

**UN'APPLICAZIONE DELLA TEORIA
DEI SEMIGRUPPI ORDINATI NELL'AMBITO
DELLA TEORIA DELLE DECISIONI**

ELISABETTA ALLEVI

Alla memoria di Umberto Gasapina

In this paper we introduce in the semigroup S , whose elements are to be evaluated in terms of preference in a particular situation, a pre-order \prec_r defined through subsemigroups of S . Then \prec_r is a preference relation with transitive indifference, which can be represented by a utility function.

1. Introduzione.

Nei problemi di scelta due sono i principali elementi, dipendenti l'uno dall'altro, che descrivono il problema stesso. Detto S l'insieme delle opportunità, ossia l'insieme di tutte le situazioni finanziarie possibili nell'istante decisionale, in S viene assegnata una relazione di preferenza: "essere preferito a", ossia il problema decisionale consiste nell'introdurre in S un ordinamento di preferenza \succ in modo che per ogni s_1, s_2 , appartenenti ad S sia $s_1 \succ s_2$ oppure $s_2 \succ s_1$, oppure $s_1 \sim s_2$, avendo indicato con il simbolo \sim la relazione di indifferenza indotta da \succ ; inoltre si vuole associare ad ogni possibile scelta s un numero

Ricerca parzialmente finanziata dal Ministero per l'Università e la Ricerca Scientifica e Tecnologica.

Key words: Semigroups, Partially ordered semigroups, Utility function.

reale $f(s)$, che rappresenta un indicatore dell'utilità conseguente all'effettuare la scelta s .

Abitualmente con il termine utilità si intende indicare il grado di preferenza che un soggetto assegna ad un certo bene o più in generale ad una situazione.

Pertanto si tratta di rappresentare l'ordinamento di preferenza introdotto nell'insieme S delle opportunità mediante l'introduzione di una opportuna funzione di valutazione $y = f(x)$:

$$f : (S; \succ) \rightarrow (\mathbb{R}; >)$$

tale che

$$f(s_2) > f(s_1) \quad \text{se} \quad s_2 \succ s_1,$$

$$f(s_1) > f(s_2) \quad \text{se} \quad s_1 \succ s_2,$$

$$f(s_2) = f(s_1) \quad \text{se} \quad s_2 \sim s_1.$$

In questo lavoro viene proposto un insieme di proprietà che caratterizzano le preferenze che il soggetto finanziario razionale mostra di fronte a differenti opportunità.

In letteratura l'utilità viene precisata in termini di utilità ordinale e cardinale, le problematiche relative a tale classificazione nascono dalle differenti scuole di pensiero, per alcune l'utilità è pensata come una grandezza misurabile mentre per altre tale grandezza, per la sua natura stessa, è considerata non misurabile.

Più precisamente fino al 1930 prevaleva la concezione di utilità misurabile. Dopo una parentesi durata una ventina d'anni, durante la quale è prevalsa la concezione ordinale, con i lavori di J. von Neumann e O. Morgenstern ha ripreso vigore la concezione cardinale dell'utilità.

Scopo di questo lavoro è quello di assegnare un ordinamento nell'insieme delle opportunità, di associargli una funzione di utilità in grado di rappresentare numericamente l'ordinamento di preferenza dell'individuo, evidenziando di quanto una determinata scelta x si discosta da una scelta y . Tale distanza sarà introdotta dalla nozione di compensazione, in seguito precisata.

In dettaglio, dopo aver richiamato nella Sezione 2 alcune definizioni e proprietà relative a relazioni su insiemi, nella Sezione 3 si propone una nuova relazione di preferenza alla quale si dimostra essere associata una funzione di utilità.

Si rileva subito che di tale funzione non sarà garantita l'unicità in quanto se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione monotona crescente del suo argomento anche la funzione $g \circ f$ è una funzione di utilità ordinale su X rispetto il medesimo ordinamento di preferenza.

Si può inoltre dimostrare che la funzione di utilità ordinale, determinata sulla base del sistema assiomatico qui proposto, è univocamente determinata a meno di una trasformazione monotona crescente.

2. Definizioni e notazioni.

Sia A un insieme, si dice *relazione* in A un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times A$. Sia ρ una relazione in A e siano $x, y \in A$. Una relazione ρ è *riflessiva* se verifica la seguente proprietà:

$$\forall x \in A \quad x\rho x,$$

è *simmetrica* se:

$$\forall x, y \in A \quad x\rho y \Rightarrow y\rho x,$$

è *antisimmetrica* se:

$$\forall x, y \in A \quad x\rho y, y\rho x \Rightarrow x = y,$$

è *strettamente antisimmetrica* se:

$$\forall x, y \in A \quad x\rho y \Rightarrow y \not\rho x,$$

è *transitiva* se:

$$\forall x, y, z \in A \quad x\rho y, y\rho z \Rightarrow x\rho z,$$

è *negativamente transitiva* se:

$$\forall x, y, z \in A \quad x \not\rho y, y \not\rho z \Rightarrow x \not\rho z,$$

è *totale* se:

$$\forall x, y \in a \quad x\rho y \vee y\rho x.$$

È evidente che una relazione strettamente antisimmetrica è antisimmetrica. Sia ora A un insieme e sia ρ una relazione in A , se ρ è riflessiva e transitiva si dice che ρ è una relazione di *pre-ordine* in A , se ρ è riflessiva, antisimmetrica e transitiva si dice che ρ è una relazione di *ordine* in A .

Si dice relazione di *indifferenza* rispetto a ρ la relazione $\bar{\rho}$ così definita:

$$x\bar{\rho}y \Leftrightarrow (x\rho y \wedge y\rho x) \vee (x \not\rho y \wedge y \not\rho x).$$

Si può osservare che se ρ è una relazione *strettamente antisimmetrica* in A si ha:

$$x\bar{\rho}y \Leftrightarrow (x \not\phi y \wedge y \not\phi x),$$

se ρ è una relazione *antisimmetrica* si ha:

$$x\bar{\rho}y \Leftrightarrow (x = y) \vee (x \not\phi y \wedge y \not\phi x).$$

se ρ è una relazione *totale* si ha:

$$x\bar{\rho}y \Leftrightarrow (x\rho y \wedge y\rho x).$$

Evidentemente se ρ è riflessiva, antisimmetrica e totale allora $\bar{\rho}$ è l'identità in A .

Infine si ricorda che, in tutto quanto segue, si intende per *semigrupp* (S, \oplus) una struttura algebrica con una operazione binaria $\oplus : S \times S \rightarrow S$ che sia associativa. Un elemento u di S si dice elemento *unità* per la \oplus se per ogni $x \in S$ si ha

$$u \oplus x = x \oplus u = x.$$

3. Esistenza di una funzione di utilità indotta da semigrupp naturalmente ordinati.

Sia S un semigrupp di possibili scelte (S, \oplus) , con unità per l'operazione \oplus , ossia S è un insieme chiuso rispetto all'operazione \oplus e può comprendere, tra le possibili scelte, la scelta \emptyset tale che:

$$\forall x \in S \quad x \oplus \emptyset = \emptyset \oplus x = x.$$

In S inoltre si suppone definita una relazione binaria $<$ riflessiva e transitiva, e soddisfacente la seguente ipotesi di sostituibilità:

$$x < y \implies \forall z \in S \quad x \oplus z < y \oplus z,$$

una tale relazione si dirà per brevità, nel seguito, sostituibile o compatibile rispetto l'operazione \oplus .

Sia ora T un sottogruppo di S con unità, si dice che S è *naturalmente ordinato* da T o *compensato* da T se

$$\forall x, y \in S \quad x < y \implies \exists t \in T : x \oplus t = y,$$

t si dice *compensazione* di x rispetto y .

Teorema 1. Sia (S, \oplus) un semigruppò, sia T un sottosemigruppò di S . Sia \lesssim_r una relazione così assegnata:

$$x \lesssim_r y \Leftrightarrow x = y \vee [\exists t \in T : x \oplus t = y],$$

allora \lesssim_r induce un pre-ordine sostituibile in (S, \oplus) ed (S, \oplus) è un semigruppò compensato da T .

Dimostrazione. La relazione \lesssim_r è banalmente riflessiva. Siano ora x, y, z elementi di S tali che $(x \lesssim_r y) \wedge (y \lesssim_r z)$ o equivalentemente

$$(x = y \vee (x \oplus t = y)) \wedge (y = z \vee (y \oplus w = z)), \text{ con } t, w \in T;$$

ossia

$$(x = y \wedge y = z) \vee (x = y \wedge (y \oplus w = z)) \vee \\ \vee (x \oplus t = y) \wedge y = z) \vee ((x \oplus t = y) \wedge (y \oplus w = z)),$$

pertanto segue

$$(x = z) \vee (x \oplus w = z) \vee (x \oplus t = z) \vee (x \oplus (t \oplus w) = z),$$

quindi la relazione \lesssim_r è riflessiva e transitiva.

Inoltre per ogni $z \in S$, se $(x \lesssim_r y)$ ossia

$$(x = y \vee (x \oplus t = y)), \text{ con } t \in T,$$

si ha

$$(x \oplus z = y \oplus z) \vee (x \oplus z \oplus t = y \oplus z), \text{ con } t \in T,$$

da cui segue

$$(x \oplus z) \lesssim_r (y \oplus z),$$

pertanto \lesssim_r gode della proprietà di sostituibilità. Inoltre dalla definizione di \lesssim_r segue immediatamente che S è compensato da T . \square

Se $x \lesssim_r y \implies (x \oplus t = y)$ con $t \in T$, diciamo t compensazione di x rispetto y , tale compensazione non è necessariamente unica.

È evidente che per ogni $t \in T$ e $t \neq \emptyset$ è $\emptyset \lesssim_r t$, allora ogni compensazione $t \neq \emptyset$ è positiva.

In tutto quanto segue si dice x contenuto in y ($x \subseteq y$) se:

$$x \subseteq y \Leftrightarrow \exists z \in S (x \oplus z = y).$$

Se inoltre la relazione \lesssim_r è totale allora segue immediatamente che

$$x \subseteq y \implies x \lesssim_r y.$$

Teorema 2. Sia (S, \oplus) un semigruppò naturalmente ordinato da T , sottosemigruppò di S . Se

$$(3.1) \quad x \subseteq y \implies x \lesssim_r y, \quad x, y \in S$$

allora se $(x \oplus t \oplus t') \sim x$ si ha $(x \oplus t) \sim x$ con $t, t' \in T$.

Dimostrazione. Sia $x \oplus t \oplus t' \sim x$, allora segue:

$$(x \subseteq x \oplus t) \implies (x \succsim_r x \oplus t),$$

$$(x \oplus t \subseteq x \oplus t \oplus t') \implies (x \oplus t \succsim_r x \oplus t \oplus t'),$$

pertanto si ha

$$x \succsim_r (x \oplus t) \succsim_r (x \oplus t \oplus t') \sim x,$$

ossia $(x \oplus t) \sim x$. \square

In (S, \oplus) ora si definisce la seguente relazione:

$$x \prec_r y \Leftrightarrow x \neq y \wedge [\exists t \in T : x \oplus t = y] \wedge [\nexists t \in T : y \oplus t = x],$$

dove T è un sottosemigruppato di S tale che per ogni $x, y \in S$:

$$[\exists t \in T : x \oplus t = y] \wedge [\nexists t \in T : y \oplus t = x],$$

aut

$$[\nexists t \in T : x \oplus t = y] \wedge [\exists t \in T : y \oplus t = x].$$

Pertanto tale relazione è strettamente antisimmetrica.

Inoltre è immediato verificare che tale relazione induce una relazione di indifferenza transitiva ed in modo analogo al Teorema 1 si dimostra che \prec_r è pure transitiva e sostituibile. Quanto ora esposto può essere sintetizzato nel seguente teorema:

Teorema 3. *Sia (S, \oplus) un semigruppato, sia T un sottogruppo di S . Allora \prec_r è una relazione strettamente antisimmetrica, transitiva e sostituibile.*

È noto pure il seguente classico risultato:

Teorema 4. *Sia \prec una relazione strettamente antisimmetrica e transitiva definita su un insieme finito X . Esiste allora in (X, \prec) una funzione di utilità se e solo se la relazione di indifferenza dedotta da \prec è transitiva.*

In Birkoff [2] e Milgram [5] si estende tale risultato al caso in cui X è infinito, pertanto in base ai Teoremi 2, 3 si può asserire quanto segue:

Teorema 5. *Sia (S, \oplus) un semigruppato, sia T un sottosemigruppato di S . Sia \prec_r una relazione così assegnata:*

$$x \prec_r y \Leftrightarrow x \neq y \wedge [\exists t \in T : x \oplus t = y] \wedge [\nexists t \in T : y \oplus t = x].$$

Esiste allora in (S, \oplus) una funzione di utilità.

Si consideri ora un semigruppò S e si supponga che in S siano assegnate due relazioni di compensazione rispetto ad un suo sottosemigruppò T , indicate tali relazioni nel seguente modo \prec_r, \prec_r^* , si dimostra quanto segue:

Teorema 6. *Sia (S, \oplus) un semigruppò, sia T un sottosemigruppò commutativo di S tale che*

$$\forall x \in S \exists t \in T : x \oplus t = x.$$

Siano \prec_r e \prec_r^ due relazioni di compensazione di S mediante T . Allora*

$$x \prec_r y \Leftrightarrow x \prec_r^* y$$

per ogni $x, y \in S$. Inoltre dette t, t' le rispettive compensazioni di x rispetto y si ha

$$y \oplus t' \sim y \oplus t$$

rispetto entrambe le relazioni \prec_r, \prec_r^ .*

Dimostrazione. Sia $x \prec_r y$, pertanto è $x \neq y$, sia inoltre $y \prec_r^* x$, allora segue:

$$(x \oplus t = y, y \oplus t' = x \text{ con } t, t' \in T) \Rightarrow ((y \oplus t') \oplus t = x \oplus t = y),$$

pertanto si cade in contraddizione. Quindi possiamo concludere che $x \prec_r y$ se e solo se $x \prec_r^* y$.

Sia ora $x \prec_r y$ con $x \neq y$ e sia $x \prec_r^* y$, allora è

$$x \oplus t = y, x \oplus t' = y \text{ con } t, t' \in T,$$

quindi segue:

$$y \oplus t' = (x \oplus t) \oplus t' = y \oplus t,$$

ossia $(y \oplus t' \sim y \oplus t)$ rispetto entrambe le relazioni. \square

È bene infine ricordare che una funzione di utilità ordinale è riferita ad un soggetto, pertanto gli ordinamenti di preferenza espressi da tale soggetto potrebbero contrastare quelli di altri soggetti circa le medesime alternative.

Qualora i due individui esprimono preferenze mediante relazioni di compensazione rispetto ad un medesimo sottosemigruppò T di S , allora non è detto che pervengano alla medesima compensazione nel confronto di x e y , ma ottengono lo stesso grado di soddisfazione rispetto ad eventi corretti da opportune compensazioni, più precisamente $y \oplus t' \sim y \oplus t$.

4. Conclusioni.

Con il modello ora assegnato si è posto il problema di costruire un funzionale che rispecchiasse le preferenze dell'individuo non solo rispetto ai beni ma che tenesse conto di quanto il progetto x fosse distante dal progetto y . Tale descrizione doveva pertanto interpretare il grado di soddisfazione nella scelta x invece di y mediante la misurazione della compensazione necessaria ad x per divenire equivalente ad y .

Questa proposta non assicura l'unicità della compensazione, necessaria per rendere indifferenti i due beni, e ciò non appare contraddire situazioni reali, richiede tuttavia che l'individuo sia in grado di privilegiare un sottoinsieme di alternative nell'universo da lui considerato, sottoinsieme rispetto al quale il soggetto misurerà il proprio grado di soddisfazione.

Nell'ambito finanziario è evidente l'applicazione di tale modello, basti pensare ad un insieme di progetti finanziari, chiuso rispetto all'unione di due o più progetti, tra i quali si privilegia il sottosemiggruppo delle situazioni finanziarie caratterizzate da un unico flusso monetario iniziale non nullo. Questa proposta sembra significativa in quanto l'equità di due progetti finanziari è motivata dalla determinazione di una compensazione.

Nell'ambito della teoria dell'utilità diversi autori hanno approfondito il concetto di atteggiamenti al rischio di un decisore con funzione di utilità $u(x)$.

Se si suppone $u(x)$ dotata di derivata prima $u'(x)$ e derivata seconda $u''(x)$, un'utile misura di avversione al rischio introdotta nella teoria dell'utilità da K. Arrow [1] e da J. Pratt [6], è data da:

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

che viene chiamata misura assoluta di avversione al rischio.

È evidente che si tratta di una qualità strettamente collegata alla concavità della funzione di utilità. a partire da tali lavori di Arrow e Pratt altri autori hanno introdotto altre funzioni come misura di rischiosità quale ad esempio la funzione di avversione al rischio relativo, definita come $xr(x)$, altri ancora hanno considerato come misura di avversione al rischio l'elasticità del premio di rischio.

La ricerca tuttora in atto, a partire dalla funzione di utilità indotta dalla relazione \prec_r , è volta a dedurre da tale funzione di utilità una misura di avversione al rischio mediata dalla compensazione.

Così pure il confronto tra le attitudini al rischio di due decisori potrebbe essere ricondotto alla valutazione della differenza delle diverse compensazioni associate ai differenti decisori.

BIBLIOGRAFIA

- [1] K.J. Arrow, *The theory of risk aversion*, Essays in the theory of risk bearing, North Holland, 1970, pp. 90-120.
- [2] G. Birkhoff, *Lattice theory*, American Mathematical Society, New York, 1966.
- [3] P.C. Fishburn, *Utility theory for decision making*, Wiley, New York, 1970.
- [4] L. Fuchs, *Partially ordered algebraic systems*, Pergamon Press, Oxford, 1963.
- [5] A.N. Milgram, *Partially ordered sets, separating systems and inductiveness*, Reports of a mathematical colloquium, Second Series N. 1, University of Notre Dame, 1939.
- [6] J.W. Pratt, *Risk aversion in the small and in the large*, *Econometrica*, 32 (1964), pp. 122-136.
- [7] F.S. Roberts, *Measurement theory with applications to decisionmaking, utility and the social sciences*, Addison - Wesley, 1979.

*Istituto di Econometria e Matematica per le Decisioni Economiche,
Università Cattolica,
Largo Gemelli 1,
20123 Milano (ITALY)*