LE MATEMATICHE
Vol. LI (1996) – Supplemento, pp. 81-89

QUASI-ANELLI CON PARTICOLARI SEMIGRUPPI DI CLAY

CELESTINA COTTI FERRERO - GIOVANNI FERRERO

Alla memoria di Umberto Gasapina

Introduzione.

Al quasi-anello sinistro N è notoriamente legato il semigruppo Φ (di Clay, o delle dilatazioni) costituito dalle funzioni (di Clay) $N \to N$ definite dalle $\varphi_a : x \to ax$ $(a \in N)$. Sembra utile, sia in vista delle difficoltà che presenta lo studio del semigruppo moltiplicativo di N ([6]) che nella prospettiva di costruire quasi-anelli di particolare interesse (come in [7], [8], ove si usano tecniche costruttive simili alle nostre) continuare studi sistematici sui quasi-anelli il cui semigruppo delle dilatazioni ammette descrizioni particolarmente semplici. Così qui continuiamo le ricerche di [3], [4] individuando i quasi-anelli in cui Φ è unione di un semigruppo ciclico infinito e di uno zero.

Con l'occasione, dopo varie premesse, esplicitiamo la parte elementare dello studio del caso in cui Φ è unione di un gruppo e di uno zero anche per mostrare come questo porti a ritrovare quasi-anelli già abbondantemente studiati per cui rimandiamo poi senz'altro a trattati come [9] e [2].

Anche per nomenclatura e notazioni ci riferiamo senz'altro ai trattati citati ed a [5], sempre riferendoci a quasi-anelli *sinistri* salvo che *in presenza di una funzione* $f : A \to B$ *scriveremo spesso, all'occasione,* f_a *o* fa *in luogo di* $f(a)$.

Work supported by the Italian M.U.R.S.T.

1. Generalità.

Ad ogni modo, per preparare lo studio cui è dedicato il lavoro, cominciamo con qualche osservazione sui quasi-anelli N il cui semigruppo Φ di Clay (costituito dalle dilatazioni) sia unione disgiunta di un semigruppo Ψ e di uno zero ζ (e scriveremo brevemente $\Phi = \psi \cup \zeta$).

Si ha subito che, poichè Φ ha comunque lo zero destro φ_0, *deve essere* $\zeta = \varphi_0$. Ne segue che se $a \in N$ è costante sarà $\varphi_a = \varphi_{0a} = \varphi_0\varphi_a = \zeta\varphi_a = \zeta$, quindi $N_cN_0 = 0$ e $N_c \subseteq \mathrm{Fix}\,\alpha$, per ogni $\alpha \in \Psi$. Inoltre N_0 è un ideale di N perchè $NN_0 \subseteq N_0$, visto che, per $n \in N$, $n_0 \in N_0$ risulta $\varphi_0 nn_0 = \zeta\varphi_n n_0 = \zeta n_0 = \varphi_0 n_0 = 0$.

Inoltre si ha una variante della legge dell'annullamento del prodotto: se $\varphi_a\varphi_b = \varphi_0 = \zeta$ ovviamente una almeno delle due funzioni φ_a, φ_b deve coincidere con $\varphi_0 = \zeta$ proprio perchè $\Phi = \Psi \cup \zeta$.

Osserviamo ancora che, posto $A = \{x \in N \mid \varphi_x = \zeta\}$ risulta che $x \in A$ se, e solo se esiste un $\gamma \in \Psi$ tale che $\gamma x \in A$; allora per ogni $\alpha \in \Psi$ si ha che $\alpha x \in A$.
Inoltre si nota subito che, posto $K = \bigcup \mathrm{Ker}\,\gamma$ (per $\gamma \in \Psi$), risulta $K \subseteq A$. Infatti per $\psi \in \Psi$, $x \in N$ se $\psi x = 0$ allora $\psi\varphi_x = \zeta$ e $\varphi_x = \zeta$.

Giusto il problema esplorativo 3.23 di [2], ricordato che nelle nostre condizioni $\varphi_c = \zeta$ per ogni $c \in N_c$, si ha subito che qui gli elementi costanti non generano nuove decomposizioni semidirette del tipo di Peirce. Possiamo invece individuare decomposizioni di questo tipo partendo dagli elementi idempotenti di Ψ (necessariamente esistenti se solo Ψ è finito).

Osservazione 1. *Sia* $\alpha \in \Psi$ *idempotente; allora* $N^+ = \mathrm{Ker}\,\alpha + \alpha N_0 + N_c$ *(ove le somme indicano somme di gruppi additivi che si incontrano nel solo zero), con* $\mathrm{Im}\,\alpha = \alpha N_0 + N_c$, $\alpha N_0 = N_0 \cap \mathrm{Im}\,\alpha$, *(*$\alpha N_0$ *ideale di* $\mathrm{Im}\,\alpha$*) e* $\mathrm{Ker}\,\alpha \subset N_0$.

Ovviamente $N^+ = \mathrm{Ker}\,\alpha + \mathrm{Im}\,\alpha$ (ove la somma è semidiretta, ma omettiamo ed ometteremo ovvie precisazioni di questo tipo per semplificare le locuzioni). Ora il generico elemento αn di $\mathrm{Im}\,\alpha$ può essere scritto come $\alpha n = (\alpha n - 0n) + 0n$, $\{\alpha n - 0n \mid n \in N\} = \alpha N_0$ (come si verifica facilmente), mentre ovviamente $\{0n | n \in N\}$ è N_c. Più specifiche solo le altre verifiche: un elemento x della forma $x = \alpha n - 0n$ appartiene ad N_0 perchè $0x = \zeta x = \zeta\alpha n - \zeta\zeta n = 0$ (perchè ζ è uno zero in Φ) ed anche appartiene ad $\mathrm{Im}\,\alpha$ perchè $\alpha(n - 0n) = \alpha n - \alpha 0n = \alpha n - 0n$.
Ora αN_0 è normale in $\mathrm{Im}\,\alpha$ perchè N_0 è normale in N; inoltre, dopo quanto visto inizialmente, dalla $\alpha N_0 \subseteq N_0$ segue subito che $\alpha(N\alpha N_0) \subseteq \alpha N_0$; per $n, n' \in N$ e $n_0 \in N_0$ risulta $(n+n_0)n' - nn' \in N_0$ e dunque $\alpha(n+n_0)n' - \alpha nn' \in \alpha N_0$ e cioè $(\alpha n + \alpha n_0)n' - \alpha nn' \in \alpha N_0$; segue che αN_0 è un ideale di $\mathrm{Im}\,\alpha$.
Poichè poi $\mathrm{Ker}\,\alpha = \{x - \alpha x \mid x \in N\}$ si ha che $\varphi_0(x - \alpha x) = \varphi_0 x - \varphi_0\alpha x = 0$,

dunque $\operatorname{Ker}\alpha \subseteq \operatorname{Ker}\varphi_0 = N_0$. D'altronde l'inclusione è propria perchè altrimenti per ogni $x \in N$ sarebbe $x - 0x \in N_0$, $\alpha(x - 0x) = 0$, $\alpha x - \zeta x = 0$, e $\alpha = \zeta$.

Inutile dire che quanto sopra non fa altro che discutere la decomposizione alla Pierce $n = (n - \alpha n) + (\alpha n - 0n) + 0n$ per $n \in N$ tenendo conto della struttura di Φ.

Osservazione 2. *Per $N = N_0 + N_c$ se Ψ contiene un gruppo Ω allora*

1.– gli elementi di Ω hanno la stessa immagine I e lo stesso nucleo $K \subseteq N_0$, e l'unità η di Ω agisce come l'identità su I;

2.– Ω subordina un gruppo di automorfismi su I e su ηN_0.

1.– Poniamo $K = \operatorname{Ker}\eta$ e $I = \operatorname{Im}\eta$. Per $k \in K$ e $\gamma \in \Omega$ è $\gamma k = \gamma\eta k = 0$, e $k \in \operatorname{Ker}\gamma$; inoltre per $y \in \operatorname{Ker}\gamma$ è $\gamma^{-1}\gamma y = 0$, $\eta y = 0$ e $\operatorname{Ker}\gamma \subseteq K$. D'altronde per $i \in I$ possiamo scrivere $i = \eta x$ con $x \in N$, e allora $\eta i = \eta^2 x = \eta x = i$, e l'unità di Ω agisce come l'identità su I. Ora finalmente per $\gamma \in \Omega$, $i \in I$ risulta $\gamma(\gamma^{-1})i = i$ e $I \subseteq \operatorname{Im}\gamma$. D'altronde per $y \in \operatorname{Im}\gamma$ esiste un $x \in N$ tale che $y = \gamma x$ ed $\eta y = \eta\gamma x = \gamma x = y$, e dunque $\operatorname{Im}\gamma \subseteq I$.

2.– Per $\gamma \in \Omega$ la restrizione di γ ad I è surgettiva per quanto sopra e iniettiva perchè per $x, y \in I$ se $\gamma x = \gamma y$ allora $x = \gamma^{-1}\gamma x = \eta y = y$, e dunque γ è un automorfismo di I.

Ora ogni $\gamma \in \Omega$ manda elementi di ηN_0 in elementi di ηN_0 perchè, per $x \in N_0$ $\gamma\eta x = \eta\gamma x$ e $\zeta\gamma x = \gamma\zeta x = 0$. Di qui si ha subito che Ω subordina un gruppo di automorfismi su ηN_0.

2. Quando Ψ è un gruppo di torsione.

Il caso in cui Ψ è un gruppo di torsione è una (doppia) generalizzazione dei quasi-anelli considerati in [5], e si lascia studiare ragionando come allora. Per brevità, anche in vista del fatto che concettualmente non c'è qui molto di nuovo e che i dettagli sono complessi solo una parte delle considerazioni ivi condotte sarà adattata al caso attuale e riportata esplicitamente.

Come in [5] indicheremo condizioni che un quasi-anello N deve soddisfare per essere uno dei quasi-anelli desiderati (Teorema 1), in modo anche da caratterizzare la sua struttura. Il Teorema 2 mostrerà poi che gli elementi trovati individuano in modo unico tale struttura. Infine con il Teorema 3 indicheremo come costruire tutti i quasi-anelli in questione, risolvendo eventuali dubbi sulla loro esistenza.

Teorema 1. *Se N è un quasi-anello tale che Φ sia unione di un gruppo Ψ di torsione avente unità η ed uno zero $\zeta = \varphi_0$ si ha, posto $K = \operatorname{Ker}\eta$, $I = \operatorname{Im}\eta$,* *che*

1.– *per* $n, n' \in N$ *una volta scritto, come è lecito,* $n = k + i$, $n' = k' + i'$ *con* $k, k' \in K$, $i, i' \in I$ *risulta* $\varphi_n = \varphi_i$ *e dunque* $nn' = (k + i)(k' + i') = ii'$*;*
2.– K *è un ideale di* N *ed uno zero-quasi-anello, ed* N/K *è isomorfo ad* I*;*
3.– *Per* $A = \{x \in I | \varphi_x = \zeta\}$ *si ha che* $I \setminus A$ *è unione di traiettorie principali di* Ψ *contenente ciascuna una ed una sola unità sinistra.*

1.– Per $k, k', k'' \in K$ e $i, i', i'' \in I$ la proprietà associativa dice che

$$(k + i)[(k' + i')(k'' + i'')] = \varphi_{k+i}\varphi_{k'+i'}(i'') =$$
$$[(k + i)(k' + i')](k'' + i'') = \varphi_{k+i}\varphi_{i'}(i'')$$

e, tenuto conto che Ψ è un gruppo, e che certamente esiste un $\varphi_{k+i} \neq \varphi_0$, si ha che $\varphi_{k'+i'} = \varphi_i$. Allora per $n = k + i$, $n' = k' + i'$ risulta $nn' = \varphi_i(n') = ii'$, visto che φ_i ed η devono avere lo stesso nucleo (Osservazione 2).
2.– Intanto ovviamente, per $n \in N$, $i \in I$, $k \in K$ risulta $n(i + k) = ni + nk$ e $nk = 0$ perchè $\operatorname{Ker}\varphi_n = \operatorname{Ker}\eta$. Di qui segue anche subito che K è uno *zero quasi-anello* e che $NK = 0$. Inoltre, per $n' \in N$ e $k \in K$ è $(n + k)n' - nn' \in K$: infatti $\eta(n + k)n' - \eta nn' = \eta nn' - \eta nn' = 0$, e K è un ideale di N.
E' ovvio ora che la funzione che associa al generico $n = k + i$ $(k \in K, i \in I)$ l'elemento i è un omomorfismo avente nucleo K, come segue subito da quanto visto al punto 1.
3.– Per la Osservazione 3 il gruppo Ψ risulta un gruppo di automorfismi di I, e per il punto 1 precedente ogni $\alpha \in \Psi$ può essere scritta come φ_i, per $i \in I$. Inoltre $\operatorname{Im}\zeta = N_c \subseteq \operatorname{Fix}\gamma$, $\forall\gamma \in \Psi$ e $N_c \subseteq A$ per una delle osservazioni iniziali. Ora per $x \in I$ se $\gamma x \in N_c$ allora $\gamma x_0 + x_c = n_c$ e allora $\gamma x_0 = 0$ perchè, per una delle osservazioni iniziali, $\gamma N_0 \subseteq N_0$; essendo γ un automorfismo di $I = \eta N_0 + N_c$ (Osservazione 2) risulta $x_0 = 0$ e $x \in N_c$.

Mostriamo che ogni $i \in I \setminus A$ appartiene ad una traiettoria *principale* di Ψ. Per l'ipotesi di torsione esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che $(\varphi_i)^k = \eta$. Allora $\varphi_{i^k} = \eta$, e pertanto $i^k = u$ è tale che $\varphi_u i = ui = iu = i^{k+1} = i$. Ne segue che u è unità sinistra in I. Visto che $\varphi_i u = i$ si ha che $i, u \in T = \Psi u$. Dimostriamo che T è principale, cioè che per ogni $t \in T$ esiste uno ed uno solo $\gamma \in \Psi$ tale che $\gamma u = t$: siano allo scopo $\gamma u = \delta u$ $(\gamma, \delta \in \Psi)$; allora per ogni $x \in i$ si ha che $\gamma ux = \delta ux$, e cioè $\gamma x = \delta x$: di qui $\gamma = \delta$. Ora T ha una sola unità sinistra perchè se $u' \in T$ fosse unità sinistra si avrebbe $u = \alpha u'$ (per un $\alpha \in \Psi$), e quindi $\varphi_u = \alpha\varphi_{u'}$ e $\eta = \alpha\eta$, il che implica $\alpha = \eta$ e $u = u'$. Poichè, per una delle osservazioni iniziali, $T \subseteq I \setminus A$ ed i è un generico elemento di $I \setminus A$, si ha che $I \setminus A$ è unione di traiettorie principali di Ψ come si voleva.

Teorema 2. *Sia N^+ un gruppo, ζ un suo endomorfismo idempotente, Ψ un gruppo di torsione costituito da automorfismi di N^+. Sia ancora U un insieme di rappresentanti di traiettorie principali distinte di Ψ nessuna delle quali contenga elementi di* $\operatorname{Im}\zeta$. *Supponiamo che, per ogni $\gamma \in \Psi$, sia* $\operatorname{Im}\zeta \subseteq \operatorname{Fix}\gamma$, $\gamma \cdot (\operatorname{Ker}\zeta) \subseteq \operatorname{Ker}\zeta$ *e che U non sia vuoto.*
Allora esiste uno ed uno solo quasi-anello su N^+ il cui semigruppo di Clay Φ è unione disgiunta di Φ e dello zero ζ.

La dimostrazione si ottiene, come in [5] (Corollario 9 e Teorema 10), rovesciando i ragionamenti precedenti.
Per la costruzione effettiva dei nostri quasi-anelli di nuovo si ragiona come in [5] (Teorema 10 e Corollario 11), ma è più semplice enunciare il teorema di esistenza in modo da spostare la difficoltà entro la costruzione dei quasi-anelli dati dalla

Definizione A. *Chiamiamo fortemente monogeni misti i quasi-anelli il cui semigruppo Φ di Clay è unione disgiunta di un gruppo di torsione di automorfismi del suo gruppo additivo e di uno zero.*

Tali quasi-anelli si costruiscono ovviamente come in [5] semplicemente omettendo la condizione di finitezza e introducendo in suo luogo la torsione ove occorre.

Teorema 3. *Siano I un quasi-anello fortemente monogeno misto, $[K; +]$ un gruppo, $f : I \twoheadrightarrow \operatorname{Aut}[K; +]$ un omomorfismo. Definiamo in $K \times I$ somma e prodotto con le $\langle k, i\rangle + \langle k', i'\rangle = \langle k + f_i k', i + i'\rangle$, $\langle k, i\rangle\ \langle k', i'\rangle = \langle 0, ii'\rangle$. Si ottiene un quasi-anello il cui semigruppo di Clay Φ è unione disgiunta di un gruppo Ψ (di torsione) e di uno zero; viceversa con questo procedimento si ottengono tutti i quasi-anelli siffatti.*

Ancora la dimostrazione è ovvia (ma pesante), ove si tenga presente [5], e non siamo sicuri che la riformulazione di [5] presentata in [2] permetta in questo caso decise semplificazioni.

Un esempio banale serve a mostrare come effettivamente gli elementi di Ψ possano non essere automorfismi di N^+.
Consideriamo il gruppo additivo $N^+ = \mathbb{R}^3$, e definiamo in esso un prodotto dicendo che $\langle a, b, c\rangle\langle a', b', c'\rangle = \langle 0, 0, c'\rangle$ se $b = 0$, $\langle 0, b', c'\rangle$ altrimenti.
Si verifica per via diretta che si ottiene un quasi-anello soddisfacente le nostre condizioni ove $\Phi = \{\eta, \zeta\}$, con $\eta\langle a, b, c\rangle = \langle 0, b, c\rangle$ e $\zeta\langle a, b, c\rangle = \langle 0, 0, c\rangle$. Risulta subito $K = \{\langle a, 0, 0\rangle \mid a \in \mathbb{R}\}$; $N_0 = \{\langle a, b, 0\rangle \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, $\eta N_0 = \{\langle 0, b, 0\rangle \mid b \in \mathbb{R}\}$, $N_c = \{\langle 0, 0, c\rangle \mid c \in \mathbb{R}\}$ ed $I = \{\langle 0, b, c\rangle \mid b, c \in \mathbb{R}\}$.

Osservazione 3. *Un quasi-anello soddisfacente alle condizioni del Teorema 1 è un anello se, e solo se ζ è l'endomorfismo nullo ed $I = \operatorname{Im}\eta$ è un anello fortemente monogeno.*

Per la dimostrazione basta ricordare la 1 del Teorema 1 ed il fatto che un quasi-anello distributivo che abbia una unità sinistra è un anello.

Per ulteriori dettagli e costruzioni si veda anche [1], [2] e [5] tenendo presente gli stretti consueti legami fra planarità e monogenicità.

3. Quando il semigruppo Ψ è ciclico infinito.

Sia $\Psi = \langle f \rangle$ ciclico. Ricordiamo che si può porre $N^{(n)} = \{x_1x_2\dots x_n \mid x_i \in N\}$ ed $A = \{x \in N \mid \varphi_x = \varphi_0 = \zeta\}$; chiamiamo *irriducibili* gli elementi di $N \setminus (\operatorname{Im} f \cup A)$ e poniamo $K = \cup \operatorname{Ker} f^n$, $I = \cap \operatorname{Im} f^n$.

Osserviamo subito che $N^{(n)} = f^{n-1}N = \operatorname{Im} f^{n-1}$. Infatti $N^{(2)} = fN$ perchè, per $x \in N \setminus A$, $\varphi_x = f^k$ e per $y \in N$ è $xy = \varphi_x y = f^k y \in fN$, e se $x \in A$ è $xy = \zeta y = \zeta(y_0 + y_c) = y_c = fy_c \in fN$; inoltre $fN \subseteq N^{(2)}$ perchè esiste un p tale che $\varphi_p = f$ e allora $fx = \varphi_p x = px \in N^{(2)}$. Per induzione l'asserto valga ora per n, mostriamo che vale per $n+1$: infatti $N^{(n+1)} = NN^{(n)} = Nf^{(n-1)}N \subseteq f(f^{n-1}N) \subseteq f^n N$ e $f^n N = \varphi_{p^n} N = p^n N \subseteq N^{(n+1)}$.

Teorema 4. *Sia N un quasi-anello con $\Phi = \langle f \rangle \cup \{\zeta\}$, ove $\langle f \rangle$ è un semigruppo ciclico infinito. Risulta*

1.– $\operatorname{Fix} f \cup I \subseteq A$;
2.– se $f^n a = f^n b$ per $n \in \mathbb{N}$ allora $\varphi_a = \varphi_b$;
3.– per $\varphi_p = f$ risulta $p + K \subseteq N \setminus (\operatorname{Im} f \cup A)$ e, per $k \in K$, $\varphi_p = \varphi_{p+k}$;
4.– per n numero naturale risulta $N^{(n)} \neq N^{(n+1)}$;
5.– per $x \in \operatorname{Im} f \setminus A$ possiamo scrivere $x = f^r q$, con $r \in \mathbb{N}$, q irriducibile, e se $x = f^s t$ con t irriducibile allora $r = s$ e $t \in q + K$;
6.– $[N_0; +, .]$ è un quasi-anello zero-simmetrico il cui semigruppo di Clay Φ è unione disgiunta del semigruppo ciclico infinito $\Psi_0 = \langle f_{|N_0} \rangle$ e dell'endomorfismo nullo $\varphi_{0|N_0}$ di N_0.

Ricordiamo subito che, per quanto visto all'inizio, qui $\zeta = \varphi_0$.

1.– Poichè, per $a \in N_c$ sappiamo che $\varphi_a = \varphi_0$ si ha che $N_c \subseteq A$; se inoltre $x \in \operatorname{Fix} f$ allora $fx = x$ e $f\varphi_x = \varphi_x$; questo è possibile solo se $\varphi_x = \varphi_0$, cioè se $x \in A$, e dunque $\operatorname{Fix} f \subseteq A$. Ovviamente poi $N_c \subseteq \operatorname{Fix} f$.
Sia $y \in (\cap \operatorname{Im} f^n) \setminus A$; allora per $n \in \mathbb{N}$ esiste un $x \in N$ tale che $y = f^n x$ e, naturalmente, $\varphi_x = f^h$ (per un opportuno h positivo), visto che $y \notin A$. Questo vuol dire che dovrebbe essere $\varphi_y = f^n f^h$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il che è assurdo perchè f è ciclico infinito.

2.– Se $f^n a = f^n b \in A$ allora $a, b \in A$ e $\varphi_a = \varphi_b = \zeta$, altrimenti $a, b \notin A$, e se fosse $\varphi_a \neq \varphi_b$ sarebbe $\varphi_a = f^i \neq \varphi_b = f^j$ (per opportuni $i, j \in \mathbb{N}$), ma $f^{n+i} = f^{n+j}$ con $i \neq j$, il che è assurdo perchè $\langle f \rangle$ è ciclico infinito.

3.– Se $\varphi_p = f$ allora $p \notin A$ e se fosse $p = ab$ (con $a, b \notin A$) allora $\varphi_p = \varphi_a \varphi_b$, e sarebbe $f = f^{n+m}(n + m > 1)$, cosa banalmente esclusa: dunque p è irriducibile. Inoltre per $k \in K$ esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che $f^m k = 0$ e dunque $f^m(p + k) = f^m p$ onde $\varphi_p = \varphi_{p+k}$; allora anche $\varphi_{p+k} = f$ e $p + k$ è irriducibile. Notiamo che si ha anche di qui che f *non può essere surgettiva.*

4.– Se per assurdo fosse $N^{(n)} = N^{(n+1)}$, per $\varphi_p = f$ avremmo $p^n N = p^{n+1} N$ ed esisterebbe un $y \notin A$ tale che $p^{n+1} = p^{n+1} y$; posto $\varphi_y = f^m$ sarebbe $f^{n+1} = f^{n+1} f^m$, il che è assurdo.

5.– Se $x \in \operatorname{Im} f \setminus A$ ovviamente $x \notin \cap \operatorname{Im} f^n$ e sia r il minimo intero per cui $x \in f^r N$. Allora $x = f^r q$ con q irriducibile. Se anche $x = f^s t$ ovviamente $s \geq r$, e quindi se t è irriducibile $s = r$. Allora $f^r(q - t) = 0$, ed esiste un $k \in K$ tale che $t = -k + q$, e $t \in q + K$ per la normalità di K.
Notiamo anche che per la proprietà associativa se $x = f^r q$ allora $f^r \varphi_q = \varphi_{f^r q} = \varphi_x$.

6.– E' ovvio tosto che si osservi che $q = q_0 + q_c$ è irriducibile se, e solo se q_0 è un elemento irriducibile di N_0. Infatti se $q_0 = f q_0'$, allora $q = f q_0' + q_c = f q_0' + f q_c = f(q_0' + q_c)$ e q non è irriducibile, e se $q = f q'$ allora $q_0 = -q_c + q = f(-q_c) + f(q') = f(-q_c + q')$ e q_0 non è irriducibile in N_0.

Teorema 5. *Siano* $[N; +]$ *un gruppo,* ζ *e un suo endomorfismo idempotente. Poniamo* $E = \operatorname{Ker} \zeta$ *e* $C = \operatorname{Im} \zeta$. *Sia* f *un endomorfismo di* N *tale che* $\operatorname{Im} f^n \neq \operatorname{Im} f^{n+1}$, *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Sia A *un sottoinsieme di* N *che contenga* $\operatorname{Fix} f$, *ed anche* $I = \cap_n \operatorname{Im} f^n$; *supponiamo inoltre, naturalmente, che* A *contenga* $K = \cup \operatorname{Ker} f^n$ *e sia* $f(A) = A \cap \operatorname{Im} f$. *Poniamo* $P = N \setminus (\operatorname{Im} f \cup A)$.
Sia $\alpha : P \to \langle f \rangle$ *una funzione tale che se* $p' = p + k$ *con* $p, p' \in P$, $k \in K$ *allora* $\alpha_{p'} = \alpha_p$; *inoltre sia* $f \in \operatorname{Im} \alpha$ *ed* $\alpha^{-1}(f)$ *sia unione di laterali di* K *in* $[N; +]$.
Sia $\varphi : N \to \operatorname{End} N$ *la relazione definita dicendo che* $\varphi_a = \zeta$ *per* $a \in A$, $\varphi_{p+k} = \alpha_p$ *per* $p \in P$, $k \in K$; *e per* $x = f^n p$ $(p \in p)$ *sia* $\varphi_x = f^n \alpha_p$.
Allora φ *è la funzione di Clay di un quasi-anello in cui* $\Phi = \langle f \rangle \cup \zeta$; *viceversa tutti i quasi anelli in cui* Φ *è unione disgiunta di un semigruppo ciclico infinito e di uno zero si ottengono come sopra.*

Per la dimostrazione premettiamo alcune semplici considerazioni.
Poichè ζ è un endomorfismo idempotente di N allora ogni $x \in N$ può scriversi in modo unico come $x = e+c$ con $e \in E$, $c \in C$, e se $f(e+c) = f(e'+c')$ allora

$f(e)+c=f(e')+c'$, e di qui $f(e)=f(e')$ e $c=c'$. Inoltre $f\zeta=\zeta f=\zeta$: infatti $f\zeta(e+c)=f(c)=c$ e $\zeta f(e+c)=\zeta(f(e)+c)=\zeta c=c$ perchè $C\subseteq \mathrm{Fix}\, f$ e $f(E)\subseteq E$.
Nelle nostre condizioni risulta che, per ogni $p\in p$, $(p+K)\cap A=\phi$: se infatti esistesse un $k\in K$ tale che $p+k\in A$ potremmo scrivere $p+k=a$, ed esisterebbe un $n\in\mathbb{N}$ tale che $f^n(k)=0$; allora $f^n(p+k)=f^n(a)$ e $f^n(p)=f^n(a)\in A$, e allora $p\in A$, contro il supposto visto che dalla $f(A)=A\cap \mathrm{Im}\, f$ segue $f^n(A)=A\cap\mathrm{Im}\, f^n$.

Per dimostrare che φ è una funzione basterà ora considerare gli $x\in\mathrm{Im}\, f\setminus A$: sia $x\in\mathrm{Im}\, f\setminus A$ e sia r (esistente perchè $x\notin I$) tale che $x\in\mathrm{Im}\, f^r\setminus\mathrm{Im}\, f^{r+1}$. Allora $x=f^rq$ con $q\in N\setminus\mathrm{Im}\, f$ e $q\notin A$ perchè altrimenti $x\in A$: ne segue che $q\in P$. Se fosse $x=f^rq=f^rt$ (con $t\in p$) allora $f^r(q-t)=0$; ora, utilizzando le considerazioni che iniziano questa dimostrazione, possiamo scrivere $f^r(e+c-c'-e')=0$ onde $e-e'\in K$ ed $e'=-k+e$, con $k\in K$, cioè $x=f^rq=f^r(-k+q)$. Questo basta per dire che φ è una funzione.

Definiamo ora un prodotto in $[N;+]$ ponendo $xy=\varphi_x y$, e per concludere basterà mostrare che il prodotto è associativo, cioè che $\forall x,y\in N$ risulta $\varphi_x\varphi_y=\varphi_{xy}=\varphi_{\varphi_x y}$. Procediamo per casi

1) Per $x\in a$, $y\in N$ si ha che $\varphi_x\varphi_y=\zeta\varphi_y=\zeta$ e $\varphi_{\varphi_x y}=\varphi_{\zeta y}=\zeta$ perchè $\zeta y\in C\subseteq A$ per ipotesi;

2) per $x\in P$ abbiamo tre sottocasi: se $y\in A$ allora $\varphi_x\varphi_y=\alpha_x\zeta=\zeta$, mentre $\varphi_{\varphi_x y}=\varphi_{\alpha_x y}=\zeta$ perchè $f(A)\subseteq A$; per $y\in P$ risulta $\varphi_x\varphi_y=\alpha_x\alpha_y$ e $\varphi_{\varphi_x y}=\varphi_{\alpha_x y}=\alpha_x\alpha_y$ perchè $\alpha_x y$ è del tipo $f^s y$ con $y\in P$; per $y\in\mathrm{Im}\, f\setminus A$ risulta $y=f^rp$, $p\in P$ e $\varphi_x\varphi_y=\alpha_x f^r\alpha_p$ mentre $\varphi_{\varphi_x y}=\varphi_{\alpha_x f^r p}=\alpha_x f^r\alpha_p$ perchè $\alpha_x f^r$ è una potenza di f;

3) per $x\in\mathrm{Im}\, f\setminus A$ risulta $x=f^sq$, con $q\in P$; se $y\in A$ si ragiona come sopra; se $y\in P$ allora $\varphi_x\varphi_y=f^s\alpha_q\alpha_y$ e $\varphi_{\varphi_x y}=\varphi_{f^s\alpha_q y}=f^s\alpha_q\alpha_y$ per la definizione di φ; se infine $y\in\mathrm{Im}\, f\setminus A$ allora $y=f^tr$, con $r\in P$ e $\varphi_x\varphi_y=f^s\alpha_q f^t\alpha_r$ mentre $\varphi_{\varphi_x y}=\varphi_{f^s\alpha_q f^t\alpha_r}=f^s\alpha_q f^t\alpha_r$, come si voleva.
Il resto è ormai ovvia conseguenza del Teorema 2.

Poichè i quasi-anelli sopra prospettati non compaiono nella letteratura a noi nota indichiamo due semplici esempi che, ovviamente, suggeriscono ampie classi di esempi analoghi.
Sia $N^+=\oplus_{n=1}^{\infty}\mathbb{Z}$; sia ζ l'endomorfismo nullo, e sia f definita dalla $f(\langle a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\rangle)=\langle a_2,a_3,a_1,0,a_4,a_5,\dots\rangle$. Ora $I=\cap\mathrm{Im}\, f^n=\{\langle\langle a_1,a_2,a_3,0,\dots,0\rangle\}$ e $K=\cup\mathrm{Ker}\, f^n=\{0\}$.
Posto $A=I$ risulta $fA=A$. Gli elementi di P sono le successioni $\langle a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\rangle$ con $a_4\neq 0$.
Per $x\in P$ poniamo $\alpha_x=f$, e di conseguenza $\varphi_x=f$. Risulta allora che

per $x \in \operatorname{Im} f^n \setminus \operatorname{Im} f^{n+1}$ deve essere $\varphi_x = f^{n+1}$: naturalmente per $x \in A$ sarà $xN = 0$.
Osserviamo che se $x \in \operatorname{Im} f^n \setminus \operatorname{Im} f^{n+1}$ gli elementi $a_4 = a_5 = \ldots = a_{n+3}$ di $x = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \rangle$ sono nulli, ma $a_{n+4} \neq 0$; allora $f^m x \in \operatorname{Im} f^{n+m} \setminus \operatorname{Im} f^{n+m+1}$.
Si vede facilmente che le posizioni iniziali soddisfano le ipotesi del teorema e volendo si può verificare direttamente una parte della tesi: si nota in particolare che si ottiene un quasi-anello zero-simmetrico. Con le posizioni precedenti ma fissando ζ in modo che sia $\zeta : \langle a_1, a_2, \ldots \rangle \to \langle a_1, a_2, a_3, 0, 0, \ldots \rangle$ si ottiene invece un quasi-anello N in cui $N_0 = \{\langle 0, 0, 0, a_4, \ldots \rangle\}$ e $N_c = \{\langle a_1, a_2, a_3, 0, \ldots \rangle\}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. Aichinger, *Planar rings,* Results in Mathematics, 30 (1996), pp. 10-15.

[2] J.R. Clay, *The nearrings,* Oxford U.P., 1992.

[3] C. Cotti - G. Ferrero, *Osservazioni elementari sulle dimostrazioni di un quasi-anello,* Riv. Mat. Univ. Parma, (5) 3 (1994), pp. 333-339.

[4] C. Cotti - G. Ferrero, *Ciclicità nelle dilatazioni,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 44 (1996), pp. 53-65.

[5] G. Ferrero, *Classificazione e costruzione degli stems p-singolari,* Istituto Lombardo (Rend. Sc.) A, 102 (1968), pp. 597-613.

[6] G. Ferrero, *Sul semigruppo moltiplicativo di un quasi-anello,* Atti Conv. Teoria dei Semigruppi, Univ. Siena, 1983, pp. 8-34.

[7] G. Gallina, *Estensioni di quasi-anelli fortemente monogeni,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 33 (1984), pp. 1-4.

[8] G. Gallina, *Generalizzazioni di quasi-anelli fortemente monogeni,* Riv. Mat. Univ. Parma, (4) 12 (1986), pp. 34-34.

[9] G. Pilz, *Near-rings,* North-Holland, Amsterdam, 1983.

Dipartimento di Matematica,
Università di Parma,
Via Massimo D'Azeglio 85/A,
43100 Parma (ITALY)