LE MATEMATICHE
Vol. LI (1996) – Supplemento, pp. 137-148

GRUPPI SEMPLICI RISPETTO ALLA PERMUTABILITA'

CESARINA MARCHIONNA TIBILETTI

Alla memoria di Umberto Gasapina

Let H, K two subsets of a group G and $Z(G) = Z \subset H \subseteq K$; then is defined : *H weak normal in K* if $\forall k \in K \setminus Z, \exists h \in H \setminus Z, [h, k] = 1$ (and it is written $H \lhd_d K$).
We say that a non abelian group G is *simple with respect to permutability (r.p.)* if does not exist a subset $H, Z \subset H \subset G (H \neq G), H \lhd_d G$.
The groups G *simple r.p.* are studied when H is general or particular (a Q-complex, a subgroup, a normal subgroup). The class of these groups are investigated from the properties of H (the principal theorems are 2.3, 2.6, 3.2, 4.1).

Finally a few particular cases and a conjecture are presented.

Introduzione.

In [6] è stato introdotto il concetto di *normalità debole* per un gruppo. Sia G un gruppo di centro $Z(G) = Z$: per due sottoinsiemi (detti anche complessi) H e K di G con $Z \subset H \subseteq K$ si dice che H è *normale debole* in K se per $\forall k \in K \setminus Z$ esiste un qualche $h \in H \setminus Z$ con $[h, k] = 1$ e si scrive $H \lhd_d K$. In particolare si possono avere dei sottoinsiemi H con $Z \subset H$ tali che $H \lhd_d G$ (in tal caso si scrive $G = PExH$).

Il presente lavoro si è svolto nell'ambito del Progetto MURST (40%) "Teoria dei gruppi ed algebra non commutativa" e del G.N.S.A.G.A del C.N.R.

In questo lavoro si considerano gruppi G (non abeliani) *semplici* rispetto alla suddetta *normalità debole* nel senso che non posseggono sottoinsiemi propri H con $Z \subset H$, $H \lhd_d G$, ove H è generico oppure di tipo particolare, precisamente Q-complesso, sottogruppo, sottogruppo normale.
Vengono caratterizzati e studiati in vario modo questi tipi di gruppi ed i teoremi fondamentali in proposito sono quelli contenuti in 2.3, 2.6, 3.2, 4.1.

Si indicano anche alcuni esempi illustrativi delle varie situazioni e si formula infine una congettura.

1. Gruppi semplici r.p. per vari tipi di complessi.

1.1. Ripetiamo che i gruppi G che si considereranno nel presente lavoro saranno sempre non abeliani (salvo avviso in contrario).
Diciamo che un gruppo G è *semplice rispetto alla permutabilità (r.p.)* (o alla *normalità debole*) se non esiste alcun complesso proprio H di G con $Z \subset H$ ed $H \lhd_d G$. Indicheremo con $\mathscr{S}$ la classe dei gruppi *semplici r.p.*.
Diciamo che G è *semplice r.p. in relazione ai Q-complessi* (1) o più brevemente che è *Q-semplice r.p.* se non esiste alcun Q-complesso proprio H di G con $Z \subset H$ ed $H \lhd_d G$. Indichiamo con $\mathscr{S}_Q$ la classe dei gruppi che sono *Q-semplici r.p.*.

1.2. Diciamo che G è *semplice r.p. in relazione ai sottogruppi* o che G è *S-semplice r.p.* se non esiste alcun sottogruppo proprio S di G con $Z \subset S$ ed $S \lhd_d G$. Indichiamo con $\mathscr{S}_S$ la classe dei gruppi *S-semplici r.p.*.
Infine diciamo che G è *semplice r.p. in relazione ai sottogruppi normali* o che G è *SN-semplice r.p.* se non esiste alcun sottogruppo S proprio e normale in G con $Z \subset S$ ed $S \lhd_d G$. Indichiamo con $\mathscr{S}_{SN}$ la classe dei gruppi *SN-semplici r.p.*.

2. Gruppi semplici e Q-semplici r.p..

2.1. *Sia $G = \sum N_i$, $i \in I$ (ove gli N_i sono gli N-complessi minimali (2) di G):*

---

(1) Q-complesso H di un gruppo G è un sottoinsieme di elementi di G per cui $\forall h \in H$ si ha $\langle h \rangle \subseteq H$ (cfr. [3], 1).

(2) Dato un gruppo G si dice che $N \subseteq G$ è un *N-complesso* se $\forall n \in N \setminus Z$ si ha che N contiene tutti gli $x \in G$ con $[n, x] = 1$ (ovviamente $Z \subset N$). Si trova che $G = \sum N_i$ ove gli N_i sono gli N-complessi minimali di G (è $N_i \cap N_j = Z$ per $N_i \neq N_j$). Può accadere che G contenga un solo N-complesso minimale (coincidente con G stesso): in tal caso si dice che G è *irriducibile r.p.*, diversamente G è *riducibile r.p.* (cfr. [4], 1).

*G è Q-*semplice r.p. $\Longleftrightarrow$ *N_i è Q-*semplice r.p. *(nel senso che non esiste alcun complesso $H_i \subset N_i$ con $H_i \neq N_i$, $Z \subset H_i$, $H_i \lhd_d N_i$).*

$\Rightarrow$ Se H_i è un Q-complesso con $H_i \lhd_d N_i$, $H_i \neq N_i$ il Q-complesso di G dato da $H = H_i + \sum N_j$, $j \in I$, $j \neq i$ è proprio con $H \lhd_d G$, contro le ipotesi.

$\Leftarrow$ Se nelle ipotesi del secondo membro dell'enunciato esistesse un Q-complesso proprio $H \neq G$ con $Z \subset H$ ed $H \lhd_d G$ si avrebbe almeno un $H_i = N_i \cap H \neq N_i$, $H_i \lhd_d N_i$ contro le ipotesi.

2.2. *Un gruppo G sia Q-*semplice r.p. *e B sia una* base r.p.(3) *di G; diciamo $Q(B)$ il minimo Q-complesso $\supset Z$ che contiene $B \Rightarrow G = Q(B)$.*

Infatti $G = PExB$ (4) e $PEx(Q(B)) \supseteq PExB$ (cfr. [6], 3.5) per cui $PEx(Q(B)) = G$, $Q(B) \lhd_d G$ e date le ipotesi $G = Q(B)$.

Teorema 2.3. *G sia un gruppo Q-*semplice r.p. *con distanza $d(G) < \infty$* (5) $\Longleftrightarrow$ *G è* riducibile r.p. *e $G = \sum N_i$, $i \in I$ (ove gli N_i sono gli N-complessi minimali) con $N_i = \langle n_i \rangle$ tale che $|N_i/Z| = p_i$ numero primo.*

$\Rightarrow$ Sia G un gruppo *Q-semplice r.p.* con $d(G) < \infty$. Inoltre $G = \sum N_i$, $i \in I$ ove gli N_i sono gli N-complessi minimali di G (a priori ridotti ad uno solo nel caso in cui G sia *irriducibile r.p.*).
Sia $n_i \in N_i \setminus Z$: l'insieme $H_i = Z\langle n_i \rangle$ è un Q-complesso di N_i e poiché $d(G) = m < \infty$ sarà $d(N_i) \leq m$ e per 5.9 di [6] la distanza $\delta(H_i) \leq m$. Si ottiene (cfr. [6], 5) la catena (senza ripetizioni): $Z \subset H_i = M_{io} \lhd_d N_d(M_{io}) = M_{i1} \lhd_d \cdots \lhd_d M_{ij} \lhd_d \cdots \lhd_d M_{il} = N_i$ con $M_{ij} = N_d(M_{ij-1})$ (6) ed $l \leq m$ (ove $l = \delta(H_i)$); gli M_{ij} sono tutti dei Q-complessi.
Poiché G è *Q-semplice r.p.* è tale anche N_i per 2.1; si ha quindi $H_i = M_{io} = M_{i1} = \cdots M_{il} = N_i$ per cui $N_i = Z\langle n_i \rangle$ (ove $n_i \notin Z$).
Se $Z = \langle 1 \rangle$ consideriamo $N_i = \langle n_i \rangle$ e tenendo conto delle ipotesi n_i non può avere periodo infinito o diverso da un numero primo. Pertanto $|n_i| = p_i$ numero primo.
Se $Z \neq \langle 1 \rangle$ consideriamo il Q-complesso $K_i = Z \cup \langle n_i \rangle$ (unione insiemistica): si ha $K_i \lhd_d Z\langle n_i \rangle = N_i$; pertanto $K_i = N_i$ segue che gli elementi $zn_i (\forall z \in Z)$

---

(3) Qui chiamiamo *base r.p.* B di G un sottoinsieme di G tale che $B \cap Z = \emptyset$ e $\forall g \in G$ esiste $b \in B$ con $[b, g] = 1$ (cfr. [7], 2).

(4) $G = PExH$, come già detto, significa $H \lhd_d G$ e (con altra nomenclatura) $G = N_d(H)$ ove $N_d(H)$ è il *normalizzante debole* di H (cfr. [6], 1).

(5) Cfr. [4], 2.

(6) Il *normalizzante debole* $N_d(H)$ di un sottoinsieme H di G è l'insieme di tutti gli elementi di G che commutano con un qualche $h \in H \setminus Z$; si nota inoltre che $N_d(H)$ è un Q-complesso qualunque sia il sottoinsieme $H \supset Z$.

devono appartenere a Z o ad $\langle n_i \rangle$: ora $zn_i \notin Z$ poiché $n_i \notin Z$. Quindi $zn_i \in \langle n_i \rangle$ e $z \in \langle n_i \rangle$ per cui $Z = \langle n_i^{p_i} \rangle$ $\forall i \in I$ con $|N_i/Z| = p_i$ numero primo (diversamente $N_i = Z\langle n_i \rangle = \langle n_i \rangle$ non sarebbe *Q-semplice r.p.*). Poiché N_i risulta abeliano e si suppone G non abeliano, il gruppo G deve essere *riducibile r.p.*.

$\Leftarrow$ Valgano ora le ipotesi contenute nel secondo membro dell'enunciato. Poiché in ogni caso N_i è abeliano (anzi ciclico) si ha $d(N_i) = 1$, $d(G) = 1$ e quindi $d(G) < \infty$. Vale la tesi in quanto ogni N_i non contiene Q-complessi propri contenenti Z (che sono sottogruppi - ciclici - di $\langle n_i \rangle$). Segue per 2.1 che G è *Q-semplice r.p.*.

2.4. Ovviamente per i gruppi *Q-semplici r.p.* indicati nel Teorema 2.3 gli elementi n_i costituiscono una *base r.p.* minimale banale (cfr. 2.8 di [7]).

2.5. *I gruppi G che sono Q*-semplici r.p. *sono gruppi in cui tutti i Q-complessi $H \supset Z$ sono* autonormalizzanti deboli.

Ricordiamo che un complesso H in un gruppo G si dice *autonormalizzante debole* se $N_d(H) = H$. Confrontando il risultato del Teorema 2.3 con il Teorema 2.10 di [6] si ha l'asserto.

Teorema 2.6. *Non esistono gruppi* semplici r.p. *cioè è vuota la classe $\mathscr{S}$.*

Sia G un gruppo *semplice r.p.*: esso è anche *Q-semplice r.p.* per cui è *riducibile r.p.* e $G = \sum N_i$, $N_i = \langle n_i \rangle$, $|N_i/Z| = p_i$ primo, $Z = \langle n_i^{p_i} \rangle$.
Supponiamo $Z = \langle 1 \rangle$: risulta $N_i = \langle n_i \rangle$ con $|n_i| = p_i$. Se $p_i \neq 2$ il complesso $H_i = \{1, n_i\}$ è proprio in N_i ed $H_i \lhd_d N_i$ contro le ipotesi. Quindi $|n_i| = 2$.
Sia ora $Z = \langle n_i^{p_i} \rangle \neq \langle 1 \rangle$. Si consideri il complesso $H_i = \{Z, n_i\}$: risulta $H_i \lhd_d N_i$ ove $H_i \neq N_i$ perché $n_i^{-1} \neq n_i$ (diversamente sarebbe $n_i^2 = 1$ e $Z = \langle 1 \rangle$), $n_i^{-1} \notin Z$ (diversamente sarebbe $n_i \in Z$ contro le ipotesi).
Quindi G può essere *semplice r.p.* solo se $G = \sum N_i$ con $|n_i| = 2$ (e $Z = \langle 1 \rangle$).
Ciò significa che gli elementi $\neq 1$ di G hanno periodo 2 per cui per $a, b \in G \setminus \langle 1 \rangle$ da $(ab)^2 = 1$ segue $ab = ba$ cioè G è abeliano contro le ipotesi, donde l'asserto.

3. Gruppi S-semplici r.p..

3.1. $G \in \mathscr{S}_S \iff$ *per qualunque sottogruppo proprio $S \subset G$ con $Z \subset S$ qualcuno degli automorfismi interni di G non fissa nessun elemento di $S \setminus Z$.*

L'affermazione non è altro che una rilettura della definizione di $G = PExS$ (cfr. [7], 1.2).

Teorema 3.2. *$G \in \mathscr{S}_S \iff$ una* base r.p. *B di G è tale che $G = \langle B \cup Z \rangle$ (l'unione è insiemistica).*

$\Rightarrow$ Sia $S = \langle B \cup Z \rangle$ il sottogruppo generato dall'insieme B *base r.p.* e da Z. Si ha $G = PExB \subseteq PEx(B \cup Z) \subseteq PEx(\langle B \cup Z \rangle)$ cioè $G = PE \times S$ e per l'ipotesi $S = G$.

$\Leftarrow$ Sia $S \supset Z$ un sottogruppo proprio di G tale che $PExS = G$. Ora $S = (S \setminus Z) \cup Z$ ove $S \setminus Z$ è una *base r.p.*. Per l'ipotesi attuale $G = \langle (S \setminus Z) \cup Z \rangle = \langle S \rangle$ cioè $G = S$ e $G \in \mathscr{S}_S$.

Corollario 3.3. *I gruppi $G \in \mathscr{S}_S$ con $Z(G) = \langle 1 \rangle$ sono tutti e soli quelli per cui una* base r.p. *è anche* un sistema di generatori *di G* (7).

Segue da 3.2 in quanto ora $G = \langle B \cup Z \rangle$ diventa $G = \langle B \rangle$.

3.4. *G sia un gruppo* irriducibile r.p.: *$G \in \mathscr{S}_S \Rightarrow \forall g \in G \setminus Z$ si ha $d(g) \geq 3$ (e quindi $d(G) \geq 3$).*

Per $g \in G \setminus Z$ non può essere $d(g) = 1$ perché si avrebbe $g \in Z$. Sia $d(g) = 2$: in tal caso $G = PEx(N^{(1)}(g))$ ove $S = N^{(1)}(g)$, normalizzante di g in G, è un sottogruppo proprio di G e ciò contro l'ipotesi. Segue $d(g) \geq 3$, $\forall g \in S \setminus Z$ (e quindi $d(G) \geq 3$).

Teorema 3.5. *G sia un gruppo* riducibile r.p. *cioè $G = \sum N_i$ (con $i \in I$ ed N_i dati dagli N-complessi minimali): $G \in \mathscr{S}_S \Rightarrow$ per ogni sottogruppo proprio S (con $Z \subset S$) esiste un qualche N_i per cui $S \cap N_i = Z$ oppure $PEx(S \cap N_i) = N_d(S \cap N_i) \neq N_i$ (se $S \cap N_i \neq Z$).*

$\Rightarrow$ Se per un sottogruppo S con $Z \subset S$ si ha sempre $PE \times S \neq G$ dovrà essere $S \cap N_i = Z$ oppure $PEx(S \cap N_i) \neq N_i$ per qualche N_i.

$\Leftarrow$ Sia G del tipo detto e valga l'ipotesi espressa dal secondo membro dell'enunciato. Ciò comporta che per qualche N_i si abbia $PEx(S \cap N_i) = N_d(S \cap N_i) \neq N_i$ se $S \cap N_i \neq Z$ oppure $S \cap N_i = Z$. Segue $N_d(S) \neq G$, $\forall$ sottogruppo $S \subset Z$, quindi $G \in \mathscr{S}_S$.

Corollario 3.6. *$G = \sum N_i$ sia un gruppo* riducibile r.p. *c.s. in cui ogni sottogruppo proprio S con $Z \subset S$ è contenuto in un N-complesso proprio $\Rightarrow G \in \mathscr{S}_S$.*

---

(7) Si nota che questo *sistema di generatori* come quello indicato in 3.2 è di solito sovrabbondante. Comunque se $G \in \mathscr{S}_S$ usando 3.2 e 3.3 si possono ottenere *sistemi di generatori* per G, soprattutto nel caso di *G riducibile r.p.*.

Si ricorda che un N-complesso è unione insiemistica di N-complessi minimali (cfr [4], 2). Dall'ipotesi segue che per ogni sottogruppo S (con $Z \subset S$) si trova un qualche N-complesso minimale N_j^* per cui $N_j^* \cap S = Z$. Da 3.5 segue la tesi.

3.7. *G sia un gruppo (non abeliano) con $d(G) = 1$ (cioè G è* riducibile r.p. *con complessi minimali N_i dati da sottogruppi abeliani di G (cfr.* [5], 2.1*). Sono equivalenti le seguenti proprietà.*

i) $G \in \mathscr{S}_S$;

ii) *$\forall$ sottogruppo proprio $S \subset G$ (con $Z \subset S$) è contenuto in un N-complesso proprio;*

iii) *un qualsiasi insieme $M = \{m_i\}$, $i \in I$ ove $m_i \in N_i \setminus Z$ (un solo m_i per ogni N_i e per il resto qualsiasi) è tale che $M \cup Z$ è un* sistema di generatori *per G.*

i) $\Longleftrightarrow$ ii) Deriva dalla proposizione 3.5 (con 3.6) poiché $d(N_i) = 1$ e non è possibile la situazione $N_i \cap S \neq Z$ con $N_d(S \cap N_i) \neq N_i$.
i) $\Rightarrow$ iii) Poiché N_i è abeliano ogni $M = \{m_i\}$ del tipo detto è una *base r.p.* di G e quindi per 3.2 si ha che $M \cup Z$ è un *sistema di generatori* di G.
iii) $\Rightarrow$ i) Una qualunque *base r.p.* B di G deve contenere almeno un elemento per ogni $N_i \setminus Z$. Siano $m_i \in B \cap N_i$ (uno per ogni N_i) ed $M = \{m_i\}$. Ora $M \cup Z \subseteq B \cup Z$ ed $M \cup Z$ è un *sistema di generatori* per G; è anche tale $B \cup Z$ e quindi per 3.2 segue i).

Teorema 3.8. *Sia G un gruppo localmente finito che possegga un N-complesso minimale $N_1 \neq G$ dato da un sottogruppo per cui N_1/Z è un p-gruppo ciclico e $\forall x \in N_1 \setminus Z$ ammette chiusura normale $x^G = G \Rightarrow G \in \mathscr{S}_S$.*

Per l'ipotesi N_1 non è normale in G ed ha coniugati in numero maggiore ad 1 (finito od infinito): questi sono anch'essi N-complessi minimali di G. Sarà $N_1 = Z\langle n_1\rangle$ con $n_1^{p^\alpha} \in Z$ (ove p è un numero primo e p^α è il minimo esponente positivo per cui ciò accade). Detti n_j $(j \in J)$ i coniugati di n_1 in G gli $N_j = Z\langle n_j\rangle$ sono N-complessi minimali di G; sarà $n_j^{p^\alpha} = n_1^{p^\alpha} \in Z$.
Sia $S \subset G$ (con $Z \subset S$) un sottogruppo proprio tale che $G = PExS$. Un tale S deve intersecare tutti gli N_j fuori di Z:

$$N_j \cap S = Z\langle n_j^{p^{\alpha_j}}\rangle \neq Z \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha_j < \alpha.$$

Sia β il massimo degli α_j ove $0 \leq \beta < \alpha$. Si ha

$$S \supseteq Z\langle n_j^{p^\beta} / j \in J\rangle = \mathscr{M}$$

(ove $n_j^{p^\beta} \notin Z$).
Ora $\mathscr{M} \lhd G$ ed $\mathscr{M} \supseteq Z\langle n^{p^\beta}\rangle^G$: per l'ipotesi $\mathscr{M} = G$ e quindi $S = G$ donde $G \in \mathscr{S}_S$.

Corollario 3.9. *Sia G un gruppo finito semplice che ha un N-complesso minimale N_1 proprio dato da un p-gruppo ciclico (che risulta p-Sylow)* $\Rightarrow$ $G \in \mathscr{S}_S$.

L'N-complesso N_1 che è un p-sottogruppo di G sarà contenuto in un p-Sylow P_1. Ora P_1 è *connesso r.p.* in quanto i suoi elementi commutano con gli elementi del centro (proprio) di P_1; quindi P_1 è contenuto in un N-complesso minimale per cui $N_1 = P_1$.
La proprietà segue da 3.8 perché, se G è semplice, $\forall x \in G \setminus \langle 1\rangle$ dà $x^G = G$ (ove x^G è la chiusura normale di x in G).

4. Gruppi SN-semplici r.p..

Teorema 4.1. $G \in \mathscr{S}_{SN} \iff$ *ogni* base r.p. *B normale* ([8]) *in G è tale che* $G = \langle B \cup Z\rangle$.

La verifica è analoga a quella di 3.2.

Corollario 4.2. $G \in \mathscr{S}_{SN} \iff$ *ogni* base r.p. *B è tale che* $G = \langle B^G \cup Z\rangle$.

$\Rightarrow$ Da $G \in \mathscr{S}_{SN}$ segue $G = \langle B^G \cup Z\rangle$ per 4.1 in quanto $B^G \supseteq B$ è una *base r.p.* di G con $B^G \lhd G$.
$\Leftarrow$ Sia B una *base r.p.* di G, anche B^G è una base r.p. per G; data l'ipotesi $G = \langle B \cup Z\rangle = \langle B^G \cup Z\rangle$ e quindi per 4.1 si ha $G \in \mathscr{S}_{SN}$.

Corollario 4.3. *I gruppi $G \in \mathscr{S}_{SN}$ con $Z = \langle 1\rangle$ sono tutti e solo quelli per cui una* base r.p. *normale in G è anche un* sistema di generatori *di G.*

Segue da 4.1 ed è proposizione analoga a 3.3.

4.4. *Sia G un gruppo tale che G/Z sia semplice (in particolare G sia semplice)* $\Rightarrow G \in \mathscr{S}_{SN}$.

I sottogruppi normali S di G risultano G stesso o contenuti in Z e quindi $G \in \mathscr{S}_{SN}$.

4.5. La classe $\mathscr{S}_{SN}$ contiene i gruppi indicati in 4.4 ed in particolare i gruppi semplici. Però in $\mathscr{S}_{SN}$ stanno altri gruppi([9]).

([8]) Cioè l'insieme B è *normale* in G secondo il solito significato ($B \lhd G$).

([9]) Per es. A_4 (che non appartiene alla classe suddetta) non è *estensione r.p.* del suo unico sottogruppo normale proprio, quindi $A_4 \in \mathscr{S}_{SN}$.

4.6. *$G \in \mathscr{S}_{SN} \iff G$ è privo di sottogruppi normali propri S con $S \supset Z$ oppure per ogni sottogruppo proprio $S \subset G$ con $S \supset Z, S \lhd G$ vi sono automorfismi interni di G senza punti fissi in $S \setminus Z$.*

Ciò segue ovviamente dalla definizione di $\mathscr{S}_{SN}$.

4.7. *G sia* riducibile r.p. *$G = \sum N_i$ (ove con N_i, $i \in I$, si indicano gli N-complessi minimali): $G \in \mathscr{S}_{SN} \iff$ per $\forall$ sottogruppo $S \lhd G$, $S \supset Z$ esiste un qualche N_i tale che $S \cap N_i = Z$ oppure $PEx(S \cap N_i) = N_d(S \cap N_i) \neq N_i$.*

Si verifica come l'analoga proposizione 3.5.

4.8. *Sia G un gruppo* riducibile r.p. *in cui ogni sottogruppo S con $S \lhd G$, $S \supset Z$ è contenuto in un N-complesso proprio $\Rightarrow G \in \mathscr{S}_{SN}$.*

Ciò segue ovviamente da 4.7 e la proposizione è analoga alla 3.6.

4.9. Notiamo che nella situazione di 4.8, se $S \lhd G$, $S \supset Z$ è $S \subseteq N$, ove N è un N-complesso proprio, si ha che $S \subseteq N^*$ ove N^* è un N-complesso (proprio) con $N^* \lhd G$.
Infatti se $S \lhd G$ si ha $S \subseteq N^g$, $\forall g \in G$ e quindi $S \subseteq \cap N^g = N^*$ $(g \in G)$ ove $N^* \lhd G$.

4.10. *Sia G un gruppo (non abeliano) con $d(G) = 1$ (cioè G è* riducibile r.p., *$G = \sum N_i$, $i \in I$ con N_i sottogruppi abeliani, cfr. 3.7).*
Sono equivalenti le seguenti proprietà:

i) $G \in \mathscr{S}_{SN}$;

ii) *$\forall$ sottogruppo proprio $S \lhd G$ (con $Z \subset S$) è contenuto in un N complesso proprio;*

iii) *ogni insieme $M^* = \{m_i\}$, $i \in I$ ove $m_i \in N_i \setminus Z$ (uno ed uno solo m_i per ogni N_i) con $M^* \lhd G$ è un* sistema di generatori *normale in G.*

È proprietà analoga alla 3.7, segue da 4.7, 4.8 e 4.1. In particolare nel caso in questione si inverte la 4.8.

Teorema 4.11. *Sia G un gruppo* riducibile r.p. *che ammette (almeno) un N-complesso minimale N_1 tale che $\forall x \in N_1 \setminus Z$ abbia chiusura normale x^G che coincide con $G \Rightarrow G \in \mathscr{S}_{SN}$.*

Sia S un sottogruppo di G con $S \lhd G$, $S \supset Z$ e sia $G = PExS$. Sarà $S \cap N_1 \neq Z$: vi è pertanto un $y \in (S \cap N_1) \setminus Z$ per cui $y^G = G$. Ora $S \supseteq y^G = G$, cioè $S = G$ e $G \in \mathscr{S}_{SN}$.

5. Gruppi particolari ed osservazioni.

5.1. *Sia G un gruppo di Frobenius $G = HK$ con $K \lhd G$ nucleo.*
$G \in \mathscr{S}_Q$ se e solo se gli ordini di H e K sono numeri primi.

La proprietà segue da 2.3 in quanto gli N-complessi minimali di G sono i sottogruppi K ed H^g. Il gruppo S_3 è del tipo suddetto.

5.2. *I gruppi di Tarski $T \in \mathscr{S}_Q$.*

Ricordiamo che tali T sono definiti come gruppi infiniti in cui tutti i sottogruppi propri hanno ordine primo (cfr. [8], p.420). Tali sottogruppi sono gli N-complessi minimali e la proprietà segue da 2.3.

5.3. *Sia $G = Q_{2^n}$ (con $n \geq 3$) il gruppo generalizzato dei quaternioni; si ha $Q_{2^n} \in \mathscr{S}_S$ ed in particolare $Q_8 \in \mathscr{S}_Q$ (ove Q_8 è il solito gruppo dei quaternioni).*

È $G = Q_{2^n} = \langle x, y / x^{2^{n-1}} = 1, y^2 = x^{2^{n-2}}, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$. Q_2n è *riducibile r.p.*, ha $Z = \langle y^2 \rangle$ e gli N-complessi minimali sono $N^* = \langle x \rangle$; $N_i = \langle yx^i \rangle, 0 \leq i < 2^{n-2}$.
$Q_{2^n} \in \mathscr{S}_S$ segue per es. da 3.2; infatti una *base r.p.* contiene almeno un elemento (fuori di Z) per ogni N-complesso minimale ed è (con Z) un *sistema di generatori* per G.
Se poi $n = 3$ è $|\langle x \rangle| = 4$, $|\langle y \rangle| = |\langle yx^i \rangle| = 4$, $|Z| = 2$ e quindi per 2.3 si ha $Q_8 \in \mathscr{S}_Q$.

5.4. *I gruppi diedrali finiti $G = D_{2n} \in \mathscr{S}_S$ ($n \geq 3$).*

Se n è primo od $n = 2m$ con m primo è $D_{2n} \in \mathscr{S}_Q$.
Si ha $G = D_{2n} = \langle x, y / |x| = n, |y| = 2, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$
i) Sia n dispari.
Si ha $Z = \langle 1 \rangle$ e gli N-complessi minimali sono $N^* = \langle x \rangle$; $N_i = \langle yx^i \rangle$, $0 \leq i < n$. Una *base r.p.* non può essere che del tipo $\{x^l, yx^i\}$ e questa è un *sistema di generatori* di G. Per 3.3 si ha $G \in \mathscr{S}_S$.
ii) Sia $n = 2m$ pari.
Si ha $Z = \langle x^m \rangle$ (ove $|Z| = 2$) e gli N-complessi minimali sono dati da $N^* = \langle x \rangle$; $N_j = \langle yx^j \rangle, 0 \leq j < m$. Da 3.2 segue $G \in \mathscr{S}_S$.
Se poi n è primo od m è primo da 2.3 segue $G \in \mathscr{S}_Q$.

5.5. *$G = A^*B$ sia il prodotto centrale (diretto in particolare) di due sottogruppi A, B non abeliani $\Rightarrow G \notin \mathscr{S}_S$ (e $G \notin \mathscr{S}_{SN}$).*

G è *irriducibile r.p.* con $Z(G) = Z(A)^* Z(B)$: si ha per es.

$$G = PEx(A^* Z(B))$$

e quindi $G \notin \mathscr{S}_S$ (e $G \notin \mathscr{S}_{SN}$). La proprietà segue anche da 3.4 in quanto $G = A^*B$ contiene elementi g con $d(g) = 2$.

5.6. Utilizzando l'osservazione 5.5 si trovano molti *gruppi nilpotenti periodici* (finiti) che non stanno in $\mathscr{S}_S$. Però i *p-gruppi finiti* G ad es. possono essere $G \in \mathscr{S}_S$ o anche $G \notin \mathscr{S}_S$.
Si ha infatti $Q_8 \in \mathscr{S}_S$ (anzi $Q_8 \in \mathscr{S}_Q$, cfr. 5.3) e $G = Q_8 \times Q_8 \notin \mathscr{S}_S$, cfr. 5.5 .

5.7. *Sia A_n un gruppo alterno* riducibile r.p. $\Rightarrow A_n \in \mathscr{S}_S$.

Secondo [1] 2, i gruppi A_n *riducibili r.p.* sono tutti e soli quelli con $n > 3$ ed almeno uno dei numeri n, $n-1$, $n-2$, primo. Sia ora p uno dei numeri primi fra i tre numeri n, $n-1$, $n-2$ per cui i sottogruppi ciclici C_p di A_n di ordine p sono N-complessi minimali. Per $n = 4$ si ha $p = 3$ per cui C_3 è un N-complesso minimale e per 3.8 risulta $A_4 \in \mathscr{S}_S$. Per $n > 4$ il gruppo A_n è semplice e si può usare 3.9 e concludere $A_n \in \mathscr{S}_S$.
Notiamo che i gruppi A_n con $n, n-1, n-2$ non primi sono *irriducibili r.p.* (cfr. [1], 2). Per questi non sembra facile decidere se stanno o meno in $\mathscr{S}_S$. Il primo gruppo alterno di questo tipo è A_{10}: esaminando la tavola dei suoi sottogruppi massimali sembra che $A_{10} \in \mathscr{S}_S$, comunque non si vede una risposta più generale.

5.8. *Si ha $PSL(2, q) \in \mathscr{S}_S$.*

Si verifica che per i gruppi $PSL(2, q)$ con $q = p^\alpha$ (p numero primo) vale la proprietà 3.6 donde la tesi.
In [4] 4.3, 4.5, 4.6 sono indicati gli N-complessi minimali di $PSL(2, q)$ nei vari casi ed in [2] 8.27, p. 213 sono dati i sottogruppi dello stesso $PSL(2, q)$. con un'analisi un pò minuta ed una verifica non immediata (che qui non riportiamo) si trova che i sottogruppi propri di $PSL(2, q)$ sono tutti contenuti rispettivamente in N-complessi propri.

5.9. *Sia G un gruppo semplice finito con $d(G) = 1$, $Z(G) = \langle 1 \rangle \Rightarrow G \in \mathscr{S}_S$.*

Per [4] 4.11, i gruppi G in questione sono tutti e soli i $PSL(2, 2^r)$, $r \geq 2$ e l'asserto segue da 5.8.

5.10. *Si ha $SL(n, F) \in \mathscr{S}_{SN}$ se $n \geq 2$, escluso $n = 2$ ed $|F| = 3$.*

Se $n > 2$, oppure $n = 2$ ed $|F| > 3$ i sottogruppi normali propri di $G = SL(n, F)$ stanno nel centro (cfr. [8], 3.2.8, p. 72) e quindi $SL(n, F) \in \mathscr{S}_{SN}$.
Se $n = 2$ ed $|F| = 2$ si ha $SL(2.2) \simeq S_3$ e se $n = 2$ ed $|F| = 3$ risulta $SL(2, 3) \simeq S_4$. Ora $S_3 \in \mathscr{S}_{SN}$, mentre $S_4 = PExA_4$ per cui $S_4 \notin \mathscr{S}_{SN}$ (cfr. [7], 6.10).

Osservazione 5.11. *Mostriamo che la proposizione 3.4 non può essere invertita nel senso:*

$$d(g) \geq 3, \ \forall g \in G \setminus Z \Rightarrow G \in \mathscr{S}_S.$$

Consideriamo $G = S_9$: tale gruppo è *irriducibile r.p.* (cfr. [1], 1.3, p. 91). Sappiamo anche che $G = PExA_9$ (cfr. [7], 6.10) per cui $G \notin \mathscr{S}_S$.
S_9 operi sulle lettere $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Sia $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8)$: si ha $|C(\sigma)| = 8$ cioè $N^{(1)}(\sigma) = C(\sigma) = \langle\sigma\rangle$. Sia $\eta \in S_9$ una sostituzione che muove 9: risulta $\eta \notin N^{(1)}(\sigma)$ ma neanche $\eta \in N^{(2)}(\sigma)$ (cfr. [4], 2); infatti gli elementi di $\langle\sigma\rangle$ $(\neq 1)$, che operano ancora tutti solo su $1, 2, \ldots, 8$, non possono commutare con η che opera su 9. Pertanto $d(\eta, \sigma) \geq 3$ e $d(\eta) \geq 3$. Se $\eta \neq 1$ e per il resto qualsiasi, tale η muove una qualche lettera (diciamola pure 9): per quanto detto sopra $d(\eta) \geq 3$.
Quindi $G = S_9$ è un gruppo *irriducibile r.p.* con $d(g) \geq 3 \ \forall g \in G \setminus Z$ e $G \notin \mathscr{S}_S$.

Osservazione 5.12. *Valgono le seguenti ovvie inclusioni*

$$\mathscr{S}_Q \subseteq \mathscr{S}_S \subseteq \mathscr{S}_{SN}$$

con $\mathscr{S}_Q \neq \mathscr{S}_S$. *Inoltre, detta* Σ *la classe dei gruppi semplici si ha*

$$\Sigma \subset \mathscr{S}_{SN} \quad \text{con} \quad \Sigma \neq \mathscr{S}_{SN} \quad e \quad \Sigma \neq \mathscr{S}_S.$$

Infatti $\mathscr{S}_Q \neq \mathscr{S}_S$ poiché ad es. $A_4 \in \mathscr{S}_S$, $A_4 \notin \mathscr{S}_Q$. $\Sigma \neq \mathscr{S}_{SN}$, $\Sigma \neq \mathscr{S}_S$ ancora perché $A_4 \in \mathscr{S}_{SN}$, $A_4 \in \mathscr{S}_S$, $A_4 \notin \Sigma$.

Le considerazioni precedenti ed i vari esempi esaminati (anche non qui riportati) inducono a formulare le seguenti congetture:
I) $\mathscr{S}_S = \mathscr{S}_{SN}$.
Se non vale la congettura I) in subordine si pone la congettura
II) $\sum \subset \mathscr{S}_S$.
Si può verificare la validità di tali congetture in particolari classi di gruppi ma sarebbe auspicabile poter decidere in generale.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Bianchi, *Permutabilità e distanza in alcune classi di gruppi,* Rend. Ist. Lomb., A 114 (1980), pp. 89-104.

[2] B. Huppert, *Enliche Gruppen I,* Springer, Berlin, 1983.

[3] C. Marchionna Tibiletti, *Su alcuni reticoli legati ad un gruppo,* Rend. Ist. Lomb., A 106 (1972), pp. 470-504.

[4] C. Marchionna Tibiletti, *Sulla distanza di un gruppo,* Rend. Ist. Lomb., A 112 (1978), pp. 181-191.

[5] C. Marchionna Tibiletti, *Sui gruppi a distanza $d \leq 2$,* B.U.M.I., 17 B(1980), pp. 14-32.

[6] C. Marchionna Tibiletti, *Un tipo di "normalità debole" in un gruppo,* Rend. Ist. Lomb., A 128 (1994), pp. 153-176.

[7] C. Marchionna Tibiletti, *Gruppi ottenuti per estensione rispetto ad un tipo di "normalità debole",* Rend. Ist. Lomb., A 130 (1996), to appear.

[8] D.J.S. Robinson, *A course in Theory of Groups,* Springer, New York, 1980.

Dipartimento di Matematica "F. Enriques",
Università di Milano,
Via C. Saldini 50,
20133 Milano (ITALY)