *aggiunte* di due opportune applicazioni.

Nel n. 9, infine, vengono mostrate applicazioni di detti risultati ad una particolare classe di processi scalari.

2. Spazi funzionali.

Riportiamo, in questo numero, le definizioni e le principali proprietà degli spazi funzionali che utilizzeremo in seguito; per maggiori dettagli rinviamo al n. 2 di A. Villani [8] ed ai nn. 2 e 3 di G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [6].

Siano, d'ora in poi: p, p' elementi coniugati di $[1, +\infty]$; X un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^d$ avente misura positiva; $\alpha, \beta \in]0, +\infty]$.

Definizione 2.1. $L^p_{\mathrm{loc}}(X, \mathbb{R}^s)$ *è lo spazio l.t.* (1) *completo delle* [*classi di*] *funzioni misurabili* $l : X \to \mathbb{R}^s$ *le cui restrizioni ad ogni compatto* $K \subseteq X$ *appartengono a* $L^p(K, \mathbb{R}^s)$*, con la famiglia di seminorme*

$$\pi_K(l) = \|l\|_{L^p(K,\mathbb{R}^s)} \quad \forall\, l \in L^p_{\mathrm{loc}}(X, \mathbb{R}^s),$$

(1) Cioè lineare topologico, separato e localmente convesso.

al variare del compatto $K \subseteq X$.

È bene ricordare che (cfr. A. Villani [10]) lo spazio $L^p_{\text{loc}}(X, \mathbb{R}^s)$ risulta metrizzabile, e quindi di Fréchet, se e solo se esiste una successione $\{C_r\}$ di sottoinsiemi compatti di X tale che, per ogni compatto $K \subseteq X$, si abbia $m(K \setminus C_r) = 0$ per qualche $r \in \mathbb{N}$, oppure, più semplicemente, nel caso in cui $\overset{\circ}{X}$ è denso in X, se e solo se $\overline{X} \setminus X$ è un insieme chiuso.

Definizione 2.2. $L^{p'}_c(X, \mathbb{R}^s)$ *è lo spazio l.t. delle* [*classi di*] *funzioni misurabili* $\sigma : X \to \mathbb{R}^s$ *che appartengono a* $L^{p'}(X, \mathbb{R}^s)$ *e sono a supporto compatto in* X, *con la famiglia di seminorme*

$$\pi_Y(\sigma) = \sup_{l \in Y} \left| \int_X \sigma^*(x) l(x)\, dx \right| \qquad \forall \sigma \in L^{p'}_c(X, \mathbb{R}^s),$$

al variare di Y *nella famiglia degli insiemi limitati* ([2]) *di* $L^p_{\text{loc}}(X, \mathbb{R}^s)$.

Considerata l'applicazione $\sigma \to l'(\sigma)$, da $L^{p'}_c(X, \mathbb{R}^s)$ in $\left(L^p_{\text{loc}}(X, \mathbb{R}^s)\right)'$, spazio duale forte di $L^p_{\text{loc}}(X, \mathbb{R}^s)$, definita ponendo

$$\langle l, l'(\sigma)\rangle = \int_X \sigma^*(x) l(x)\, dx \quad \forall\, l \in L^p_{\text{loc}}(X, \mathbb{R}^s), \tag{2.1}$$

si ha il

Teorema 2.1. *L'applicazione* $\sigma \to l'(\sigma)$, *che ad ogni* $\sigma \in L^{p'}_c(X, \mathbb{R}^s)$ *associa l'elemento* $l'(\sigma)$ *di* $\left(L^p_{\text{loc}}(X, \mathbb{R}^s)\right)'$ *dato dalla* (2.1), *è un isomorfismo algebrico e topologico tra* $L^{p'}_c(X, \mathbb{R}^s)$ *e* $l'(L^{p'}_c(X, \mathbb{R}^s))$, *sottospazio di* $\left(L^p_{\text{loc}}(X, \mathbb{R}^s)\right)'$. *Se* $p \in [1, +\infty[$ *si ha*

$$l'(L^{p'}_c(X, \mathbb{R}^s)) = \left(L^p_{\text{loc}}(X, \mathbb{R}^s)\right)'.$$

Definizione 2.3. $\widetilde{W}^*_p(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$ *è lo spazio di Fréchet delle* [*classi di*] *funzioni misurabili* $w : L(\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ *le cui restrizioni ad ogni aperto limitato* Ω *tale che* $\overline{\Omega} \subset L(\alpha, \beta)$ *appartengono a* $W^*_p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ([3]), *con la famiglia di seminorme*

$$\pi_\Omega(w) = \|w\|_{W^*_p(\Omega, \mathbb{R}^n)} \qquad \forall w \in \widetilde{W}^*_p(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n),$$

al variare di Ω *nella famiglia degli insiemi aperti e limitati tali che* $\overline{\Omega} \subset L(\alpha, \beta)$.

([2]) Nel senso degli spazi lineari topologici.

([3]) Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^2$, $W^*_p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ è (cfr. R. Di Vincenzo - A. Villani [2], M.B. Suryanarayana [7]) lo spazio di Banach delle [classi di] funzioni misurabili $w : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tali che $w, w_x, w_y, w_{xy} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (le derivate essendo intese nel senso

Gli elementi di $\widetilde{W}_p^*(L(\alpha,\beta),\mathbb{R}^n)$ sono tutte e sole le funzioni w che appartengono a $L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha,\beta),\mathbb{R}^n)$ assieme alle derivate (nel senso delle distribuzioni su $\overbrace{L(\alpha,\beta)}^{\circ}$) w_x, w_y, w_{xy}. Inoltre, denotato con $\widetilde{\mathcal{S}}_p$ lo spazio di Fréchet prodotto

$$L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha,\beta),\mathbb{R}^n)\times L^p_{\mathrm{loc}}([0,+\infty[,\mathbb{R}^n)\times L^p_{\mathrm{loc}}([0,+\infty[,\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n,$$

si ha il

Teorema 2.2. *Gli elementi di* $\widetilde{W}_p^*(L(\alpha,\beta),\mathbb{R}^n)$ *sono tutte e sole le funzioni* w *della forma*

$$(2.2)\quad w(x,y)=\int_0^x\int_0^y h(u,v)\,du\,dv+\int_0^x h_1(u)\,du+\int_0^y h_2(v)\,dv+\lambda \qquad \forall(x,y)\in L(\alpha,\beta),$$

con $(h,h_1,h_2,\lambda)\in\widetilde{\mathcal{S}}_p$*; la trasformazione lineare* $(h,h_1,h_2,\lambda)\to w$*, data dalla* (2.2)*, è un isomorfismo algebrico e topologico tra* $\widetilde{\mathcal{S}}_p$ *e* $\widetilde{W}_p^*(L(\alpha,\beta),\mathbb{R}^n)$*.*

Conseguentemente gli elementi di $\widetilde{W}_p^*(L(\alpha,\beta),\mathbb{R}^n)$ sono funzioni continue in $L(\alpha,\beta)$ e pertanto dotate di traccia su $l(u,v)$, $(u,v)\in[0,\alpha[\times[0,\beta[$.

Allo scopo di richiamare lo spazio delle suddette tracce, ricordiamo preliminarmente la

Definizione 2.4. $\widetilde{W}^{1,p}([0,+\infty[,\mathbb{R}^n)$ *è lo spazio delle* [*classi di*] *funzioni misurabili* $\varphi:[0,+\infty[\to\mathbb{R}^n$ *le cui restrizioni ad ogni aperto limitato* $A\subset]0,+\infty[$ *appartengono allo spazio di Sobolev* $W^{1,p}(A,\mathbb{R}^n)$*, con la famiglia di seminorme*

$$\pi_A(\varphi)=\|\varphi\|_{W^{1,p}(A,\mathbb{R}^n)}\qquad\forall\varphi\in\widetilde{W}^{1,p}([0,+\infty[,\mathbb{R}^n),$$

al variare dell'aperto limitato $A\subset]0,+\infty[$.

---

delle distribuzioni su Ω), con la norma

$$\|w\|_{W_p^*(\Omega,\mathbb{R}^n)}=\left(\|w\|^p_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)}+\|w_x\|^p_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)}+\|w_y\|^p_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)}+\|w_{xy}\|^p_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}},\qquad p\in[1,+\infty[,$$

$$\|w\|_{W_\infty^*(\Omega,\mathbb{R}^n)}=\sup\left\{\|w\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)},\|w_x\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)},\|w_y\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)},\|w_{xy}\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)}\right\}.$$

Analogamente a quanto visto per $\widetilde{W}_p^*(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$, gli elementi di $\widetilde{W}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$ sono tutte e sole le funzioni φ che appartengono a $L^p_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$ assieme alle derivate prime (nel senso delle distribuzioni su $]0, +\infty[$), e si ha inoltre il

Teorema 2.3. *Gli elementi di* $\widetilde{W}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$ *sono tutte e sole le funzioni* φ *della forma*

$$\varphi(t) = \int_0^t k(s)\, ds + \delta \quad \forall t \in [0, +\infty[, \tag{2.3}$$

con

$$(k, \delta) \in L^p_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n;$$

la trasformazione lineare $(k, \delta) \to \varphi$*, data dalla* (2.3)*, è un isomorfismo algebrico e topologico tra lo spazio di Fréchet prodotto* $L^p_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ *e* $\widetilde{W}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$.

Pertanto gli elementi di $\widetilde{W}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$ sono funzioni continue in $[0, +\infty[$ e quindi ha senso la seguente

Definizione 2.5. $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ *è lo spazio di Fréchet*

$$\left\{(\varphi, \psi) \in \widetilde{W}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \widetilde{W}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) : \varphi(0) = \psi(0)\right\},$$

sottospazio lineare chiuso dello spazio di Fréchet prodotto

$$\widetilde{W}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \widetilde{W}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$$

munito della famiglia di seminorme

$$\pi_{A,B}(\varphi, \psi) = \pi_A(\varphi) + \pi_B(\psi) \qquad \forall (\varphi, \psi) \in \widetilde{W}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \widetilde{W}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n),$$

al variare degli aperti limitati $A, B \subset]0, +\infty[$.

Per il Teorema 2.3 si ha

Teorema 2.4. *Gli elementi di* $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ *sono tutte e sole le coppie di funzioni* (φ, ψ) *della forma*

$$\varphi(t) = \int_0^t k(s)\, ds + \delta\ , \ \ \psi(t) = \int_0^t l(s)\, ds + \delta \quad \forall t \in [0, +\infty[, \tag{2.4}$$

con

$$(k, l, \delta) \in L^p_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L^p_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n;$$

la trasformazione lineare $(k, l, \delta) \to (\varphi, \psi)$*, data dalla* (2.4)*, è un isomorfismo algebrico e topologico tra lo spazio di Fréchet prodotto*

$$L^p_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L^p_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$$

e $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$.

Conseguentemente, poichè l'isomorfismo inverso di $(k, l, \delta) \to (\varphi, \psi)$ è la trasformazione che ad ogni $(\varphi, \psi) \in \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ fa corrispondere

$$(\varphi', \psi', \varphi(0)) \in L^p_{\text{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L^p_{\text{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n,$$

si ha, per il Teorema 2.1,

Teorema 2.5. *Se* $p \in [1, +\infty[$*, l'applicazione che ad ogni*

$$(\mu, \nu, \xi) \in L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$$

fa corrispondere l'elemento Q *dello spazio* $(\widetilde{\Xi}_p^{(n)})'$*, duale forte di* $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$*, dato da*

$$\langle(\varphi, \psi), Q\rangle = \int_0^{+\infty} \mu^*(t)\varphi'(t)\, dt + \tag{2.5}$$
$$+ \int_0^{+\infty} \nu^*(t)\psi'(t)\, dt + \xi^*\varphi(0) \quad \forall(\varphi, \psi) \in \widetilde{\Xi}_p^{(n)},$$

è un isomorfismo algebrico e topologico tra $(\widetilde{\Xi}_p^{(n)})'$ *e lo spazio l.t. prodotto*

$$L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n.$$

Una ulteriore conseguenza dell'isomorfismo del precedente Teorema 2.4, del risultato di riflessività per $L^p_{\text{loc}}(X, \mathbb{R}^s)$ (Teorema 2.4 di G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [6]) e di ben note proprietà degli spazi riflessivi (cfr., ad es., J.L. Kelley - I. Namioka [4], p. 194) è il

Teorema 2.6. *Se* $p \in]1, +\infty[$*, lo spazio* $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ *è riflessivo.*

Ritornando, infine, alle tracce delle funzioni $w \in \widetilde{W}_p^*(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$, ricordiamo che, se $(x_0, y_0) \in [0, \alpha[\times[0, \beta[$, la restrizione di ogni $w \in \widetilde{W}_p^*(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$ a $l(x_0, y_0)$ individua (Teoremi 2.2 e 2.4) un elemento $\gamma_{(x_0, y_0)}w = (\varphi_{(x_0, y_0), w}, \psi_{(x_0, y_0), w})$ di $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ mediante la posizione

$$\varphi_{(x_0, y_0), w}(t) = w(x_0 + t, y_0)\ ,\ \psi_{(x_0, y_0), w}(t) = w(x_0, y_0 + t) \qquad \forall t \in [0, +\infty[\tag{2.6}$$

ed ha senso, allora, la seguente

Definizione 2.6. *Per ogni* $w \in \widetilde{W}_p^*(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$*, dicesi traccia di* w *su* $l(x_0, y_0)$*,* $(x_0, y_0) \in [0, \alpha[\times[0, \beta[$*, l'elemento* $\gamma_{(x_0, y_0)}w$ *di* $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ *individuato dalla* (2.6).

Si ha

Teorema 2.7. *Per ogni* $(x_0, y_0) \in [0, \alpha[\times[0, \beta[$, *la trasformazione* $w \to \gamma_{(x_0, y_0)} w$ *è lineare e continua da* $\widetilde{W}^*_p(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$ *su* $\widetilde{\Xi}^{(n)}_p$.

3. Soluzioni di (E) e loro rappresentazione.

Siano, d'ora in poi:

$$A, B, C, A_x, B_y \in C^0(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^{n,n});$$

$$F \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^{n,m}); \quad G \in L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n).$$

Si ha, allora ([4])

Teorema 3.1. *Per ogni* $(\varphi, \psi) \in \widetilde{\Xi}^{(n)}_p$ *ed ogni* $U \in L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$ *esiste una ed una sola funzione* $(x, y) \to z(x, y; (\varphi, \psi), U)$, *elemento di* $\widetilde{W}^*_p(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$, *soluzione del processo di controllo* (E), *verificante la condizione*

(C) $$\gamma_{(0,0)} z(\cdot\,; (\varphi, \psi), U) = (\varphi, \psi).$$

La trasformazione

$$((\varphi, \psi), U)) \to z(\cdot\,; (\varphi, \psi), U),$$

da $\widetilde{\Xi}^{(n)}_p \times L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$ *in* $\widetilde{W}^*_p(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$, *è affine e continua.*

Inoltre, per ogni $(\varphi, \psi) \in \widetilde{\Xi}^{(n)}_p$ ed ogni $U \in L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$, la funzione $z(\cdot\,; (\varphi, \psi), U)$ ha la seguente rappresentazione:

$$\begin{aligned} z(x, y; (\varphi, \psi), U) &= \zeta(x, y; (\varphi, \psi)) + \\ &+ \int_0^x \int_0^y V(u, v; x, y) F(u, v) U(u, v)\, du dv + \\ &+ \int_0^x \int_0^y V(u, v; x, y) G(u, v)\, du dv \quad \forall (x, y) \in L(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

dove V è la matrice di evoluzione associata all'operatore lineare e continuo (da $\widetilde{W}^*_p(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$ in $L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$)

$$P : z \to Pz = z_{xy} + A z_x + B z_y + C z$$

([4]) Si vedano, anche per maggiori dettagli, i nn. 3 e 4 di A. Villani [8].

e

$$
\begin{aligned}
(x, y) \to \zeta(x, y; (\varphi, \psi)) = V(0,0; x, y)\varphi(0) + \\
+ \int_0^x V(u, 0; x, y)[\varphi'(u) + B(u,0)\varphi(u)]\, du + \\
+ \int_0^y V(0, v; x, y)[\psi'(v) + A(0,v)\psi(v)]\, dv, \quad (x, y) \in L(\alpha, \beta),
\end{aligned}
$$

è l'unica soluzione del problema:

$$
\zeta \in \widetilde{W}_p^*(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n), \quad P\zeta = 0, \quad \gamma_{(0,0)}\zeta = (\varphi, \psi).
$$

4. Insieme raggiungibile. Caratterizzazione della chiusura convessa.

Da quanto precedentemente ricordato segue che, fissati $(\varphi, \psi) \in \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ e $U \in L^p_{\text{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$, per ogni $(x_0, y_0) \in [0, \alpha[\times[0, \beta[$, la traccia della risposta $z(\cdot\,; (\varphi, \psi), U)$ su $l(x_0, y_0)$,

$$
\gamma_{(x_0, y_0)} z(\cdot\,; (\varphi, \psi), U),
$$

è un elemento dello spazio (indipendente da (x_0, y_0)) $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$. Tale traccia dicesi *stato* della $z(\cdot\,; (\varphi, \psi), U)$ corrispondente ai valori $x = x_0$, $y = y_0$ dei parametri. In particolare, lo stato della $z(\cdot\,; (\varphi, \psi), U)$ corrispondente ai valori $x = 0$, $y = 0$ dei parametri (cioè (φ, ψ)) è detto *stato iniziale*, mentre quello corrispondente ai valori $x = a$, $y = b$ dei parametri (essendo (a, b) un prefissato punto di $]0, \alpha[\times]0, \beta[$) è detto *stato finale*.

Siano assegnati, d'ora in poi, un sottoinsieme Ω_0 di $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ e un sottoinsieme $\mathcal{U}$ di $L^p_{\text{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$, e supponiamo di poter far variare lo stato iniziale (φ, ψ) nell'insieme Ω_0 e la funzione U nell'insieme $\mathcal{U}$. Poichè lo stato della $z(\cdot\,; (\varphi, \psi), U)$ in corrispondenza dei parametri x e y dipende sia da (φ, ψ) che da U, ne viene che il sistema retto dal processo (E) è controllabile sia tramite (φ, ψ) che tramite U. Lo stato iniziale (φ, ψ) è detto *controllo iniziale*, U *controllo permanente* e la coppia $((\varphi, \psi), U)$ *controllo*.

Poniamo, inoltre, la seguente

Definizione 4.1. *Dati $(a, b) \in]0, \alpha[\times]0, \beta[$, $\Omega_0 \subseteq \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$, $\mathcal{U} \subseteq L^p_{\text{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$, dicesi insieme raggiungibile relativo a $l(a, b)$, a partire dagli stati iniziali $(\varphi, \psi) \in \Omega_0$ su $l(0, 0)$, mediante i controlli $U \in \mathcal{U}$, l'insieme*

$$
\mathcal{A}((0,0), (a, b); \Omega_0, \mathcal{U}) = \left\{\gamma_{(a,b)} z(\cdot\,; (\varphi, \psi), U) : ((\varphi, \psi), U) \in \Omega_0 \times \mathcal{U}\right\}
$$

degli stati finali che si ottengono al variare di (φ, ψ) in Ω_0 e di U in $\mathcal{U}$.

Allo scopo di ottenere un'espressione dell'insieme raggiungibile che ne espliciti la dipendenza dai controlli iniziali $(\varphi, \psi) \in \Omega_0$ e dai controlli permanenti $U \in \mathcal{U}$ e consenta, poi, di caratterizzarne la chiusura convessa, introduciamo le seguenti notazioni.

Denotiamo (A. Villani [9], n. 4) con Λ l'applicazione lineare e continua, da $L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$ in $\widetilde{W}^*_p(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$, che ad ogni $U \in L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$ associa l'elemento di $\widetilde{W}^*_p(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$ dato dalla funzione

$$(x, y) \to \int_0^x \int_0^y V(u, v; x, y) F(u, v) U(u, v)\, du dv, \quad (x, y) \in L(\alpha, \beta),$$

e, per ogni $(x_0, y_0) \in [0, \alpha[\times[0, \beta[$, con $\Lambda_{(x_0, y_0)}$ l'applicazione lineare e continua da $L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$ in $\widetilde{\Xi}^{(n)}_p$, definita ponendo

$$\Lambda_{(x_0, y_0)} U = \gamma_{(x_0, y_0)} \Lambda U \quad \forall U \in L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m).$$

Inoltre, facendo seguito a quanto precisato alla fine del numero precedente, denotiamo con Γ l'applicazione lineare e continua (Teorema 3.1), da $\widetilde{\Xi}^{(n)}_p$ in $\widetilde{W}^*_p(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$, che ad ogni $(\varphi, \psi) \in \widetilde{\Xi}^{(n)}_p$ associa l'elemento di $\widetilde{W}^*_p(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$ dato dalla funzione

$$(x, y) \to \zeta(x, y; (\varphi, \psi)), \quad (x, y) \in L(\alpha, \beta),$$

e, per ogni $(x_0, y_0) \in [0, \alpha[\times[0, \beta[$, con $\Gamma_{(x_0, y_0)}$ l'applicazione lineare e continua (Teorema 2.7), da $\widetilde{\Xi}^{(n)}_p$ in sè, definita ponendo

$$\Gamma_{(x_0, y_0)}(\varphi, \psi) = \gamma_{(x_0, y_0)} \Gamma(\varphi, \psi) \quad \forall (\varphi, \psi) \in \widetilde{\Xi}^{(n)}_p.$$

Osservazione 4.1. Per ogni $(x_0, y_0) \in [0, \alpha[\times[0, \beta[$, l'applicazione $\Gamma_{(x_0, y_0)}$, lineare e continua da $\widetilde{\Xi}^{(n)}_p$ in sè, è suriettiva e se $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ non iniettiva.

Denotiamo, infine, con $\mathcal{G}$ l'elemento di $\widetilde{W}^*_p(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$ dato dalla funzione

$$(x, y) \to \int_0^x \int_0^y V(u, v; x, y) G(u, v))\, du dv, \quad (x, y) \in L(\alpha, \beta).$$

Si ha, allora, per ogni $(\varphi, \psi) \in \widetilde{\Xi}^{(n)}_p$ ed ogni $U \in L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$,

$$\gamma_{(a,b)} z(\cdot\,; (\varphi, \psi), U) = \Gamma_{(a,b)}(\varphi, \psi) + \Lambda_{(a,b)} U + \gamma_{(a,b)} \mathcal{G}$$

e, conseguentemente,

$$\mathcal{A}((0,0),(a,b);\Omega_0,\mathcal{U}) = \Gamma_{(a,b)}\Omega_0 + \Lambda_{(a,b)}\mathcal{U} + \gamma_{(a,b)}\mathcal{G}.$$

Da un risultato generale sulla rappresentazione della chiusura convessa di un insieme mediante la sua funzione di appoggio ([5]) segue che

$$\begin{aligned}
&\overline{\text{co}}\mathcal{A}((0,0),(a,b);\Omega_0,\mathcal{U}) = \overline{\text{co}}(\Gamma_{(a,b)}\Omega_0 + \Lambda_{(a,b)}\mathcal{U} + \gamma_{(a,b)}\mathcal{G}) = \\
&= \left\{(\chi,\eta)\in\widetilde{\Xi}_p^{(n)} : \langle(\chi,\eta),Q\rangle \le h_{\Gamma_{(a,b)}\Omega_0+\Lambda_{(a,b)}\mathcal{U}+\gamma_{(a,b)}\mathcal{G}}(Q) \quad \forall Q\in(\widetilde{\Xi}_p^{(n)})'\right\} = \\
&= \Big\{(\chi,\eta)\in\widetilde{\Xi}_p^{(n)} : \langle(\chi,\eta),Q\rangle \le \\
&\le \sup_{\substack{(\varphi,\psi)\in\Omega_0\\ U\in\mathcal{U}}} \langle\Gamma_{(a,b)}(\varphi,\psi) + \Lambda_{(a,b)}U + \gamma_{(a,b)}\mathcal{G}, Q\rangle \quad \forall Q\in(\widetilde{\Xi}_p^{(n)})'\Big\}
\end{aligned}$$

e, pertanto, denotate con

$$\Gamma'_{(a,b)} : (\widetilde{\Xi}_p^{(n)})' \to (\widetilde{\Xi}_p^{(n)})'$$

e con

$$\Lambda'_{(a,b)} : (\widetilde{\Xi}_p^{(n)})' \to (L^p_{\text{loc}}(L(\alpha,\beta),\mathbb{R}^m))'$$

le trasformazioni aggiunte di $\Gamma_{(a,b)}$ e di $\Lambda_{(a,b)}$ rispettivamente, si ha il

---

([5]) Se Σ è uno spazio lineare topologico (reale), Σ' il suo duale forte e S un sottoinsieme non vuoto di Σ, si chiama *funzione di appoggio di* S la funzione $h_S : \Sigma' \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ definita ponendo

$$h_S(s') = \sup_{s\in S}\langle s,s'\rangle \quad \forall s'\in\Sigma'.$$

Denotata con $\overline{\text{co}}(S)$ la chiusura convessa di S, cioè l'intersezione dei convessi e chiusi che contengono S, è noto (cfr., ad es., G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [6], n. 5) che se Σ è uno spazio l.t. e S e T sono due sottoinsiemi di Σ diversi dall'insieme vuoto, risulta

$$\overline{\text{co}}(S) = \{s\in\Sigma : \langle s,s'\rangle \le h_S(s') \quad \forall s'\in\Sigma'\}$$

e, conseguentemente,

$$\overline{\text{co}}(S) \subseteq \overline{\text{co}}(T) \Leftrightarrow h_S(s') \le h_T(s') \quad \forall s'\in\Sigma'.$$

Teorema 4.1. *Assegnati il processo di controllo* (E)*, le coppie di parametri* $(0,0)$ *e* (a,b)*, l'insieme* $\Omega_0 \subseteq \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ *dei controlli iniziali e l'insieme* $\mathcal{U} \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha,\beta),\mathbb{R}^m)$ *dei controlli permanenti, risulta*

$$\overline{\mathrm{co}}\mathcal{A}((0,0),(a,b);\Omega_0,\mathcal{U}) =$$
$$= \Big\{(\chi,\eta) \in \widetilde{\Xi}_p^{(n)} : \langle(\chi,\eta),Q\rangle \leq \sup_{(\varphi,\psi)\in\Omega_0} \langle\Gamma_{(a,b)}(\varphi,\psi),Q\rangle +$$
$$+ \sup_{U\in\mathcal{U}} \langle\Lambda_{(a,b)}U,Q\rangle + \langle\gamma_{(a,b)}\mathcal{G},Q\rangle \quad \forall\, Q \in (\widetilde{\Xi}_p^{(n)})'\Big\} =$$
$$= \Big\{(\chi,\eta) \in \widetilde{\Xi}_p^{(n)} : \langle(\chi,\eta),Q\rangle \leq \sup_{(\varphi,\psi)\in\Omega_0} \langle(\varphi,\psi),\Gamma'_{(a,b)}Q\rangle +$$
$$+ \sup_{U\in\mathcal{U}} \langle U,\Lambda'_{(a,b)}Q\rangle + \langle\gamma_{(a,b)}\mathcal{G},Q\rangle \quad \forall\, Q \in (\widetilde{\Xi}_p^{(n)})'\Big\}.$$

5. Problemi di controllo.

In generale dicesi *Problema di controllo* relativo al processo (E) ogni problema consistente nella ricerca di controlli (fra quelli disponibili) verificanti un'assegnata proprietà connessa con il Processo (E).

Qui, in particolare, consideriamo la proprietà dell'appartenenza dello stato finale ad un dato sottoinsieme di $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$; in altre parole ci occupiamo del problema della ricerca di controlli $((\varphi,\psi),U) \in \Omega_0 \times \mathcal{U}$ che "trasferiscano" lo stato del sistema da un insieme Ω_0 di stati iniziali ad un insieme Ω, detto *obiettivo*, di stati finali.

Più precisamente consideriamo il

Problema $[(0,0),(a,b),\mathcal{U},\Omega_0,\Omega]$. *Siano assegnati il processo di controllo* (E)*, le coppie di parametri* $(0,0)$ *e* (a,b)*, l'insieme* $\Omega_0 \subseteq \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ *dei controlli iniziali, l'insieme* $\mathcal{U} \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha,\beta),\mathbb{R}^m)$ *dei controlli permanenti e un insieme obiettivo* $\Omega \subseteq \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$*. Determinare* $(\varphi,\psi) \in \Omega_0$ *e* $U \in \mathcal{U}$ *tali che*

$$\gamma_{(a,b)}z(\cdot\,;(\varphi,\psi),U) \in \Omega.$$

Poichè, come già osservato a proposito dello studio della controllabiltà completa esatta (A. Villani [9]) e della controllabiltà completa approssimata (G. Pulvirenti - G. Santagati [5]), lo spazio degli stati relativi al processo di controllo (E) è ad infinite dimensioni, oltre al problema precedente (di tipo "esatto") è importante studiare anche il seguente problema (di tipo "approssimato").

Problema $[(0,0),(a,b),\mathcal{U},\Omega_0,\Omega]_\varepsilon$. *Siano assegnati il processo di controllo* (E)*, le coppie di parametri* $(0,0)$ *e* (a,b)*, l'insieme* $\Omega_0 \subseteq \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ *dei controlli iniziali, l'insieme* $\mathcal{U} \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha,\beta),\mathbb{R}^m)$ *dei controlli permanenti e un insieme obiettivo* $\Omega \subseteq \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$*. Per ogni* $\varepsilon > 0$ *ed ogni seminorma* $\pi = \pi_{A,B}$ *su* $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ *determinare* $(\varphi,\psi)_{\varepsilon,\pi} \in \Omega_0$*,* $U_{\varepsilon,\pi} \in \mathcal{U}$ *e* $(\lambda,\delta)_{\varepsilon,\pi} \in \Omega$ *tali che*

$$\pi(\gamma_{(a,b)}z(\cdot\,;(\varphi,\psi)_{\varepsilon,\pi},U_{\varepsilon,\pi}) - (\lambda,\delta)_{\varepsilon,\pi}) < \varepsilon.$$

Osservazione 5.1. Sia l'insieme Ω_0 che l'insieme Ω possono essere formati da un solo punto di $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$; si hanno, in tali evenienze, interessanti casi particolari dei precedenti problemi.

Ovviamente, se il Problema $[(0,0),(a,b),\mathcal{U},\Omega_0,\Omega]$ ha soluzioni ne ha anche il Problema $[(0,0),(a,b),\mathcal{U},\Omega_0,\Omega]_\varepsilon$. Il viceversa non è vero, neanche se $\mathcal{U}$ coincide con l'intero spazio dei controlli permanenti, a causa del fatto che (G. Pulvirenti - G. Santagati [5], Osservazione 7.2) esistono processi di controllo (E) che sono completamente $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$-ε-controllabili ma non sono completamente $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$-controllabili relativamente ad (a,b); infatti, riprendendo l'Esempio 7.1 di G. Pulvirenti - G. Santagati [5], abbiamo il seguente esempio.

Esempio 5.1. Siano $\alpha = \beta = +\infty$; $n = m = 1$; $p \in [1,+\infty[$; $A = B = C = G = 0$ (quindi $V(u,v;x,y) = 1$); $F(x,y) = x - 1$ $\forall (x,y) \in L(+\infty,+\infty)$; $(a,b) = (1,1)$; $\Omega_0 = \{(\theta,\theta)\}$ dove $\theta(t) = 0$ $\forall t \in [0,+\infty[$; $\mathcal{U} = L^p_{\mathrm{loc}}(L(+\infty,+\infty),\mathbb{R})$; $\Omega = \{(J,J)\}$ dove $J(t) = t$ $\forall t \in [0,+\infty[$.

Per quanto visto nel suddetto Esempio 7.1 di G. Pulvirenti - G. Santagati [5], si ha che in questo caso il Problema $[(0,0),(1,1),L^p_{\mathrm{loc}}(L(+\infty,+\infty),\mathbb{R}), \{(\theta,\theta)\},\{(J,J)\}]_\varepsilon$ ha soluzioni mentre il corrispondente Problema $[(0,0), (1,1), L^p_{\mathrm{loc}}(L(+\infty,+\infty),\mathbb{R}), \{(\theta,\theta)\},\{(J,J)\}]$ non ne ha.

Ulteriori esempi saranno indicati nella successiva Osservazione 5.2.

Utilizzando l'insieme raggiungibile $\mathcal{A}((0,0),(a,b);\Omega_0,\mathcal{U})$, che per brevità denoteremo d'ora in poi con $\mathcal{A}$, si ha ovviamente la

Proposizione 5.1. *La risolubilità del* Problema $[(0,0),(a,b),\mathcal{U},\Omega_0,\Omega]$ *è equivalente alla validità della relazione*

$$\Omega \cap \mathcal{A} \neq \emptyset. \tag{5.1}$$

Inoltre si ha

Proposizione 5.2. *La validità della relazione*

$$\overline{\Omega} \cap \overline{\mathcal{A}} \neq \emptyset \tag{5.2}$$

implica la risolubiltà del Problema $[(0,0), (a,b), \mathcal{U}, \Omega_0, \Omega]_\varepsilon$.

Dimostrazione. Infatti, se $(\overline{\chi}, \overline{\eta}) \in \overline{\Omega} \cap \overline{\mathcal{A}}$, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni seminorma $\pi = \pi_{A,B}$ su $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$, esistono $(\varphi, \psi)_{\varepsilon,\pi} \in \Omega_0$, $U_{\varepsilon,\pi} \in \mathcal{U}$ e $(\lambda, \delta)_{\varepsilon,\pi} \in \Omega$ tali che

$$\pi(\gamma_{(a,b)} z(\cdot\,; (\varphi, \psi)_{\varepsilon,\pi}, U_{\varepsilon,\pi}) - (\overline{\chi}, \overline{\eta})) < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\pi((\overline{\chi}, \overline{\eta}) - (\lambda, \delta)_{\varepsilon,\pi}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

da cui

$$\pi(\gamma_{(a,b)} z(\cdot\,; (\varphi, \psi)_{\varepsilon,\pi}, U_{\varepsilon,\pi}) - (\lambda, \delta)_{\varepsilon,\pi})) < \varepsilon,$$

e quindi il Problema $[(0,0), (a,b), \mathcal{U}, \Omega_0, \Omega]_\varepsilon$ ha soluzioni.

Invece la risolubilità del Problema $[(0,0), (a,b), \mathcal{U}, \Omega_0, \Omega]_\varepsilon$ non implica, in generale, la validità della relazione (5.2), come si evince dal seguente esempio.

Esempio 5.2. Siano $\alpha = \beta = +\infty$; $n = m$; $p \in [1, +\infty]$; $A = B = C = G = 0$; $F(x, y) = I\ \forall (x, y) \in L(+\infty, +\infty)$, essendo I la $n \times n$-matrice identità; $(a, b) = (1, 1)$; $\Omega_0 = \{(\theta, \theta)\}$ dove $\theta(t) = 0\ \forall t \in [0, +\infty[$. Inoltre, denotati con D, E due sottoinsiemi chiusi e disgiunti di $\mathbb{R}^n$ aventi distanza nulla, siano

$$\mathcal{U} = \Big\{ U \in L^p_{\mathrm{loc}}(L(+\infty, +\infty), \mathbb{R}^n) : \int_0^1 \int_0^1 U(x, y)\, dx dy \in D,$$
$$U(x, y) = 0 \text{ q.o. } (x, y) \in L(+\infty, +\infty) \setminus ([0, 1] \times [0, 1]) \Big\},$$

$$\Omega = \Big\{ (\lambda, \delta) \in \widetilde{\Xi}_p^{(n)} : \lambda(t) = \delta(t) = \lambda(0) \in E \quad \forall t \in [0, +\infty[\Big\}.$$

Tenendo presente che $V(u, v; x, y) = I$ si ha che

$$\mathcal{A} = \Big\{ (\chi, \eta) \in \widetilde{\Xi}_p^{(n)} : \chi(t) = \eta(t) = \chi(0) \in D \quad \forall t \in [0, +\infty[\Big\}.$$

Ne segue facilmente che il Problema $[(0,0), (1,1), \mathcal{U}, \Omega_0, \Omega]_\varepsilon$ ha soluzioni, mentre gli insiemi $\mathcal{A}$ e Ω sono due sottoinsiemi chiusi e disgiunti di $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$.

Le successive due proposizioni, utili per le applicazioni, indicano casi particolari nei quali la validità della (5.2) è anche condizione necessaria per la risolubilità del Problema $[(0,0),(a,b),\mathcal{U},\Omega_0,\Omega]_\varepsilon$.

Proposizione 5.3. *Se almeno uno dei due insiemi Ω e $\mathcal{A}$ è relativamente compatto, la risolubiltà del* Problema $[(0,0),(a,b),\mathcal{U},\Omega_0,\Omega]_\varepsilon$ *è equivalente alla validità della relazione* (5.2).

Dimostrazione. Basta provare che se il Problema $[(0,0),(a,b),\mathcal{U},\Omega_0,\Omega]_\varepsilon$ ha soluzioni ed inoltre almeno uno dei due insiemi $\mathcal{A}$ e Ω è relativamente compatto, si ha la (5.2).

Posto

$$\pi^k = \pi_{]0,k[,]0,k[} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

dalla risolubiltà del Problema $[(0,0),(a,b),\mathcal{U},\Omega_0,\Omega]_\varepsilon$ segue che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esistono $(\varphi,\psi)^k \in \Omega_0$, $U^k \in \mathcal{U}$ e $(\lambda,\delta)^k \in \Omega$ tali che

$$\pi^k(\gamma_{(a,b)}z(\cdot\,;(\varphi,\psi)^k,U^k) - (\lambda,\delta)^k) < \frac{1}{k}.$$

Supponiamo, per esempio, che l'insieme Ω sia relativamente compatto; allora esiste una successione $\{(\lambda,\delta)^{n_k}\}$, estratta da $\left\{(\lambda,\delta)^k\right\}$, convergente verso un elemento $(\widetilde{\lambda},\widetilde{\delta})$ di $\overline{\Omega}$; si ha cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni seminorma $\pi = \pi_{A,B}$ su $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ esiste $\overline{k}_{\varepsilon,\pi} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\pi((\lambda,\delta)^{n_k} - (\widetilde{\lambda},\widetilde{\delta})) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{se } k > \overline{k}_{\varepsilon,\pi}\,.$$

Proviamo, infine, che

$$\lim_k \gamma_{(a,b)}z(\cdot\,;(\varphi,\psi)^{n_k},U^{n_k}) = (\widetilde{\lambda},\widetilde{\delta}),$$

da cui segue che $(\widetilde{\lambda},\widetilde{\delta}) \in \overline{\Omega} \cap \overline{\mathcal{A}}$; a tale scopo cominciamo con l'osservare che per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni seminorma $\pi = \pi_{A,B}$ su $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ esiste $\overline{\overline{k}}_{\varepsilon,\pi} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad A, B \subseteq]0,n_k[, \quad \forall k > \overline{\overline{k}}_{\varepsilon,\pi}\,;$$

conseguentemente, per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni seminorma $\pi = \pi_{A,B}$ su $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$, posto $k^*_{\varepsilon,\pi} = \max\left\{\overline{k}_{\varepsilon,\pi}, \overline{\overline{k}}_{\varepsilon,\pi}\right\}$, risulta, per ogni $k > k^*_{\varepsilon,\pi}$,

$$\begin{aligned}
&\pi(\gamma_{(a,b)}z(\cdot\,;(\varphi,\psi)^{n_k},U^{n_k}) - (\widetilde{\lambda},\widetilde{\delta})) \le \\
&\quad \le \pi(\gamma_{(a,b)}z(\cdot\,;(\varphi,\psi)^{n_k},U^{n_k}) - (\lambda,\delta)^{n_k}) + \pi((\lambda,\delta)^{n_k} - (\widetilde{\lambda},\widetilde{\delta})) \le \\
&\quad \le \pi^{n_k}(\gamma_{(a,b)}z(\cdot\,;(\varphi,\psi)^{n_k},U^{n_k}) - (\lambda,\delta)^{n_k}) + \pi((\lambda,\delta)^{n_k} - (\widetilde{\lambda},\widetilde{\delta})) < \\
&\qquad\qquad < \frac{1}{n_k} + \pi((\lambda,\delta)^{n_k} - (\widetilde{\lambda},\widetilde{\delta})) < \varepsilon,
\end{aligned}$$

da cui l'asserto.

Proposizione 5.4. *Se gli insiemi* Ω *e* $\mathcal{A}$ *sono convessi ed almeno uno di essi è relativamente debolmente compatto, la risolubiltà del* Problema $[(0,0),(a,b),\mathcal{U},\Omega_0,\Omega]_\varepsilon$ *è equivalente alla validità della relazione* (5.2).

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che nelle attuali ipotesi gli insiemi $\overline{\Omega}$ e $\overline{\mathcal{A}}$ sono due sottoinsiemi chiusi, convessi, uno dei quali compatto, di $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ munito della topologia debole.

Anche in questo caso basta provare che la risolubilità del Problema $[(0,0),(a,b),\mathcal{U},\Omega_0,\Omega]_\varepsilon$ implica la validità della (5.2).

Supposto per assurdo che $\overline{\Omega}\cap\overline{\mathcal{A}}=\emptyset$, per il teorema di separazione in senso stretto (N. Dunford - J.T. Schwartz [3], Theorem V.2.10) esistono un funzionale lineare e continuo Q su ($\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ munito della topologia debole e quindi su) $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ e due costanti $c\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ tali che

$$\langle(\lambda,\delta),Q\rangle\le c-\varepsilon<c\le\langle(\chi,\eta),Q\rangle\quad\forall(\lambda,\delta)\in\Omega,\ \forall(\chi,\eta)\in\mathcal{A}. \tag{5.3}$$

Dalla continuità di Q segue l'esistenza di una costante $k>0$ e di r seminorme π_{A_i,B_i}, $i=1,\dots,r$, su $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ tali che

$$|\langle(\chi,\eta),Q\rangle|\le k\sum_{i=1}^{r}\pi_{A_i,B_i}(\chi,\eta)\quad\forall(\chi,\eta)\in\widetilde{\Xi}_p^{(n)}.$$

Posto

$$A=\bigcup_{i=1}^{r}A_i\ ,\ B=\bigcup_{i=1}^{r}B_i,$$

per la risolubiltà del Problema $[(0,0),(a,b),\mathcal{U},\Omega_0,\Omega]_\varepsilon$ esistono $(\overline{\lambda},\overline{\delta})\in\Omega$, $(\overline{\chi},\overline{\eta})\in\mathcal{A}$ tali che

$$\pi_{A,B}((\overline{\chi},\overline{\eta})-(\overline{\lambda},\overline{\delta}))<\frac{\varepsilon}{kr},$$

da cui

$$|\langle(\overline{\chi},\overline{\eta})-(\overline{\lambda},\overline{\delta}),Q\rangle|<\varepsilon,$$

ma ciò contraddice la (5.3).

Osservazione 5.2. Una prima applicazione delle precedenti proposizioni consiste nel fornire, in modo ovvio, a partire dagli Esempi 6.2 e 6.3 di G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [6] ($p=1$ e $p=+\infty$ rispettivamente), casi in cui il Problema $[(0,0),(a,b),\mathcal{U},\Omega_0,\Omega]_\varepsilon$ ha soluzioni mentre non ne ha il Problema $[(0,0),(a,b),\mathcal{U},\Omega_0,\Omega]$.

6. Sulla risoluzione del Problema $[(0,0),(a,b),\mathcal{U},\Omega_0,\Omega]$.

Alcuni interessanti casi particolari nei quali è ovvio che il Problema $[(0,0),(a,b),\mathcal{U},\Omega_0,\Omega]$ ha soluzioni, dato che la (5.1) della Proposizione 5.1 è banalmente verificata, sono quelli in cui risulta $\Omega \subseteq \mathcal{A}$ oppure $\Omega \supseteq \mathcal{A}$. Sotto alcune semplici ipotesi di convessità sui dati, tali casi possono essere facilmente caratterizzati.

Infatti, tenendo presente la nota ([5]) e procedendo come nella dimostrazione del Teorema 4.1, si ha il

Teorema 6.1. *Siano assegnati il processo di controllo* (E)*, le coppie di parametri* $(0,0)$ *e* (a,b)*, l'insieme* $\Omega_0 \subseteq \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ *dei controlli iniziali, l'insieme* $\mathcal{U} \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha,\beta),\mathbb{R}^m)$ *dei controlli permanenti e l'insieme obiettivo* $\Omega \subseteq \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$*. Gli insiemi* Ω *e* $\Gamma_{(a,b)}\Omega_0 + \Lambda_{(a,b)}\mathcal{U}$ *siano convessi e chiusi.*

Condizione necessaria e sufficiente affinchè risulti $\Omega \subseteq \mathcal{A}$ *è che valgano le disuguaglianze:*

$$(6.1)\qquad \sup_{(\lambda,\delta)\in\Omega} \langle(\lambda,\delta),Q\rangle \le$$
$$\le \sup_{(\varphi,\psi)\in\Omega_0} \langle\Gamma_{(a,b)}(\varphi,\psi),Q\rangle + \sup_{U\in\mathcal{U}}\langle\Lambda_{(a,b)}U,Q\rangle + \langle\gamma_{(a,b)}\mathcal{G},Q\rangle$$
$$\Big(= \sup_{(\varphi,\psi)\in\Omega_0} \langle(\varphi,\psi),\Gamma'_{(a,b)}Q\rangle + \sup_{U\in\mathcal{U}}\langle U,\Lambda'_{(a,b)}Q\rangle + \langle\gamma_{(a,b)}\mathcal{G},Q\rangle\Big) \quad \forall\, Q\in(\widetilde{\Xi}_p^{(n)})'.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè risulti $\Omega \supseteq \mathcal{A}$ *è che valgano le disuguaglianze che si ottengono dalle* (6.1) *cambiando il segno di* $\le$ *col segno di* $\ge$.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè risulti $\Omega = \mathcal{A}$ *è che valgano le uguaglianze che si ottengono dalle* (6.1) *cambiando il segno di* $\le$ *col segno di* $=$.

Osservazione 6.1. Una condizione sufficiente affinchè l'insieme $\Gamma_{(a,b)}\Omega_0 + \Lambda_{(a,b)}\mathcal{U}$ sia convesso e chiuso è che tali siano i due insiemi $\Gamma_{(a,b)}\Omega_0$ e $\Lambda_{(a,b)}\mathcal{U}$ ed uno almeno dei due sia debolmente compatto (basta applicare la (iv) del Lemma V.2.4 di N. Dunford - J.T. Schwartz [3] allo spazio $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ munito della topologia debole).

Una condizione atta a garantire che sia chiuso l'insieme $\Lambda_{(a,b)}\mathcal{U}$ è data dal Teorema 6.2 di G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [6] che assicura che se $p \in\,]1,+\infty[$ ed $\mathcal{U}$ è un sottoinsieme chiuso, convesso e limitato di $L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha,\beta),\mathbb{R}^m)$, allora $\Lambda_{(a,b)}\mathcal{U}$ è un sottoinsieme chiuso, convesso e limitato di $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$. La medesima condizione garantisce inoltre, come si evince dalle dimostrazioni dei Teoremi 6.1 e 6.2 di G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [6], che l'insieme $\Lambda_{(a,b)}\mathcal{U}$ è anche debolmente compatto.

Un'analoga condizione vale per l'insieme $\Gamma_{(a,b)}\Omega_0$. Infatti, grazie al Teorema 2.6 e con gli stessi ragionamenti usati per il Teorema 6.2 di G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [6], si ha il

Teorema 6.2. *Sia* $p \in]1, +\infty[$. *Se* $\Omega_0 \subseteq \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ *è un insieme chiuso, convesso e limitato, allora* $\Gamma_{(a,b)}\Omega_0$ *è un insieme debolmente compatto, nonchè chiuso, convesso e limitato di* $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$.

7. Sulla risoluzione del Problema $[(0,0), (a,b), \mathcal{U}, \Omega_0, \Omega]_\varepsilon$.

Supponiamo che gli insiemi Ω e $\mathcal{A}$ siano convessi e che almeno uno dei due sia relativamente debolmente compatto. La risolubiltà del Problema $[(0,0), (a,b), \mathcal{U}, \Omega_0, \Omega]_\varepsilon$ è allora caratterizzata (Proposizione 5.4) dalla validità della relazione (5.2).

Una riformulazione equivalente della (5.2) è

$$\theta \in -\overline{\Omega} + \overline{\mathcal{A}} = \overline{-\Omega} + \overline{\mathcal{A}}$$

(θ elemento nullo di $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$), ovvero (per il già citato Lemma V.2.4 di N. Dunford - J.T. Schwartz [3])

$$\theta \in \overline{-\Omega + \mathcal{A}},$$

cioè

$$\theta \in \overline{-\Omega + \Gamma_{(a,b)}\Omega_0 + \Lambda_{(a,b)}\mathcal{U} + \gamma_{(a,b)}\mathcal{G}}.$$

Conseguentemente la validità della (5.2) è equivalente alla validità della relazione

$$\theta \in \overline{\mathrm{co}}\left(-\Omega + \Gamma_{(a,b)}\Omega_0 + \Lambda_{(a,b)}\mathcal{U} + \gamma_{(a,b)}\mathcal{G}\right)$$

e quindi, per quanto ricordato nella nota ([5]), posto

$$Z = -\Omega + \Gamma_{(a,b)}\Omega_0 + \Lambda_{(a,b)}\mathcal{U} + \gamma_{(a,b)}\mathcal{G},$$

alla validità delle infinite disuguaglianze

$$0 \leq \sup_{z \in Z} \langle z, Q \rangle \quad \forall Q \in (\widetilde{\Xi}_p^{(n)})'.$$

Poichè risulta, ovviamente,

$$\sup_{z \in Z} \langle z, Q \rangle = - \inf_{(\lambda,\delta)\in\Omega} \langle (\lambda, \delta), Q \rangle + \sup_{(\varphi,\psi)\in\Omega_0} \langle \Gamma_{(a,b)}(\varphi, \psi), Q \rangle +$$
$$+ \sup_{U \subset \mathcal{U}} \langle \Lambda_{(a,b)} U, Q \rangle + \langle \gamma_{(a,b)}\mathcal{G}, Q \rangle \quad \forall Q \in (\widetilde{\Xi}_p^{(n)})',$$

si ha, in definitiva, il

Teorema 7.1. *Siano assegnati il processo di controllo* (E)*, le coppie di parametri* $(0, 0)$ *e* (a, b)*, l'insieme* $\Omega_0 \subseteq \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ *dei controlli iniziali, l'insieme* $\mathcal{U} \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$ *dei controlli permanenti e l'insieme obiettivo* $\Omega \subseteq \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$*. Gli insiemi* Ω *e* $\Gamma_{(a,b)}\Omega_0 + \Lambda_{(a,b)}\mathcal{U}$ *siano convessi ed inoltre uno almeno dei due sia relativamente debolmente compatto.*

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il Problema $[(0, 0), (a, b), \mathcal{U}, \Omega_0, \Omega]_\varepsilon$ *abbia soluzioni è che valgano le disuguaglianze:*

$$\inf_{(\lambda,\delta)\in\Omega} \langle(\lambda, \delta), Q\rangle \leq \tag{7.1}$$

$$\leq \sup_{(\varphi,\psi)\in\Omega_0} \langle \Gamma_{(a,b)}(\varphi, \psi), Q\rangle + \sup_{U\in\mathcal{U}} \langle \Lambda_{(a,b)}U, Q\rangle + \langle \gamma_{(a,b)}\mathcal{G}, Q\rangle$$

$$\Big(= \sup_{(\varphi,\psi)\in\Omega_0} \langle(\varphi, \psi), \Gamma'_{(a,b)}Q\rangle + \sup_{U\in\mathcal{U}} \langle U, \Lambda'_{(a,b)}Q\rangle + \langle\gamma_{(a,b)}\mathcal{G}, Q\rangle\Big) \quad \forall Q \in (\widetilde{\Xi}_p^{(n)})'.$$

Se, inoltre, gli insiemi Ω *e* $\Gamma_{(a,b)}\Omega_0 + \Lambda_{(a,b)}\mathcal{U}$ *sono chiusi in* $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ *allora la validità delle disuguaglianze* (7.1) *è condizione necessaria e sufficiente perchè abbia soluzioni il* Problema $[(0, 0), (a, b), \mathcal{U}, \Omega_0, \Omega]$.

Osservazione 7.1. La comparazione dei risultati espressi nei Teoremi 6.1 e 7.1 è ovvia per l'immediato confronto delle disuguaglianze (6.1) e (7.1).

8. Utilizzo delle aggiunte $\Gamma'_{(a,b)}$ e $\Lambda'_{(a,b)}$.

Nel caso $p \in [1, +\infty[$ ai Teoremi 4.1, 6.1, 7.1 si può dare una veste più agevole per le applicazioni mediante l'uso di una rappresentazione esplicita delle trasformazioni aggiunte $\Gamma'_{(a,b)}$ e $\Lambda'_{(a,b)}$ di $\Gamma_{(a,b)}$ e $\Lambda_{(a,b)}$ rispettivamente.

Per quanto concerne la $\Lambda'_{(a,b)}$ è noto che, se $p \in [1, +\infty[$, gli spazi duali $(L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m))'$ e $(\widetilde{\Xi}_p^{(n)})'$ si identificano (algebricamente e topologicamente) con $L_c^{p'}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$ e $L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ rispettivamente (mediante gli isomorfismi considerati nei Teoremi 2.1 e 2.5) e che per la $\Lambda'_{(a,b)}$, riguardata come una applicazione da $L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ in $L_c^{p'}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$, si ha (G. Pulvirenti - G. Santagati [5], n. 6), per ogni $(\mu, \nu, \xi) \in L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$,

$$\langle U, \Lambda'_{(a,b)}(\mu, \nu, \xi)\rangle = \iint_{L(\alpha,\beta)} H^*(u, v; (\mu, \nu, \xi))U(u, v)\, du dv$$
$$\forall U \in L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m),$$

dove, per ogni $(\mu, \nu, \xi) \in L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$, $H(\cdot\,; (\mu, \nu, \xi))$ è l'elemento di $L_c^{p'}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$ dato da

(8.1) $H^*(u, v; (\mu, \nu, \xi)) =$

$$= \begin{cases} \Big\{\xi^* V(u, v; a, b) + \displaystyle\int_0^{+\infty} [\mu^*(t) V_x(u, v; a+t, b) + \\ \qquad\qquad + \nu^*(t) V_y(u, v; a, b+t)]\, dt\Big\} F(u, v) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{q.o. } (u, v) \in [0, a[\times[0, b[, \\ \Big\{\mu^*(u-a) V(u, v; u, b) + \displaystyle\int_{u-a}^{+\infty} \mu^*(t) V_x(u, v; a+t, b)\, dt\Big\} F(u, v) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{q.o. } (u, v) \in [a, +\infty[\times[0, b[, \\ \Big\{\nu^*(v-b) V(u, v; a, v) + \displaystyle\int_{v-b}^{+\infty} \nu^*(t) V_y(u, v; a, b+t)\, dt\Big\} F(u, v) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{q.o. } (u, v) \in [0, a[\times[b, +\infty[, \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{q.o. } (u, v) \in L(\alpha, \beta) \setminus L(a, b). \end{cases}$$

Similmente si ha che, se $p \in [1, +\infty[$, la $\Gamma'_{(a,b)}$ può essere riguardata come un'applicazione da $L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ $(= (\widetilde{\Xi}_p^{(n)})')$ in sè. Precisamente, posto, per ogni $(\varphi, \psi) \in \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$,

$$\Gamma_{(a,b)}(\varphi, \psi) = (\lambda_{(a,b)}(\varphi, \psi), \delta_{(a,b)}(\varphi, \psi)),$$

cioè

$$(\lambda_{(a,b)}(\varphi, \psi))(t) = \zeta(a+t, b; (\varphi, \psi)) =$$
$$= V(0, 0; a+t, b)\varphi(0) + \int_0^{a+t} V(u, 0; a+t, b)[\varphi'(u) + B(u, 0)\varphi(u)]du +$$
$$+ \int_0^b V(0, v; a+t, b)[\psi'(v) + A(0, v)\psi(v)]\, dv \quad \forall t \in [0, +\infty[,$$

$$(\delta_{(a,b)}(\varphi, \psi))(t) = \zeta(a, b+t; (\varphi, \psi)) =$$
$$= V(0, 0; a, b+t)\varphi(0) + \int_0^a V(u, 0; a, b+t)[\varphi'(u) + B(u, 0)\varphi(u)]\, du +$$
$$+ \int_0^{b+t} V(0, v; a, b+t)[\psi'(v) + A(0, v)\psi(v)]\, dv \quad \forall t \in [0, +\infty[,$$

si ha (Teorema 2.5), per ogni $(\mu, \nu, \xi) \in L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$,

$$\langle(\varphi, \psi), \Gamma'_{(a,b)}(\mu, \nu, \xi)\rangle = \langle(\lambda_{(a,b)}(\varphi, \psi), \delta_{(a,b)}(\varphi, \psi)), (\mu, \nu, \xi)\rangle =$$

$$= \int_0^{+\infty} \mu^*(t) \frac{d}{dt}(\lambda_{(a,b)}(\varphi, \psi))(t)\, dt + \int_0^{+\infty} \nu^*(t) \frac{d}{dt}(\delta_{(a,b)}(\varphi, \psi))(t)\, dt +$$

$$+ \xi^*(\lambda_{(a,b)}(\varphi, \psi))(0) \qquad \forall (\varphi, \psi) \in \widetilde{\Xi}_p^{(n)},$$

da cui, con facili calcoli,

$$\langle(\varphi, \psi), \Gamma'_{(a,b)}(\mu, \nu, \xi)\rangle =$$

$$= \int_0^{+\infty} \bar{\mu}^*(t; (\mu, \nu, \xi))\varphi'(t)\, dt + \int_0^{+\infty} \bar{\nu}^*(t; (\mu, \nu, \xi))\psi'(t)\, dt +$$

$$+ \bar{\xi}^*(\mu, \nu, \xi)\varphi(0) \qquad \forall (\varphi, \psi) \in \widetilde{\Xi}_p^{(n)},$$

dove

$$(\bar{\mu}(\cdot\,; (\mu, \nu, \xi)), \bar{\nu}(\cdot\,; (\mu, \nu, \xi)), \bar{\xi}(\mu, \nu, \xi)) \in$$
$$L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$$

è l'elemento dato, per ogni

$$(\mu, \nu, \xi) \in L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n,$$

da

(8.2) $\qquad \bar{\mu}^*(s; (\mu, \nu, \xi)) =$

$$
= \begin{cases}
\xi^* V(s,0;a,b) + \displaystyle\int_s^a \xi^* V(u,0;a,b)B(u,0)\,du + \\
\qquad + \displaystyle\int_0^{+\infty} \mu^*(t)V(a+t,0;a+t,b)B(a+t,0)\,dt + \\
\qquad + \displaystyle\int_0^{+\infty} \mu^*(t)V_x(s,0;a+t,b)\,dt + \\
\qquad + \displaystyle\int_s^a \left(\int_0^{+\infty} \mu^*(t)V_x(u,0;a+t,b)B(u,0)\,dt\right) du + \\
\qquad + \displaystyle\int_a^{+\infty} \left(\int_{u-a}^{+\infty} \mu^*(t)V_x(u,0;a+t,b)B(u,0)\,dt\right) du + \\
\qquad + \displaystyle\int_0^{+\infty} \nu^*(t)V_y(s,0;a,b+t)\,dt + \\
\qquad + \displaystyle\int_s^a \left(\int_0^{+\infty} \nu^*(t)V_y(u,0;a,b+t)B(u,0)\,dt\right) du \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{q.o. } s \in [0,a[, \\
\mu^*(s-a)V(s,0;s,b) + \\
\qquad + \displaystyle\int_{s-a}^{+\infty} \mu^*(t)V(a+t,0;a+t,b)B(a+t,0)\,dt + \\
\qquad + \displaystyle\int_{s-a}^{+\infty} \mu^*(t)V_x(s,0;a+t,b)\,dt + \\
\qquad + \displaystyle\int_s^{+\infty} \left(\int_{u-a}^{+\infty} \mu^*(t)V_x(u,0;a+t,b)B(u,0)\,dt\right) du \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{q.o. } s \in [a,+\infty[,
\end{cases}
$$

(8.3) $\bar{\nu}^*(s;(\mu,\nu,\xi)) =$

$$
\begin{cases}
\xi^* V(0,s;a,b) + \displaystyle\int_s^b \xi^* V(0,v;a,b)A(0,v)\,dv + \\
\qquad + \displaystyle\int_0^{+\infty} \nu^*(t)V(0,b+t;a,b+t)A(0,b+t)\,dt + \\
\qquad + \displaystyle\int_0^{+\infty} \nu^*(t)V_y(0,s;a,b+t)\,dt + \\
\qquad + \displaystyle\int_s^b \left(\int_0^{+\infty} \nu^*(t)V_y(0,v;a,b+t)A(0,v)\,dt\right) dv +
\end{cases}
$$

$$
= \begin{cases}
\quad + \displaystyle\int_b^{+\infty} \left(\int_{v-b}^{+\infty} \nu^*(t) V_y(0, v; a, b+t) A(0, v)\, dt \right) dv + \\
\qquad + \displaystyle\int_0^{+\infty} \mu^*(t) V_x(0, s; a+t, b)\, dt + \\
\quad + \displaystyle\int_s^{b} \left(\int_0^{+\infty} \mu^*(t) V_x(0, v; a+t, b) A(0, v)\, dt \right) dv \\
\hfill \text{q.o. } s \in [0, b[, \\
\\
\nu^*(s-b) V(0, s; a, s) + \\
\quad + \displaystyle\int_{s-b}^{+\infty} \nu^*(t) V(0, b+t; a, b+t) A(0, b+t)\, dt + \\
\qquad + \displaystyle\int_{s-b}^{+\infty} \nu^*(t) V_y(0, s; a, b+t)\, dt + \\
\quad + \displaystyle\int_s^{+\infty} \left(\int_{v-b}^{+\infty} \nu^*(t) V_y(0, v; a, b+t) A(0, v)\, dt \right) dv \\
\hfill \text{q.o. } s \in [b, +\infty[,
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
(8.4) \qquad & \bar{\xi}^*(\mu, \nu, \xi) = \\
& = \xi^* \Big[V(0, 0; a, b) + \int_0^a V(u, 0; a, b) B(u, 0)\, du + \\
& \qquad\qquad + \int_0^b V(0, v; a, b) A(0, v)\, dv \Big] + \\
& + \int_0^{+\infty} \mu^*(t) \Big[V_x(0, 0; a+t, b) + V(a+t, 0; a+t, b) B(a+t, 0) + \\
& + \int_0^{a+t} V_x(u, 0; a+t, b) B(u, 0)\, du + \int_0^b V_x(0, v; a+t, b) A(0, v)\, dv \Big] dt + \\
& + \int_0^{+\infty} \nu^*(t) \Big[V_y(0, 0; a, b+t) + V(0, b+t; a, b+t) A(0, b+t) + \\
& + \int_0^{b+t} V_y(0, v; a, b+t) A(0, v)\, dv + \int_0^a V_y(u, 0; a, b+t) B(u, 0) du \Big] dt.
\end{aligned}
$$

Dai Teoremi 4.1, 6.1, 7.1, posto $(g, q) = \gamma_{(a,b)}\mathcal{G} \in \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$, si hanno, allora, i seguenti teoremi.

Teorema 8.1. *Sia* $p \in [1, +\infty[$. *Siano assegnati il processo di controllo* (E)*, le coppie di parametri* $(0, 0)$ *e* (a, b)*, l'insieme* $\Omega_0 \subseteq \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ *dei controlli iniziali e l'insieme* $\mathcal{U} \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$ *dei controlli permanenti. Si ha:*

$$\overline{\mathrm{co}}\mathcal{A}((0,0),(a,b);\Omega_0,\mathcal{U}) =$$

$$= \Big\{(\chi, \eta) \in \widetilde{\Xi}_p^{(n)} : \int_0^{+\infty} \mu^*(t)\chi'(t)\,dt + \int_0^{+\infty} \nu^*(t)\eta'(t)\,dt + \xi^*\chi(0) \leq$$

$$\leq \sup_{(\varphi,\psi)\in\Omega_0} \Big[\int_0^{+\infty} \bar{\mu}^*(t;(\mu,\nu,\xi))\varphi'(t)\,dt +$$

$$+ \int_0^{+\infty} \bar{\nu}^*(t;(\mu,\nu,\xi))\psi'(t)\,dt + \bar{\xi}^*(\mu,\nu,\xi)\varphi(0)\Big] +$$

$$+ \sup_{U\in\mathcal{U}} \int\int_{L(\alpha,\beta)} H^*(u, v; (\mu,\nu,\xi))U(u,v)\,du\,dv +$$

$$+ \int_0^{+\infty} \mu^*(t)g'(t)dt + \int_0^{+\infty} \nu^*(t)q'(t)dt + \xi^* g(0)$$

$$\forall(\mu,\nu,\xi) \in L_c^{p'}([0,+\infty[,\mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0,+\infty[,\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n\Big\}.$$

Teorema 8.2. *Sia* $p \in [1, +\infty[$. *Siano assegnati il processo di controllo* (E)*, le coppie di parametri* $(0, 0)$ *e* (a, b)*, l'insieme* $\Omega_0 \subseteq \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ *dei controlli iniziali, l'insieme* $\mathcal{U} \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$ *dei controlli permanenti e l'insieme obiettivo* $\Omega \subseteq \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$. *Gli insiemi* Ω *e* $\Gamma_{(a,b)}\Omega_0 + \Lambda_{(a,b)}\mathcal{U}$ *siano convessi e chiusi.*

Condizione necessaria e sufficiente affinchè risulti $\Omega \subseteq \mathcal{A}$ *è che valgano le disuguaglianze:*

$$\sup_{(\lambda,\delta)\in\Omega} \Big[\int_0^{+\infty} \mu^*(t)\lambda'(t)\,dt + \int_0^{+\infty} \nu^*(t)\delta'(t)\,dt + \xi^*\lambda(0)\Big] \leq \tag{8.5}$$

$$\leq \sup_{(\varphi,\psi)\in\Omega_0} \Big[\int_0^{+\infty} \bar{\mu}^*(t;(\mu,\nu,\xi))\varphi'(t)\,dt + \int_0^{+\infty} \bar{\nu}^*(t;(\mu,\nu,\xi))\psi'(t)\,dt +$$

$$\bar{\xi}^*(\mu,\nu,\xi)\varphi(0)\Big] + \sup_{U\in\mathcal{U}} \int\int_{L(\alpha,\beta)} H^*(u, v; (\mu,\nu,\xi))U(u,v)\,du\,dv +$$

$$+ \int_0^{+\infty} \mu^*(t)g'(t)\,dt + \int_0^{+\infty} \nu^*(t)q'(t)\,dt + \xi^* g(0)$$

$$\forall(\mu,\nu,\xi) \in L_c^{p'}([0,+\infty[,\mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0,+\infty[,\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè risulti $\Omega \supseteq \mathcal{A}$ *è che valgano le disuguaglianze che si ottengono dalle* (8.5) *cambiando il segno di* $\leq$ *col segno di* $\geq$.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè risulti $\Omega = \mathcal{A}$ *è che valgano le uguaglianze che si ottengono dalle* (8.5) *cambiando il segno di* $\leq$ *col segno di* $=$.

Teorema 8.3. *Sia* $p \in [1, +\infty[$. *Siano assegnati il processo di controllo* (E)*, le coppie di parametri* $(0, 0)$ *e* (a, b)*, l'insieme* $\Omega_0 \subseteq \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ *dei controlli iniziali, l'insieme* $\mathcal{U} \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^m)$ *dei controlli permanenti e l'insieme obiettivo* $\Omega \subseteq \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$. *Gli insiemi* Ω *e* $\Gamma_{(a,b)}\Omega_0 + \Lambda_{(a,b)}\mathcal{U}$ *siano convessi ed inoltre almeno uno dei due sia relativamente debolmente compatto.*

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il Problema $[(0, 0), (a, b), \mathcal{U}, \Omega_0, \Omega]_\varepsilon$ *abbia soluzioni è che valgano le disuguaglianze:*

$$
\begin{aligned}
(8.6)\qquad & \inf_{(\lambda,\delta)\in\Omega}\Big[\int_0^{+\infty} \mu^*(t)\lambda'(t)\,dt + \int_0^{+\infty} \nu^*(t)\delta'(t)\,dt + \xi^*\lambda(0)\Big] \leq \\
& \qquad \leq \sup_{(\varphi,\psi)\in\Omega_0}\Big[\int_0^{+\infty} \bar{\mu}^*(t; (\mu, \nu, \xi))\varphi'(t)\,dt + \\
& + \int_0^{+\infty} \bar{\nu}^*(t; (\mu, \nu, \xi))\psi'(t)\,dt + \bar{\xi}^*(\mu, \nu, \xi)\varphi(0)\Big] + \\
& + \sup_{U\in\mathcal{U}} \int\int_{L(\alpha,\beta)} H^*(u, v; (\mu, \nu, \xi))U(u, v)dudv + \\
& + \int_0^{+\infty} \mu^*(t)g'(t)dt + \int_0^{+\infty} \nu^*(t)q'(t)dt + \xi^* g(0) \\
& \qquad \forall(\mu, \nu, \xi) \in L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

Se gli insiemi Ω *e* $\Gamma_{(a,b)}\Omega_0 + \Lambda_{(a,b)}\mathcal{U}$ *sono anche chiusi in* $\widetilde{\Xi}_p^{(n)}$*, allora le* (8.6) *sono condizioni necessarie e sufficienti perchè abbia soluzione il* Problema $[(0, 0), (a, b), \mathcal{U}, \Omega_0, \Omega]$.

9. Alcune applicazioni.

Per concludere il lavoro, mostriamo, a titolo di esempio, come i risultati precedentemente acquisiti trovino applicazione nel caso di una classe di processi di controllo scalari (già considerata in G. Pulvirenti - G. Santagati [5] e in G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [6]).

Supponiamo $n = m = 1$; $A = B = C = 0$ (quindi $V(u, v; x, y) = 1$ in $T(\alpha, \beta) = \{(u, v; x, y) \in \mathbb{R}^4 : (x, y) \in L(\alpha, \beta), 0 \le u \le x, 0 \le v \le y\}$); $G = 0$; cioè consideriamo il processo di controllo scalare

$$z_{xy} = F(x, y)U(x, y) \quad \text{q.o. } (x, y) \in L(\alpha, \beta).$$

Assegnata una funzione M, elemento di $L^p_{\text{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R})$, tale che $M(x, y) \ge 0$ q.o. in $L(\alpha, \beta)$, assumiamo come insieme dei controlli permanenti l'insieme

$$\mathcal{U} = \{U \in L^p_{\text{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}) : |U(x, y)| \le M(x, y) \text{ q.o. } (x, y) \in L(\alpha, \beta)\}.$$

Analogamente, assegnate due funzioni h, k , elementi di $L^p_{\text{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R})$, tali che $h(t) \ge 0,\ k(t) \ge 0$ q.o. in $[0, +\infty[$, assumiamo come insieme dei controlli iniziali l'insieme

$$\begin{aligned}\Omega_0 = \{(\varphi, \psi) \in \widetilde{\Xi}^{(1)}_p : \varphi(0) = 0;\\ |\varphi'(t)| \le h(t),\ |\psi'(t)| \le k(t) \text{ q.o. } t \in [0, +\infty[\}.\end{aligned}$$

Assegnate, poi, le funzioni f, g , elementi di $\widetilde{\Xi}^{(1)}_p$, prendiamo come obiettivo l'insieme

$$\Omega = \{(\lambda, \delta) \in \widetilde{\Xi}^{(1)}_p : \lambda(t) \ge f(t), \delta(t) \ge g(t) \forall t \in [0, +\infty[\}.$$

Ovviamente, qualunque sia $p \in [1, +\infty]$, si ha che l'insieme $\mathcal{U}$ è un sottoinsieme chiuso, convesso e limitato di $L^p_{\text{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R})$; a loro volta, i due insiemi Ω_0 e Ω sono sottoinsiemi chiusi e convessi di $\widetilde{\Xi}^{(1)}_p$ e Ω_0 è anche limitato.

Pertanto (cfr. l'Osservazione 6.1), se $p \in]1, +\infty[$, entrambi gli insiemi $\Gamma_{(a,b)}\Omega_0$ e $\Lambda_{(a,b)}\mathcal{U}$ sono sottoinsiemi debolmente compatti, nonchè chiusi, convessi e limitati di $\widetilde{\Xi}^{(1)}_p$. La stessa cosa può allora dirsi dell'insieme $\Gamma_{(a,b)}\Omega_0 + \Lambda_{(a,b)}\mathcal{U}$, dunque il Teorema 8.3 si presta a caratterizzare la risolubilità del Problema $[(0, 0), (a, b), \mathcal{U}, \Omega_0, \Omega]$. Nel caso in esame le funzioni $H, \bar{\mu}, \bar{\nu}$ e la costante $\bar{\xi}$ che intervengono nei Teoremi 8.1, 8.2 e 8.3 sono date, per ogni $(\mu, \nu, \xi) \in L^{p'}_c([0, +\infty[, \mathbb{R}) \times L^{p'}_c([0, +\infty[, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, da

$$H(u, v; (\mu, \nu, \xi)) = \begin{cases} \xi F(u, v) & \text{q.o. } (u, v) \in [0, a[\times[0, b[, \\ \mu(u - a)F(u, v) & \text{q.o. } (u, v) \in [a, +\infty[\times[0, b[, \\ \nu(v - b)F(u, v) & \text{q.o. } (u, v) \in [0, a[\times[b, +\infty[, \\ 0 & \text{q.o. } (u, v) \in L(\alpha, \beta) \setminus L(a, b), \end{cases}$$

$$\bar{\mu}(s;(\mu,\nu,\xi)) = \begin{cases} \xi & \text{q.o. } s \in [0,a[, \\ \mu(s-a) & \text{q.o. } s \in [a,+\infty[, \end{cases}$$

$$\bar{\nu}(s;(\mu,\nu,\xi)) = \begin{cases} \xi & \text{q.o. } s \in [0,b[, \\ \nu(s-b) & \text{q.o. } s \in [b,+\infty[, \end{cases}$$

$$\bar{\xi}(\mu,\nu,\xi) = \xi.$$

Conseguentemente il Problema $[(0,0),(a,b),\mathcal{U},\Omega_0,\Omega]$ ha soluzioni se e solo se sono verificate le disuguaglianze

$$\tag{9.1} \inf_{(\lambda,\delta)\in\Omega}\Big[\int_0^{+\infty}\mu(t)\lambda'(t)\,dt + \int_0^{+\infty}\nu(t)\delta'(t)\,dt + \xi\lambda(0)\Big] \le$$
$$\le \sup_{(\varphi,\psi)\in\Omega_0}\Big[\int_0^a \xi\varphi'(t)\,dt + \int_a^{+\infty}\mu(t-a)\varphi'(t)\,dt + \int_0^b \xi\psi'(t)\,dt +$$
$$+ \int_b^{+\infty}\nu(t-b)\psi'(t)\,dt\Big] +$$
$$+ \sup_{U\in\mathcal{U}}\Big[\int_0^a\int_0^b \xi F(u,v)U(u,v)\,du dv +$$
$$+ \int_a^{+\infty}\int_0^b \mu(u-a)F(u,v)U(u,v)\,du dv +$$
$$+ \int_0^a\int_b^{+\infty}\nu(v-b)F(u,v)U(u,v)\,du dv\Big]$$
$$\forall(\mu,\nu,\xi)\in L_c^{p'}([0,+\infty[,\mathbb{R})\times L_c^{p'}([0,+\infty[,\mathbb{R})\times\mathbb{R}.$$

Per rendere più facilmente utilizzabile la precedente condizione basta liberarla dai parametri μ,ν,ξ. A tal fine cominciamo con l'osservare che dalla (9.1) segue in particolare, prendendo $\mu = \mathbf{1}_{[0,T]}$ $(T>0)$, $\nu = 0$, $\xi = 1$,

$$\inf_{(\lambda,\delta)\in\Omega}\Big[\int_0^T \lambda'(t)\,dt + \lambda(0)\Big] \le$$
$$\le \sup_{(\varphi,\psi)\in\Omega_0}\Big[\int_0^a \varphi'(t)\,dt + \int_0^b \psi'(t)dt + \int_0^T \varphi'(a+s)\,ds\Big] +$$
$$+ \sup_{U\in\mathcal{U}}\Big[\int_0^a\int_0^b F(u,v)U(u,v)\,du dv + \int_0^T\int_0^b F(a+s,v)U(a+s,v)\,ds dv\Big].$$

Risultando, ovviamente,

$$\inf_{(\lambda,\delta)\in\Omega}\Big[\int_0^T \lambda'(t)\,dt + \lambda(0)\Big] = \inf_{(\lambda,\delta)\in\Omega}\lambda(T) = \min_{(\lambda,\delta)\in\Omega}\lambda(T) = f(T),$$

$$\begin{aligned}&\sup_{(\varphi,\psi)\in\Omega_0}\Big[\int_0^a \varphi'(t)\,dt + \int_0^b \psi'(t)\,dt + \int_0^T \varphi'(a+s)\,ds\Big] = \\ &= \max_{(\varphi,\psi)\in\Omega_0}\Big[\int_0^a \varphi'(t)\,dt + \int_0^b \psi'(t)\,dt + \int_0^T \varphi'(a+s)\,ds\Big] = \\ &= \int_0^a h(t)\,dt + \int_0^b k(t)\,dt + \int_0^T h(a+s)\,ds,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sup_{U\in\mathcal{U}}\Big[\int_0^a\int_0^b F(u,v)U(u,v)\,dudv + \int_0^T\int_0^b F(a+s,v)U(a+s,v)\,dsdv\Big] = \\ &= \max_{U\in\mathcal{U}}\Big[\int_0^a\int_0^b F(u,v)U(u,v)\,dudv + \int_0^T\int_0^b F(a+s,v)U(a+s,v)\,dsdv\Big] = \\ &= \int_0^a\int_0^b |F(u,v)|M(u,v)\,dudv + \int_0^T\int_0^b |F(a+s,v)|M(a+s,v)\,dsdv,\end{aligned}$$

ne deduciamo, tenuto conto dell'arbitrarietà di $T > 0$, che per la funzione f è soddisfatta la seguente condizione:

$$f(t) \le c + \int_0^t R(s)\,ds \quad \forall t \in [0,+\infty[, \tag{9.2}$$

dove si è posto

$$c = \int_0^a h(t)\,dt + \int_0^b k(t)\,dt + \int_0^a\int_0^b |F(u,v)|M(u,v)\,dudv,$$

$$R(t) = h(a+t) + \int_0^b |F(a+t,v)|M(a+t,v)\,dv \quad \text{q.o } t \in [0,+\infty[.$$

In maniera del tutto analoga si ha che la (9.1) implica la seguente condizione per la g:

$$g(t) \le c + \int_0^t S(s)\,ds \quad \forall t \in [0,+\infty[, \tag{9.3}$$

essendo

$$S(t) = k(b+t) + \int_0^a |F(u, b+t)| M(u, b+t)\, du \quad \text{q.o } t \in [0, +\infty[.$$

Proviamo adesso che, viceversa, il verficarsi delle condizioni (9.2) e (9.3) implica la validità delle disuguaglianze (9.1). Fissato l'elemento $(\mu, \nu, \xi) \in L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, distinguiamo, al fine di verificare la validità della corrispondente disuguaglianza (9.1), due casi, secondo che (μ, ν, ξ) soddisfi la condizione

$$\mu(t) \geq 0,\ \ \nu(t) \geq 0 \text{ q.o. } t \in [0, +\infty[;\ \ \xi \geq 0, \tag{9.4}$$

oppure no.

Se (μ, ν, ξ) soddisfa la (9.4), allora è immediato verificare che la quantità al secondo membro della (9.1) è uguale a

$$\int_0^{+\infty} \mu(t) R(t)\, dt + \int_0^{+\infty} \nu(t) S(t)\, dt + \xi c;$$

d'altra parte le condizioni (9.2) e (9.3) comportano che l'elemento $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{\delta})$ di $\widetilde{\Xi}_p^{(1)}$, dato da

$$\widetilde{\lambda}(t) = c + \int_0^t R(s)\, ds\ ,\ \widetilde{\delta}(t) = c + \int_0^t S(s)\, ds \quad \forall t \in [0, +\infty[,$$

appartiene a Ω; pertanto si ha

$$\begin{aligned}\inf_{(\lambda,\delta)\in\Omega}\Big[\int_0^{+\infty} \mu(t)\lambda'(t)\, dt + \int_0^{+\infty} \nu(t)\delta'(t)\, dt + \xi\lambda(0)\Big] \leq \\ \leq \int_0^{+\infty} \mu(t)\widetilde{\lambda}'(t)\, dt + \int_0^{+\infty} \nu(t)\widetilde{\delta}'(t)\, dt + \xi\widetilde{\lambda}(0) = \\ = \int_0^{+\infty} \mu(t) R(t)\, dt + \int_0^{+\infty} \nu(t) S(t)\, dt + \xi c,\end{aligned}$$

dunque è verificata la (9.1).

Se, invece, (μ, ν, ξ) non soddisfa la (9.4), allora la (9.1) è ancora vera dato che in questo caso il primo membro è $-\infty$. Per provare quest'ultima affermazione supponiamo, per fissare le idee, che risulti $\mu(t) < 0$ in un insieme $E \subseteq [0, +\infty[$ di misura positiva. Fissato $T > 0$ in modo che l'intervallo $[0, T]$

contenga i supporti delle funzioni μ e ν e che l'insieme $[0, T] \cap E$ abbia misura positiva, consideriamo, per ogni $r > 0$, l'elemento (λ_r, δ_r) di $\widetilde{\Xi}_p^{(1)}$ definito nel modo seguente:

$$\lambda_r(0) = \max\{\max_{t \in [0,T]} f(t), \max_{t \in [0,T]} g(t)\},$$

$$\lambda_r'(t) = \begin{cases} 0 & \text{q.o. } t \in [0, T] \setminus E, \\ r & \text{q.o. } t \in [0, T] \cap E, \\ f'(t) & \text{q.o. } t \in]T, +\infty[, \end{cases}$$

$$\delta_r'(t) = \begin{cases} 0 & \text{q.o. } t \in [0, T], \\ g'(t) & \text{q.o. } t \in]T, +\infty[. \end{cases}$$

È immediato verficare che (λ_r, δ_r) appartiene a Ω; ne segue che

$$\inf_{(\lambda,\delta) \in \Omega} \Big[\int_0^{+\infty} \mu(t)\lambda'(t)\, dt + \int_0^{+\infty} \nu(t)\delta'(t)\, dt + \xi\lambda(0) \Big] \leq$$

$$\leq \inf_{r>0} \Big[\int_0^{+\infty} \mu(t)\lambda_r'(t)\, dt + \int_0^{+\infty} \nu(t)\delta_r'(t)\, dt + \xi\lambda_r(0) \Big] =$$

$$= \inf_{r>0} r \int_{[0,T] \cap E} \mu(t)\, dt = -\infty.$$

In conclusione si ha che la risolubilità del Problema $[(0, 0), (a, b), \mathcal{U}, \Omega_0, \Omega]$ è, in questo caso, caratterizzata dal verificarsi delle condizioni (9.2) e (9.3).

Inoltre, con ragionamenti analoghi, applicando il Teorema 8.2, si prova che in questo caso l'inclusione $\Omega \supseteq \mathcal{A}$ è caratterizzata dal verificarsi delle condizioni

$$f(t) \leq -c - \int_0^t R(s) ds \qquad \forall t \in [0, +\infty[,$$

$$g(t) \leq -c - \int_0^t S(s) ds \qquad \forall t \in [0, +\infty[.$$

Ovviamente ai risultati sopra enunciati si può pervenire anche mediante la conoscenza dell'insieme raggiungibile. Questa si può conseguire utilizzando il Teorema 8.1 e adottando, per semplificare la caratterizzazione in esso contenuta, ragionamenti analoghi a quelli seguiti nel n. 7 di G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [6]. In tal modo si ottiene che nel caso in esame l'insieme raggiungibile è formato dagli elementi $(\chi, \eta) \in \widetilde{\Xi}_p^{(1)}$ tali che

$$|\chi'(t)| \leq R(t) \quad \text{q.o. } t \in [0, +\infty[,$$

$$|\eta'(t)| \leq S(t) \quad \text{q.o. } t \in [0, +\infty[,$$

$$|\chi(0)| \leq c.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Conti, *Problemi di controllo e di controllo ottimale,* UTET, Torino, 1974.

[2] R. Di Vincenzo - A. Villani, *Sopra un problema ai limiti per una equazione lineare del terzo ordine di tipo iperbolico. Esistenza, unicità e rappresentazione della soluzione,* Le Matematiche, 32 (1977), pp. 211-238.

[3] N. Dunford - J.T. Schwartz, *Linear operators,Part I,* Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.

[4] J.L. Kelley - I. Namioka, *Linear topological spaces,* D. Van Nostrand, Co., Inc., Princeton, N.J., 1963.

[5] G. Pulvirenti - G. Santagati, *Processi di controllo con parametri distribuiti in insiemi non limitati. Controllabilità completa approssimata,* Ann. Mat. Pura Appl., (4) 33 (1983), pp. 35-50.

[6] G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani, *Processi di controllo con parametri distribuiti in insiemi non limitati. Insieme raggiungibile,* Boll. Un. Mat. Ital. , (7) 4-B (1990), pp. 345-379.

[7] M.B. Suryanarayana, *A Sobolev space and a Darboux Problem,* Pacific J. Math., 69 (1977), pp. 535-550.

[8] A. Villani, *Un problema al contorno per un sistema lineare iperbolico su un insieme non limitato,* Le Matematiche, 36 (1981), pp. 215-234.

[9] A. Villani, *Processi di controllo con parametri distribuiti in insiemi non limitati. Controllabilità completa esatta,* Ann. Mat. Pura Appl., (4) 33 (1983), pp. 19-33.

[10] A. Villani, *On the metrizability of* $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mu)$, Le Matematiche, 38 (1983), pp. 237-244.

Dipartimento di Matematica,
Università di Catania,
Viale A. Doria 6,
95125 Catania (ITALY)