LE MATEMATICHE
Vol. LI (1996) – Supplemento, pp. 197-203

# SULLA MISURABILITA' DELLA FAMIGLIA DEI SISTEMI DI CILINDRO PARABOLICO, PUNTO E PIANO IN $A_3$

GIULIO SANTORO

*Alla memoria di Umberto Gasapina*

The family of system of parabolic cylinder, point and plane, in $A_3$, proves to be measurable.

Il cilindro abbia per direttrice la parabola non degenere, del piano $xy$, di equazione:

$$x^2 + 2ax + a^2y^2 + 2bx + 2cy + d = 0, \quad (ab - c \neq 0),$$

e per generatrici le rette di parametri direttori (non omogenei): $l, m, 1$. Allora l'equazione del cilindro parabolico sarà:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = x^2 + a^2y^2 + (l^2 + 2alm + a^2m^2)z^2 + 2axy - (2l + 2am)xz - \\ - (2al + 2a^2m)yz + 2bx + 2cy - 2(bl + cm)z + d = 0. \end{aligned}$$

Siano $x_1$, $y_1$, $z_1$ le coordinate del punto non appartenente al cilindro $\big(f(x_1, y_1, z_1) \neq 0\big)$.

---

Lavoro eseguito con il contributo del M.U.R.S.T. (40%, 60%).

*AMS 1980 Subject Classification*: Geometric probability, Stochastic geometry, Random sets, Random convex sets and integral geometry.
*AMS Classification*: 60D05, 52A22.

Sia $px + qy + rz + 1 = 0$ l'equazione del piano non parallelo alle generatrici né contenente il punto $(lp + mq + r \neq 0,\ px_1 + qy_1 + rz_1 + 1 \neq 0)$.
Sicché la famiglia dei sistemi di cilindro parabolico, punto e piano è rappresentata da:

$$
\begin{aligned}
&x^2 + a^2y^2 + (l^2 + 2alm + a^2m^2)z^2 + 2axy - (2l + 2am)xz - \\
&\quad - (2al + 2a^2m)yz + 2bx + 2cy - 2(bl + cm)z + d = 0, \\
&x = x_1, \\
&y = y_1, \\
&z = z_1, \\
&px + qy + rz + 1 = 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

I parametri della famiglia sono dodici: $a, b, c, d, l, m, x_1, y_1, z_1, p, q, r$.
Il gruppo massimo di invarianza della famiglia (1) è il gruppo affine dello spazio:

$$
\begin{aligned}
x &= a_1x' + b_1x' + c_1z' + d_1, \\
y &= a_2x' + b_2x' + c_2z' + d_2, \\
z &= a_3x' + b_3x' + c_3z' + d_3.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

I parametri del gruppo sono dodici: $a_i, b_i, c_i, d_i$ $(i = 1, 2, 3)$.
Applicando il gruppo (2) alla famiglia (1), si ottiene la nuova varietà:

$$
\begin{aligned}
&x'^2 + a'^2y'^2 + (l'^2 + 2a'l'm' + a'^2m'^2)z'^2 + 2a'x'y' - \\
&\quad - (2l' + 2a'm')x'z' - (2a'l' + 2a'^2m)y'z' + \\
&\quad + 2b'x' + 2c'y' - 2(b'l' + c'm')z' + d' = 0, \\
&x' = x'_1, \\
&y' = y'_1, \\
&z' = z'_1, \\
&p'x' + q'y' + r'z' + 1 = 0.
\end{aligned}
\tag{1'}
$$

dove, avendo posto:

$$
\begin{aligned}
T = a_1^2 + aa_2^2 + a_3^2(l^2 + 2alm + a^2m^2) + 2aa_1a_2 + \\
+ a_1a_3(-2al - 2am) + a_2a_3(-2al - 2a^2m),
\end{aligned}
$$

è:

$$a'^2 = \left[b_1^2 + a^2 b_2^2 + b_3^2(l^2 + 2alm + a^2m^2) + 2ab_1b_2 + b_1b_3(-2l - am) + \right.$$
$$\left. + b_2b_3(-2al - 2a^2m)\right]/T = F_1,$$
$$l'^2 + 2a'l'm' + a'^2m'^2 = \left[c_1^2 + a^2c_2^2 + c_3^2(l^2 + 2alm + a^2m^2) + 2ac_1c_2 + \right.$$
$$\left. + c_1c_3(-2l - am)c_2c_3(-2al - 2a^2m)\right]/T = F_2,$$
$$2a' = \left[2a_1b_1 + 2a^2a_2b_2 + 2a_3b_3(l^2 + 2alm + a^2m^2) + 2a(a_1b_2 + a_2b_1) - \right.$$
$$\left. - 2(l + am)(a_1b_3 + a_3b_1) - 2(l + am)(a_2b_3 + a_3b_2)\right]/T = F_3,$$
$$-2(l' + a'm') = \left[2a_1c_1 + 2a^2a_2c_2 + 2a_3c_3(l^2 + 2alm + a^2m^2) + \right.$$
$$+ 2a(a_1c_2 + a_2c_1) - 2(l + am)(a_1c_3 + a_3c_1) -$$
$$\left. - 2(l + am)(a_2c_3 + a_3c_2)\right]/T = F_4,$$
$$2a'(l' + a'm') = \left[2b_1c_1 + 2a^2b_2c_2 + 2b_3c_3(l^2 + 2alm + a^2m^2) + \right.$$
$$+ 2a(b_1c_2 + b_2c_1) - 2(l + am)(b_1c_3 + b_3c_1) -$$
$$\left. - 2(l + am)(b_2c_3 + b_3c_2)\right]/T = F_5,$$
$$2b' = \left[2a_1d_1 + 2a^2a_2d_2 + 2a_3d_3(l^2 + 2alm + a^2m^2) + 2a(a_1d_2 + a_2d_1) - \right.$$
$$\left. - 2(l + am)(a_1d_3 + a_3d_1) - 2(l + am)(a_2d_3 + a_3d_2)\right]/T = F_6,$$
$$2c' = \left[2b_1d_1 + 2a^2b_2d_2 + 2b_3d_3(l^2 + 2alm + a^2m^2) + 2a(b_1d_2 + b_2d_1) - \right.$$
$$\left. - 2(l + am)(b_1d_3 + b_3d_1) - 2(l + am)(b_2d_3 + b_3d_2)\right]/T = F_7,$$
$$-2(b'l' + c'm') = \left[2c_1d_1 + 2a^2c_2d_2 + 2b_3d_3(l^2 + 2alm + a^2m^2) + \right.$$
$$+ 2a(c_1d_2 + c_2d_1) - 2(l + am)(c_1d_3 + c_3d_1) -$$
$$\left. - 2(l + am)(c_2d_3 + c_3d_2)\right]/T = F_8,$$
$$d' = \left[d_1^2 + a^2d_2^2 + d_3^2(l^2 + 2alm + a^2m^2) + 2ad_1d_2 + \right.$$
$$\left. + d_1d_3(-2l - am) + d_2d_3(-2al - 2a^2m)\right]/T = F_9,$$

$$x_1' = \begin{vmatrix} x_1 - d_1 & b_1 & c_1 \\ y_1 - d_2 & b_2 & c_2 \\ z_1 - d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$y_1' = \begin{vmatrix} a_1 & x_1 - d_1 & c_1 \\ a_2 & y_1 - d_2 & c_2 \\ a_3 & z_1 - d_3 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$z_1' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x_1 - d_1 \\ a_2 & b_2 & y_1 - d_2 \\ a_3 & b_3 & z_1 - d_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$p' = (pa_1 + qa_2 + ra_3) : (pd_1 + qd_2 + rd_3 + 1),$$
$$q' = (pb_1 + qb_2 + rb_3) : (pd_1 + qd_2 + rd_3 + 1),$$
$$r' = (pc_1 + qc_2 + rc_3) : (pd_1 + qd_2 + rd_3 + 1).$$

Dall'espressione eguagliata ad $F_4$, e da quella eguagliata ad $F_8$, si ricavano:

$$l' = (F_3F_8 - F_4F_7) : (2F_7 - F_3F_6),$$
$$m' = (F_4F_6 - 2F_8) : (2F_7 - F_3F_6).$$

Pertanto il gruppo isomorfo a (2) è dato da:

$$(2') \qquad \begin{aligned} a' &= F_3 : 2, \\ b' &= F_6 : 2, \\ c' &= F_7 : 2, \\ d' &= F_9, \\ l' &= (F_3F_8 - F_4F_7) : (2F_7 - F_3F_6), \\ m' &= (F_4F_6 - 2F_8) : (2F_7 - F_3F_6). \end{aligned}$$

$$x_1' = \begin{vmatrix} x_1 - d_1 & b_1 & c_1 \\ y_1 - d_2 & b_2 & c_2 \\ z_1 - d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$y_1' = \begin{vmatrix} a_1 & x_1 - d_1 & c_1 \\ a_2 & y_1 - d_2 & c_2 \\ a_3 & z_1 - d_3 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$z_1' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x_1 - d_1 \\ a_2 & b_2 & y_1 - d_2 \\ a_3 & b_3 & z_1 - d_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$p' = (pa_1 + qa_2 + ra_3) : (pd_1 + qd_2 + rd_3 + 1),$$
$$q' = (pb_1 + qb_2 + rb_3) : (pd_1 + qd_2 + rd_3 + 1),$$
$$r' = (pc_1 + qc_2 + rc_3) : (pd_1 + qd_2 + rd_3 + 1).$$

I coefficienti $\xi_1^k$ delle trasformazioni infinitesime sono raccolti nella seguente tabella:

$$\xi_1^1 = -a,\ \xi_1^2 = 1,\ \xi_1^3 = 0,\ \xi_1^4 = 0,\ \xi_1^5 = -a^2,\ \xi_1^6 = a,$$
$$\xi_1^7 = 0,\ \xi_1^8 = 0,\ \xi_1^9 = a(l+am),\ \xi_1^{10} = -(l+am),\ \xi_1^{11} = 0,\ \xi_1^{12} = 0,$$
$$\xi_2^1 = -b,\ \xi_2^2 = 0,\ \xi_2^3 = 0,\ \xi_2^4 = 1,\ \xi_2^5 = c-2ab,\ \xi_2^6 = 0,$$
$$\xi_2^7 = 0,\ \xi_2^8 = a,\ \xi_2^9 = bl-cm+2abm,\ \xi_2^{10} = 0,\ \xi_2^{11} = 0,$$
$$\xi_2^{12} = -(l+am),$$
$$\xi_3^1 = -2c,\ \xi_3^2 = b,\ \xi_3^3 = 0,\ \xi_3^4 = a,\ \xi_3^5 = -2ac,\ \xi_3^6 = c,$$
$$\xi_3^7 = 0,\ \xi_3^8 = a^2,\ \xi_3^9 = 2c(l+am),\ \xi_3^{10} = -(bl+cm),\ \xi_3^{11} = 0,$$
$$\xi_3^{12} = -a(l+am),$$
$$\xi_4^1 = -2d,\ \xi_4^2 = 0,\ \xi_4^3 = 0,\ \xi_4^4 = 2b,\ \xi_4^5 = -2ad,\ \xi_4^6 = 0,$$
$$\xi_4^7 = 0,\ \xi_4^8 = 2c,\ \xi_4^9 = 2c(l+am),\ \xi_4^{10} = 0,\ \xi_4^{11} = 0,$$
$$\xi_4^{12} = -2(bl+cm),$$
$$\xi_5^1 = -l,\ \xi_5^2 = -m,\ \xi_5^3 = -1,\ \xi_5^4 = 0,\ \xi_5^5 = 0,\ \xi_5^6 = 0,$$
$$\xi_5^7 = 0,\ \xi_5^8 = 0,\ \xi_5^9 = l^2,\ \xi_5^{10} = lm,\ \xi_5^{11} = l,\ \xi_5^{12} = 0,$$
$$\xi_6^1 = 0,\ \xi_6^2 = 0,\ \xi_6^3 = 0,\ \xi_6^4 = 0,\ \xi_6^5 = -l,\ \xi_6^6 = -m,$$
$$\xi_6^7 = -1,\ \xi_6^8 = 0,\ \xi_6^9 = lm,\ \xi_6^{10} = m^2,\ \xi_6^{11} = m,\ \xi_6^{12} = 0,$$
$$\xi_7^1 = -x_1,\ \xi_7^2 = -y_1,\ \xi_7^3 = -z_1,\ \xi_7^4 = -1,\ \xi_7^5 = 0,\ \xi_7^6 = 0,$$
$$\xi_7^7 = 0,\ \xi_7^8 = 0,\ \xi_7^9 = 0,\ \xi_7^{10} = 0,\ \xi_7^{11} = 0,\ \xi_7^{12} = 0,$$
$$\xi_8^1 = 0,\ \xi_8^2 = 0,\ \xi_8^3 = 0,\ \xi_8^4 = 0,\ \xi_8^5 = -x_1,\ \xi_8^6 = -y_1,$$
$$\xi_8^7 = -z_1,\ \xi_8^8 = -1,\ \xi_8^9 = 0,\ \xi_8^{10} = 0,\ \xi_8^{11} = 0,\ \xi_8^{12} = 0,$$
$$\xi_9^1 = 0,\ \xi_9^2 = 0,\ \xi_9^3 = 0,\ \xi_9^4 = 0,\ \xi_9^5 = 0,\ \xi_9^6 = 0,$$
$$\xi_9^7 = 0,\ \xi_9^8 = 0,\ \xi_9^9 = -x_1,\ \xi_9^{10} = -y_1,\ \xi_9^{11} = -z_1,\ \xi_9^{12} = -1,$$
$$\xi_{10}^1 = p,\ \xi_{10}^2 = 0,\ \xi_{10}^3 = 0,\ \xi_{10}^4 = -p^2,\ \xi_{10}^5 = q,\ \xi_{10}^6 = 0,$$
$$\xi_{10}^7 = 0,\ \xi_{10}^8 = -pq,\ \xi_{10}^9 = r,\ \xi_{10}^{10} = 0,\ \xi_{10}^{11} = 0,\ \xi_{10}^{12} = -pr,$$
$$\xi_{11}^1 = 0,\ \xi_{11}^2 = p,\ \xi_{11}^3 = 0,\ \xi_{11}^4 = -pq,\ \xi_{11}^5 = 0,\ \xi_{11}^6 = q,$$
$$\xi_{11}^7 = 0,\ \xi_{11}^8 = -q^2,\ \xi_{11}^9 = 0,\ \xi_{11}^{10} = r,\ \xi_{11}^{11} = 0,\ \xi_{11}^{12} = -pq,$$

$$\xi^1_{12}=0,\ \xi^2_{12}=0,\ \xi^3_{12}=p,\ \xi^4_{12}=-pr,\ \xi^5_{12}=0,\ \xi^6_{12}=0,$$
$$\xi^7_{12}=q,\ \xi^8_{12}=-qr,\ \xi^9_{12}=0,\ \xi^{10}_{12}=0,\ \xi^{11}_{12}=r,\ \xi^{12}_{12}=-r^2.$$

Il corrispondente sistema di Deltheil è quindi costituito dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases}
a\dfrac{\partial\Phi}{\partial a}+b\dfrac{\partial\Phi}{\partial b}+2c\dfrac{\partial\Phi}{\partial c}+2d\dfrac{\partial\Phi}{\partial d}+l\dfrac{\partial\Phi}{\partial l}+x_1\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1}-p\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}=-7\Phi,\\
\dfrac{\partial\Phi}{\partial a}+b\dfrac{\partial\Phi}{\partial c}-m\dfrac{\partial\Phi}{\partial l}-y_1\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1}+p\dfrac{\partial\Phi}{\partial q}=0,\\
\dfrac{\partial\Phi}{\partial l}+z_1\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1}-p\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}=0,\\
\dfrac{\partial\Phi}{\partial b}+a\dfrac{\partial\Phi}{\partial c}+2b\dfrac{\partial\Phi}{\partial d}-\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1}-p^2\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}-pq\dfrac{\partial\Phi}{\partial q}-pr\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}=4p\Phi,\\
a^2\dfrac{\partial\Phi}{\partial a}+(2ab-c)\dfrac{\partial\Phi}{\partial b}+2ac\dfrac{\partial\Phi}{\partial c}+2ad\dfrac{\partial\Phi}{\partial d}+\\
\qquad+l\dfrac{\partial\Phi}{\partial m}+x_1\dfrac{\partial\Phi}{\partial y_1}-q\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}=-8a\Phi,\\
a\dfrac{\partial\Phi}{\partial a}+c\dfrac{\partial\Phi}{\partial c}-m\dfrac{\partial\Phi}{\partial m}-y_1\dfrac{\partial\Phi}{\partial y_1}+q\dfrac{\partial\Phi}{\partial q}=-\Phi,\\
\dfrac{\partial\Phi}{\partial m}+z_1\dfrac{\partial\Phi}{\partial y_1}-q\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}=0,\\
a\dfrac{\partial\Phi}{\partial b}+a^2\dfrac{\partial\Phi}{\partial c}+2c\dfrac{\partial\Phi}{\partial d}-\dfrac{\partial\Phi}{\partial y_1}-pq\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}-q^2\dfrac{\partial\Phi}{\partial q}-qr\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}=4q\Phi,\\
a(l+am)\dfrac{\partial\Phi}{\partial a}+(bl-cm+2abm)\dfrac{\partial\Phi}{\partial b}+2c(l+am)\dfrac{\partial\Phi}{\partial c}+\\
\qquad+2d(l+am)\dfrac{\partial\Phi}{\partial d}+l^2\dfrac{\partial\Phi}{\partial l}+lm\dfrac{\partial\Phi}{\partial m}-x_1\dfrac{\partial\Phi}{\partial z_1}+r\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}=-(7l+6al)\Phi,\\
(l+am)\dfrac{\partial\Phi}{\partial a}+(bl+cm)\dfrac{\partial\Phi}{\partial c}-lm\dfrac{\partial\Phi}{\partial l}-m^2\dfrac{\partial\Phi}{\partial m}+y_1\dfrac{\partial\Phi}{\partial z_1}-r\dfrac{\partial\Phi}{\partial q}=m\Phi,\\
l\dfrac{\partial\Phi}{\partial l}+m\dfrac{\partial\Phi}{\partial m}-z_1\dfrac{\partial\Phi}{\partial z_1}+r\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}=-2\Phi,\\
(l+m)\dfrac{\partial\Phi}{\partial b}+a(l+am)\dfrac{\partial\Phi}{\partial c}+2(bl+cm)\dfrac{\partial\Phi}{\partial d}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial z_1}+\\
\qquad+pr\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}+qr\dfrac{\partial\Phi}{\partial q}+r^2\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}=-4r\Phi.
\end{cases}$$

Tale sistema ammette, a meno di constanti moltiplicative, l'unica soluzione non banale:

$$\Phi=(ab-c)^{-2}(lp+mq+r)^{-3}(px_1+qy_1+rz_1+1)^{-1}\cdot f(x_1,y_1,z_1)^{-1}.$$

Ciò basta, stante la prima condizione di Stoka, per concludere con il

**Teorema.** *La famiglia dei sistemi di cilindro parabolico, punto e piano, in posizione generica in $A_3$ è misurabile, e la sua misura elementare è:*

$$\frac{da \wedge db \wedge dc \wedge \ldots \wedge dp \wedge dq \wedge dr}{|ab - c|^2 \cdot |lp + mq + r|^3 \cdot |px_1 + qy_1 + rz_1 + 1| \cdot |f(x_1, y_1, z_1)|}.$$

## BIBLIOGRAFIA


[1] R. Detheil, *Probabilités géométriques,* Gautier-Villars, Paris, 1926.

[2] G. Santoro, *Sulla misurabilità di alcune famiglie di sistemi di cilindro e coppia di piani paralleli in $A_3$,* Scritti in onore di Giovanni Melzi, Vita e Pensiero, Milano, 1994.

[3] G. Santoro, *Sulla misurabilità della famiglia dei sistemi di punto, retta e piano nello spazio affine $A_3$,* Atti IV Conv. Ital. di Geom. Integrale, Probabilità geometriche, Corpi convessi, Bari 1994, in suppl. Rend. Circ. Mat. di Palermo, 38 (1995).

[4] M.I. Stoka, *Masura unei multimi de varietati dintr-un spatiu $R_n$,* Bul. St. Acad. R.P.R., 7 (1955).

[5] M.I. Stoka, *Geometria integrale in uno spazio euclideo $E_n$,* Boll. Un. Mat. Ital., 13-4 (1958).

[6] M.I. Stoka, *Géométrie Intégrale,* Mem. Sci. Math., 165, Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[7] M.I. Stoka, *Géométrie Intégrale dans l'espace prjectif $P_n$,* Conferenze Sem. Mat. Univ. Bari, 172 (1979).



*Dipartimento di Matematica,*
*Politecnico di Milano,*
*Via Bonardi 9,*
*20133 Milano (ITALY)*