LE MATEMATICHE
Vol. L (1995) – Fasc. II, pp. 273-283

SUI Q-ARCHI COMPLETI IN PIANI PROIETTIVI DI ORDINE Q PARI

ROSA STANGARONE

Let π_q be a non desarguesian projective plane of even order q containing a complete q-arc K. Assume that K admits a point P such that there are exactly $q - h$ (h even, $4 \leq h \leq q - 6$) tangents to K through P. In this paper first we prove that the maximum index of any further point of π_q is $2h$, then we study the q-arcs such that any point of π_q has index 0, 2, 4 or $2h$ and finally we obtain bounds for the order of π_q.

1. Introduzione.

Si denota con K un q-arco completo di un piano proiettivo non desarguesiano π_q di ordine q pari e si dice indice di un punto del piano il numero delle tangenti a K passanti per P.

Se con t_{2j} ($j = 0, \dots, q/2$) si indica il numero dei punti del piano di indice $2j$, essendo K completo, risulta $t_q = 0$; inoltre gli interi t_{2j} soddisfano alle ben note equazioni dei caratteri [7]. Risultati dovuti a Tallini [7] e Zanella [8] assicurano la non esistenza in π_q di punti di indice $q - 2$ nonchè l'esistenza di al più un punto di indice $q - 4$ in piani di ordine pari $q > 12$. Inoltre è stato recentemente dimostrato da R. Stangarone e A. Terrusi [5] che l'esistenza di un punto di indice $q - 4$ in piani di ordine pari $q \geq 16$ implica che l'ordine del piano sia $q \leq 44$.

Entrato in Redazione il 23 settembre 1995.

Nella presente nota si studiano alcuni q-archi completi di π_q per i quali esiste esattamente un punto di indice $q-h$, h pari, $4 \leq h \leq q-6$ con $q > 3h$, generalizzando risultati precedentemente ottenuti in [4].

2. Sui q-archi completi di π_q con $t_{q-h} \geq 1$, h pari.

Sia K un q-arco di π_q, q pari, tale che $t_{q-h} \geq 1$, h pari, $4 \leq h \leq q-6$. Proviamo la seguente

Proposizione 1. *Se t è una retta tangente a K passante per un punto P_{q-h} di indice $q-h$, i punti di t sono di indice al più $h+2$. Inoltre se una siffatta retta t contiene un punto di indice $h+2$, esso è unico e tutti gli altri punti di t distinti da P_{q-h} hanno indice 2.*

Dimostrazione. Dalle equazioni dei caratteri [7] si ha:

$$(1) \qquad \begin{aligned} u_2 + u_4 + \sum_{s=3}^{(q-h)/2} u_{2s} &= q \\ u_2 + 3u_4 + \sum_{s=3}^{(q-h)/2} (2s-1)u_{2s} &= q+h \end{aligned}$$

da cui sottraendo si ottiene:

$$(2) \qquad u_4 + \sum_{s=3}^{(q-h)/2} (s-1)u_{2s} = h/2.$$

Quindi necessariamente $2s \leq h+2$. Inoltre $u_{h+2} \leq 1$ e se $u_{h+2} = 1$ allora tutti gli altri punti di t hanno indice 2, cioè

$$u_{2s} = 0 \quad \text{per ogni} \quad s \neq 1, (h+2)/2\,.$$

Proposizione 2. *I punti di π_q distinti da P_{q-h} hanno al più indice $2h$, cioè*

$$t_{2s} = 0 \quad \textit{per ogni} \quad s > h.$$

Dimostrazione. Si supponga che P_{2s} sia un punto di indice $2s(s > h)$ e sia v una retta per P_{2s} non tangente K e non passante per P_{q-h}. Su essa vi sono almeno $q-h$ punti di indice ≥ 2 e cioè i $q-h$ punti di intersezione con le $q-h$ tangenti per P_{q-h}. Tali punti, per la Proposizione 1, sono tutti distinti da P_{2s} e quindi da questi $q-h$ punti e da P_{2s} escono almeno

$$2(q-h) + 2s > 2q$$

rette tangenti e questo è assurdo.

Proposizione 3. *Se $q > 3h$, allora esiste al più un punto di indice $q - h$, cioè $t_{q-h} = 0$ ovvero $t_{q-h} = 1$.*

Dimostrazione. Infatti supposto $t_{q-h} \geq 2$ e indicato con P_{q-h} un punto di indice $q - h$, per la Proposizione 2 ogni altro punto ha indice $\leq 2h$, onde considerato un ulteriore punto P'_{q-h} di indice $q - h$ deve verificarsi che $q - h \leq 2h$ da cui $q \leq 3h$ contro l'ipotesi.

Supposto dunque $q > 3h$, $h \geq 4$ e $t_{q-h} = 1$ i caratteri dell'arco sono t_{2s}, $s = 0, \dots, h$.

D'ora in poi supponiamo che $t_{2s} = 0$ per ogni $s = 3, 4, \dots h-1$ e studiamo quindi i q-archi completi i cui soli caratteri dell'arco sono

$$t_0, t_2, t_4, t_{2h} \text{ e } t_{q-h} = 1.$$

In queste ipotesi dalla (2) segue facilmente il seguente

Lemma 0. *Su ciascuna tangente per P_{q-h} ci sono esattamente $h/2$ punti di indice 4 e tutti gli altri punti hanno indice 2.*

Inoltre il sistema dei caratteri diventa

$$\begin{aligned} & t_0 + t_2 + t_4 + t_{2h} + 1 = q^2 + q + 1 \\ (3) \qquad & t_2 + 2t_4 + ht_{2h} + (q - h)/2 = q(q + 1) \\ & t_2 + 6t_4 + h(2h - 1)t_{2h} + (q - h)(q - h - 1)/2 = q(2q - 1) \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{aligned} & t_0 = (q^2 + 2(h + 1)q - h^2 - 6h - 4(h^2 - 3h + 2)t_{2h})/8 \\ (4) \qquad & t_2 = (3q^2 - 2(h - 2)q + h^2 + 4h + 4h(h - 2)t_{2h})/4 \\ & t_4 = (q^2 + 2(h - 1)q - h^2 - 2h - 4h(h - 1)t_{2h})/8. \end{aligned}$$

Al fine di studiare tali q-archi completi distinguiamo i 3 casi:

a) $t_{2h=0}$ b) $t_{2h} = 1$ c) $t_{2h} \geq 2$.

3. Caso $t_{2h} = 0$.

Proposizione 4. *Se K è un q-arco completo di π_q, q pari, che ammette un punto di indice $q-h(h \geq 4, q > 3h)$ e tale che $t_{2s} = 0$ per $s = 3, \ldots, h$, allora*

$$q \leq 2(h+1) + \sqrt{[4(h+1)^2 - h^2]}. \tag{5}$$

Dimostrazione. Se $t_{2h} = 0$ dalle (4) si ottiene

$$\begin{aligned} t_0 &= (q^2 + 2(h+1)q - h^2 - 6h)/8 \\ t_2 &= (3q^2 - 2(h-2)q + h^2 + 4h)/4 \\ t_4 &= (q^2 + 2(h-1)q - h^2 - 2h)/8. \end{aligned} \tag{6}$$

Considerata una retta s per P_{q-h} secante K dalla seconda equazione dei caratteri risulta

$$v_2 + 2v_4 + (q-h)/2 = q \tag{7}$$

da cui

$$v_2 = (q+h)/2 - 2v_4 \geq 2 \tag{8}$$

(perchè sono di indice 2 almeno i punti di intersezione con l'arco) e pertanto

$$v_4 \leq 1/2(((q+h)/2) - 2) = (q+h-4)/4. \tag{9}$$

Poichè per P_{q-h} escono $h/2$ rette secanti K e $(h/2)+1$ rette esterne, sulle $h/2$ secanti complessivamente ci sono al più

$$((q+h-4)/4)h/2 = (h(q+h-4))/8 \tag{10}$$

punti di indice 4.

D'altra parte, tenuto conto del Lemma 0, si ha che sulle tangenti per P_{q-h} ci sono complessivamente

$$(q-h)h/2 \tag{11}$$

punti di indice 4.

Ne segue che sulle $(h/2)+1$ rette esterne per P_{q-h} ci sono complessivamente almeno

$$t_4 - h(q+h-4)/8 - [(h/2)q - h^2/2] \tag{12}$$

punti di indice 4, cioè almeno

$$(q^2 - (3h+2)q + 2h^2 + 2h)/8$$

punti di indice 4.

Ne segue che tra le $(h/2)+1$ rette esterne per P_{q-h} ce n'è almeno una su cui i punti di indice 4 sono in numero di

$$v'_4 \geq [q^2 - (3h+2)q + 2h^2 + 2h]/[4(h+2)]. \tag{13}$$

D'altra parte anche su tale retta esterna vale un'uguaglianza analoga alla (7) per cui

$$v'_4 \leq (q+h)/4. \tag{14}$$

Confrontando le (13) e (14) si ottiene

$$[q^2 - (3h+2)q + 2h^2 + 2h]/(h+2) \leq (q+h)$$

e quindi

$$q^2 - 3hq - 2q + 2h^2 \leq hq + h^2 + 2q$$

ovvero

$$q^2 - 4(h+1)q + h^2 \leq 0. \tag{15}$$

Posto $f(q) = q^2 - 4(h+1)q + h^2$ ed osservato che per ogni $h \geq 4$ risulta $\Delta = 4(h+1)^2 - h^2 \geq 0$ e $f(3h) = -2h^2 - 12h < 0$ ne segue che i valori di $q > 3h$ che soddisfano la (15) sono

$$3h < q \leq 2(h+1) + \sqrt{[4(h+1)^2 - h^2]}. \tag{16}$$

In particolare per $h = 4$ si ritrova il risultato ottenuto in [4].

Ad esempio, per $h = 6$ si ha $q = 20, 24, 26$, per $h = 8$ si ha $q = 26, 28, 32, 34$, mentre per $h = 10$ risulta $q = 32, 34, 36, 40$.

4. Caso $t_{2h} = 1$.

Indichiamo con P_{2h} l'unico punto di indice $2h$ e con c la retta congiungente P_{2h} con P_{q-h} che, per la Proposizione 1, risulta essere una retta non tangente K.

Sussistono i seguenti lemmi

Lemma 1. *Se v è una retta per P_{2h} non tangente K e non passante per P_{q-h} risulta*

$$v_0 = h, \quad v_2 = q - h, \quad v_4 = 0 \tag{17}$$

cioè essa interseca ciascuna delle h rette per P_{q-h} non tangenti K e distinte da c, in punti di indice 0.

Lemma 2. *Su ciascuna delle h rette per P_{q-h} non tangenti K e non contenenti P_{2h} si verifica*

$$b_0 = q - 2h, \quad b_2 = (7h - q)/2, \quad b_4 = (q - 3h)/2. \tag{18}$$

Lemma 3. *Sulla retta c per P_{q-h} contenente P_{2h} si ha*

$$c_0 \leq q - 4. \tag{19}$$

Proposizione 5. *Sia K un q-arco completo di π_q, q pari, tale che $t_{q-h} = 1$ $(h \geq 4, q > 3h)$, $t_{2s} = 0$ per $s = 3, \ldots, h-1$ e $t_{2h} = 1$. Allora risulta*

$$t_0 \leq (h+1)q - 2h^2 - 4. \tag{20}$$

I risultati precedenti sono analoghi a quelli ottenuti in [4] a cui si rimanda per le dimostrazioni.

Si prova ora la seguente

Proposizione 6. *Se in π_q, con q pari, esiste un q-arco completo tale che $t_{q-h} = 1$, $t_{2s} = 0$ per ogni $s = 3, \ldots, h-1$ e $t_{2h} = 1 (h \geq 4, q > 3h)$, allora necessariamente $h = 4$.*

Dimostrazione. Nell'ipotesi $t_{2h} = 1$, dalle (4) si ottiene

$$t_0 = (q^2 + 2(h+1)q - 5h^2 + 6h - 8)/8. \tag{21}$$

Tenendo presente la (20) si ha

$$(q^2 + 2(h+1)q - 5h^2 + 6h - 8)/8 \leq (h+1)q - 2h^2 - 4$$

da cui

$$q^2 - 6(h+1)q + 11h^2 + 6h + 24 \leq 0. \tag{22}$$

Poichè $\Delta \geq 0$ se e solo se $2h^2 - 12h + 15 \leq 0$ si ha che la (22) ammette radici reali solo per $h = 4$.

Si osservi che in tal caso si ritrova il risultato ottenuto nella nota succitata nelle ipotesi suddette.

5. Caso $t_{2h} \geq 2$.

Lemma 4. *Se i punti di indice $2h$ appartengono tutti ad una stessa retta c per P_{q-h} non tangente K, allora*

$$t_4 \geq h(q - 2h). \tag{23}$$

Dimostrazione. Per il Lemma 0 su ciascuna tangente per P_{q-h} ci sono $h/2$ punti di indice 4 e per il Lemma 2 su ciascuna delle h rette per P_{q-h} non tangenti distinte da c ci sono esattamente $b_4 = (q - 3h)/2$ punti di indice 4 per cui

$$t_4 = [h(q-h)/2 + h(q-3h)/2] + c_4 \geq h(q - h + q - 3h)/2 = h(q - 2h).$$

Proposizione 7. *Se i punti di indice $2h$ appartengono tutti ad una stessa retta c per P_{q-h} non tangente K, allora*

$$(3h+1) + \sqrt{(2h^2+1)} < q < (4h+1) + \sqrt{(3h^2 - 6h + 1)}. \tag{24}$$

Dimostrazione. Osserviamo che dalle (4) si ha

$$t_4 = (q^2 + 2(h-1)q - h^2 - 2h - 4h(h-1)t_{2h})/8$$

e quindi per il Lemma 4, essendo $t_4 \geq h(q-2h)$ segue

$$q^2 + 2(h-1)q - h^2 - 2h - 4h(h-1)t_{2h} \geq 8h(q-2h)$$

ovvero

$$4h(h-1)t_{2h} \leq q^2 - 2(3h+1)q + 15h^2 - 2h$$

e quindi

$$t_{2h} \leq [q^2 - 2(3h+1)q + 15h^2 - 2h]/[4h(h-1)]. \tag{25}$$

Inoltre sempre dalle (4) si ha

$$t_0 = (q^2 + 2(h+1)q - h^2 - 6h - 4(h^2 - 3h + 2)t_{2h})/8$$

e dalla (20) $t_0 \leq (h+1)q - 2h^2 - 4$ per cui

$$q^2 + 2(h+1)q - h^2 - 6h - 4(h^2 - 3h + 2)t_{2h} \leq 8(h+1)q - 16h^2 - 32$$

onde

$$t_{2h} \geq [q^2 - 6(h+1)q + 15h^2 - 6h + 32]/[4(h^2 - 3h + 2)]. \tag{26}$$

Dalle (25) e (26) segue

$$\begin{aligned}&[q^2 - 6(h+1)q + 15h^2 - 6h + 32]/[(h-1)(h-2)] \leq \\ &\qquad \leq [q^2 - 2(3h+1)q + 15h^2 - 2h]/[h(h-1)]\end{aligned}$$

da cui

$$q^2 - 2(4h+1)q + h(13h+14) \leq 0$$

e quindi, essendo $\Delta \geq 0$ per ogni $h \geq 4$,

$$(4h+1) - \sqrt{(3h^2 - 6h + 1)} \leq q \leq (4h+1) + \sqrt{(3h^2 - 6h + 1)}. \tag{27}$$

D'altra parte, tenuto conto che deve essere $q \geq 3h$, indicato con $f(q) = q^2 - 2(4h+1)q + h(13h+14)$, poichè $f(3h) = -2h^2 + 8h < 0$ per ogni $h \geq 4$, si ha che le soluzioni accettabili sono

$$3h < q \leq (4h+1) + \sqrt{(3h^2 - 6h + 1)}. \tag{28}$$

Inoltre, poichè $t_{2h} \geq 2$, per la (25) si ha

$$[q^2 - 2(3h+1)q + 15h^2 - 2h]/[4h(h-1)] \geq 2$$

da cui

$$q^2 - 2(3h+1)q + 7h^2 + 6h \geq 0$$

e quindi

$$q \leq (3h+1) - \sqrt{(2h^2+1)} \text{ oppure } q \geq (3h+1) + \sqrt{(2h^2+1)}. \tag{29}$$

Posto $g(q) = q^2 - 2(3h+1)q + 7h^2 + 6h$, poichè $g(3h) = -2h^2 < 0$ per ogni h, ne segue che i valori di $q > 3h$ che verificano la (29) sono

$$q > (3h+1) + \sqrt{(2h^2+1)}. \tag{30}$$

Infine poichè si verifica che per $h \geq 4$

$$(3h+1) + \sqrt{(2h^2+1)} \leq (4h+1) + \sqrt{(3h^2 - 6h + 1)}$$

segue l'asserto.

Ad esempio, per $h = 6$ la (24) fornisce la limitazione $28 \leq q \leq 32$.

Non esistendo piani di ordine 30 (cfr.[2]) ed osservato che per $q = 32$ non esiste un valore intero di t_{12} soddisfacente le (25) e (26), segue che se $h = 6$ e i punti di indice 12 appartengono tutti ad una stessa retta, allora necessariamente $q = 28$ e $t_{12} = 2$.

Tenuto conto del Lemma 2 si può facilmente dimostrare il

Lemma 5. *Se $t_{2h} \geq 2$ ed esistono almeno 2 punti di indice $2h$ appartenenti a 2 rette distinte per P_{q-h} non tangenti K, allora*

$$t_0 = (h+1)(q-2h) = (h+1)q - 2h^2 - 2h. \tag{31}$$

Proviamo ora la seguente

Proposizione 8. *Se $t_{2h} \geq 2$ ed esistono almeno due punti di indice $2h$ appartenenti a due rette distinte per P_{q-h} non tangenti K, allora*

$$(h+1)^2 - \sqrt{\Delta} \leq q \leq (h+1)^2 + \sqrt{\Delta} \tag{33}$$

dove $\Delta = h^4 - 2h^3 - 3h^2 + 6h + 1$.

Dimostrazione. Dalle (4) e (31) segue che

$$t_0 = [q^2 + 2(h+1)q - h^2 - 6h - 4(h^2 - 3h + 2)t_{2h}]/8 =$$
$$= (h+1)q - 2h^2 - 2h$$

da cui

(34) $$t_{2h} = [q^2 - 6(h+1)q + 15h^2 + 10h]/[4(h^2 - 3h + 2)].$$

D'altra parte nelle ipotesi suddette su ciascuna tangente per P_{q-h} ci sono $h/2$ punti di indice 4 per cui

$$t_4 \geq h(q-h)/2$$

e, tenuto conto dell'espressione di t_4 fornita da (4), si ha

$$t_4 = [q^2 + 2(h-1)q - h^2 - 2h - 4h(h-1)t_{2h}]/8 \geq (h/2)q - h^2/2$$

da cui

(35) $$t_{2h} \leq [q^2 - 2(h+1)q + 3h^2 - 2h]/[4h(h-1)].$$

Da (34) e (35) segue

$$[q^2 - 6(h+1)q + 15h^2 + 10h]/[(h-1)(h-2)] \leq$$
$$\leq [q^2 - 2(h+1)q + 3h^2 - 2h]/[h(h-1)]$$

e quindi

$$f(q) = q^2 - 2(h+1)^2 q + h(6h^2 + 9h - 2) \leq 0.$$

Essendo le radici di $f(q)$

$$q_1 = (h+1)^2 + \sqrt{[(h+1)^4 - h(6h^2 + 9h - 2)]}$$
$$q_2 = (h+1)^2 - \sqrt{[(h+1)^4 - h(6h^2 + 9h - 2)]}$$

ed osservato che $f(3h) = 6h^2 - 8h > 0$ per ogni $h \geq 4$ e che $[(q_1 + q_2)/2] = (h+1)^2 > 3h$ per ogni h, segue l'asserto.

Osserviamo infine che nella (33) occorre scegliere i valori di q tali che l'espressione di t_{2h} data dalla (34) rappresenti un numero intero.

Ad esempio per $h = 6$ la (33) fornisce, tenuto conto che non esistono piani di ordine 22 (cfr.[2]), $24 \leq q \leq 76$. Inoltre dalla (34) si ha

$$t_{12} = (q^2 - 42q + 600)/80$$

intero solo per $q = 30, 52, 60, 62$ e 70.

Osservato che $q = 30, 62$ e 70 non sono ordini ammissibili (cfr.[2]) segue che se $h = 6$ ed esistono almeno 2 punti di indice 12 appartenenti a rette distinte, allora necessariamente $q = 52$ e $t_{12} = 14$ oppure $q = 60$ e $t_{12} = 21$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Barlotti, *Un'osservazione intorno a un teorema di B. Segre sui q-archi,* Le Matematiche, 21 (1966), pp. 23-29.

[2] R. Bruck - H. Ryser, *The non esistence of certain finite projective planes,* Canad. J. Math., 1 (1949), pp. 88-93.

[3] A.A. Bruen, *Arcs in planes of even order,* European J. Combin., 3 (1982), pp. 17-18.

[4] R. Stangarone - A. Terrusi, *Alcuni risultati sui q-archi completi di un piano proiettivo π_q, q pari, $q \geq 16$,* Res. Lecture Notes Math. Complex Anal. Geom., Combinatorics '88, II (1990), pp. 439-448.

[5] R. Stangarone - A. Terrusi, *Recenti risultati sui q-archi completi nei piani di ordine pari $q \geq 16$,* Rend. Mat. Appl., (7) 12 (1992), pp. 69-83.

[6] G. Tallini, *Sui q-archi di un piano lineare finito di caratteristica $q = 2$,* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei, (9) Mat. Appl. 8, 23 (1957), pp. 242-245.

[7] G. Tallini, *Sui q-archi completi di un piano proiettivo non desarguesiano di ordine q pari,* Quad. Sem. Geom. Comb. 54 , Univ. La Sapienza, Roma, 1985.

[8] C. Zanella, *On complete* 12*-arcs in projective planes of order* 12, Ann. Discrete Math., 37 (1988), pp. 485-492.

Istituto di Matematica,
Facoltà di Architettura,
Università di Firenze,
Via dell'Agnolo 14,
50122 Firenze (ITALY)