LE MATEMATICHE
Vol. XLVIII (1993) – Fasc. I, pp. 123-133

UNIFORME DISTRIBUZIONE ED APPLICAZIONI AD UNA CLASSE DI SERIE RICORRENTI

GIOVANNI FIORITO - ROSARIO MUSMECI - MARIO STRANO

In this paper we investigate the uniform distribution in $[0, T]$ ($T \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}$) of a suitable sequence. Then we give an interesting application to the study of a class of series whose terms are defined recursively.

Introduzione.

Nel 1916 Weyl dimostrò che la successione

$$\{n\theta - [n\theta]\}$$

con $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ è uniformemente distribuita in $[0, 1]$.

Questo importante risultato, noto ormai come teorema di Weyl, si rivelò particolarmente fecondo, infatti esso fu la base di numerose, ulteriori ricerche che costituiscono nell'insieme la teoria dell'uniforme distribuzione (cfr.[2]).

Nel presente lavoro dopo avere generalizzato opportunamente la nozione di uniforme distribuzione mod 1, proviamo che la uniforme distribuzione in $[0, T]$ $\forall T \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}$ della successione $\{\tau_n\}$, ottenuta ponendo $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\tau_n = n - \left[\frac{n}{T}\right]T\,,$$

Entrato in Redazione il 15 marzo 1993.

è equivalente alla uniforme distribuzione in [0, 1] della successione

$$\{n\theta - [n\theta]\} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}.$$

Nella seconda parte del lavoro diamo una interessante applicazione del risultato precedente allo studio della convergenza e della divergenza di una classe di serie ricorrenti il cui termine generale è definito dalla relazione

$$(*) \qquad \begin{cases} a_1 = \lambda \in \mathbb{R}^+ \\ a_{n+1} = \varphi(n)\, a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

ove $\varphi(x)$ è una opportuna funzione periodica con periodo T irrazionale. Nel seguito la serie di termine generale definito da (*) verrà indicata col simbolo $\sum_\lambda^\varphi$.

Con ipotesi differenti da quelle introdotte qui abbiamo studiato la convergenza della serie $\sum_\lambda^\varphi$ in [1].
Infine una lista di esempi completa la teoria sviluppata.

Una precisazione sul contributo degli autori.
Tutto il lavoro è stato discusso criticamente dagli autori. Il contenuto del § 1, il teorema 2.2 e gli esempi (tranne il n. 4) sono dovuti a G. Fiorito; il teorema 2.1 è di R. Musmeci; l'esempio 4 è di M. Strano. G. Fiorito ha coordinato i risultati ed ha curato la stesura materiale.

Ringraziamento. Gli autori sono grati al prof. F. Guglielmino per la lettura critica del lavoro e per aver suggerito una nuova, più semplice, dimostrazione del teorema 1.1.

1. Uniforme distribuzione.

Definizione 1.1. Sia $[a, b]$ un intervallo e $\{x_n\}$ una successione reale tale che $x_n \in [a, b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Si dice che la successione $\{x_n\}$ è uniformemente distribuita in $[a, b]$ se per ogni intervallo A semiaperto a destra e contenuto in $[a, b]$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} = \frac{\text{mis}\, A}{b-a},$$

ove si è posto

$$n_A = \sum_{i=1}^{n} \chi_A(x_i),$$

essendo χ_A la funzione caratteristica di A.

La definizione 1.1 nel caso in cui $[a, b] = [0, 1]$ e $x_n \in [0, 1[\ \forall n \in \mathbb{N}$ coincide con la nozione di uniforme distribuzione della successione $\{x_n\}$ mod 1. (cfr. [2] pag. 1).

Nel seguito l'uniforme distribuzione come precisata dalla definizione 1.1 verrà denotata con la notazione u.d.

Sia $T \in \mathbb{R}^+$ e, $\forall n \in \mathbb{N}$, sia k_n il numero naturale tale che ([1])

$$(k_n - 1)T \le n < k_n T.$$

Consideriamo la successione $\{\tau_n\}$ definita ponendo $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\tau_n = n - (k_n - 1)T.$$

Sussiste il seguente teorema.

Teorema 1.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione* $\{\tau_n\}$ *sia u.d. in* $[0, T]$ $\forall T \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}$ *è che la successione* $\{n\theta - [n\theta]\}$ *sia u.d. in* $[0, 1]$ $\forall \theta \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}$.

Dimostrazione. La condizione è sufficiente. Siano $A = [\alpha, \beta[\subseteq [0, T]$ e, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n_A = \sum_{i=1}^{n} \chi_A(\tau_i).$$

Poiché $\forall i \in \mathbb{N}$ $\tau_i \in [\alpha, \beta[$ se e solo se $\frac{\tau_i}{T} \in [\frac{\alpha}{T}, \frac{\beta}{T}[\subseteq [0, 1]$, ne segue che $\forall n \in \mathbb{N}$ n_A coincide col numero degli elementi della successione $\{\frac{\tau_i}{T}\}$ ottenuti per $i \le n$ ed appartenenti ad $[\frac{\alpha}{T}, \frac{\beta}{T}[$.

D'altra parte, essendo $k_n - 1 = [\frac{n}{T}]$, si ha

$$\frac{\tau_n}{T} = \frac{n}{T} - \left[\frac{n}{T}\right]. \tag{1}$$

Allora dalla (1) e dall'ipotesi segue che la successione $\{\frac{\tau_n}{T}\}$ è u.d. in $[0, 1]$, e quindi si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} = \frac{\beta - \alpha}{T},$$

cioè la tesi.

La condizione è necessaria. Siano $A = [\alpha, \beta[\subseteq [0, 1]$ e, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n_A = \sum_{i=1}^{n} \chi_A(i\theta - [i\theta]).$$

([1]) Si osservi che risulta $k_n - 1 = [\frac{n}{T}]$.

Poiché $\forall k \in \mathbb{N}$ $k\theta - [k\theta] \in [\alpha, \beta[$ se e solo se

$$k - [k\theta]\,\frac{1}{\theta} \in \left[\frac{\alpha}{\theta}, \frac{\beta}{\theta}\right[\subseteq \left[0, \frac{1}{\theta}\right],$$

ne segue che il numero n_A coincide col numero degli elementi della successione

$$\left\{k - [k\theta]\,\frac{1}{\theta}\right\}$$

ottenuti per $k \leq n$ ed appartenenti ad $[\frac{\alpha}{\theta}, \frac{\beta}{\theta}[$. Ed essendo, infine, la successione (2) $\{k - [k\theta]\frac{1}{\theta}\}$ u.d. in $[0, \frac{1}{\theta}]$ per l'ipotesi, segue

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} = \frac{\dfrac{\beta-\alpha}{\theta}}{\dfrac{1}{\theta}} = \beta - \alpha,$$

e ciò completa la dimostrazione. □

2. Serie ricorrenti.

Teorema 2.1. *Sia $\varphi(x)$ definita in $[0, +\infty[$ a valori in $[0, M]$ periodica di periodo T ($T \notin \mathbb{Q}$); inoltre valgano le seguenti condizioni:*

1) *$\exists \alpha \in]0, T[$ tale che $\varphi(x) \leq 1$ $\forall x \in [0, \alpha[$, $\varphi(x) \geq 1$ $\forall x \in [\alpha, T[$;*
2) *esistono $p \in \mathbb{N}$ e $q \in]0, 1[$ tali che l'intervallo $[0, T[$ si può decomporre in $2p + 1$ intervalli parziali semiaperti a destra*

$$A_i = [x_i, x_{i-1}[\quad i = 1, 2, \dots, p; \quad x_0 < \alpha,\ x_p = 0;$$

$$B_i = [y_{i-1}, y_i[\quad i = 1, 2, \dots, p; \quad y_0 = \alpha,\ y_p = T;$$

(2) Si osservi che dall'essere

$$[k\theta] < k\theta < [k\theta] + 1$$

segue

$$[k\theta]\,\frac{1}{\theta} < k < ([k\theta] + 1)\,\frac{1}{\theta}.$$

$$C = [x_0, \alpha[$$

tali che per $i = 1, 2, \ldots, p$ *si abbia*

$$\text{mis } A_i \geq \text{mis } B_i$$

e

$$\varphi(x)\varphi(y) \leq q \qquad \forall (x, y) \in A_i \times B_i.$$

Allora la serie $\sum_\lambda^\varphi$ *è convergente.*

Dimostrazione. Come nel § 1, indicato $\forall n \in \mathbb{N}$, con k_n il numero naturale tale che

$$(k_n - 1)T < n < k_n T$$

e considerata la successione $\{\tau_n\}$ definita ponendo $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\tau_n = n - (k_n - 1)T,$$

poniamo per $i = 1, 2, \ldots, p$

$$n_i = \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_i}(\tau_j)$$

e

$$m_i = \sum_{j=1}^{n} \chi_{B_i}(\tau_j);$$

poniamo infine

$$a \wedge b = \min(a, b)\,, \quad a \vee b = \max(a, b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo ora che, se per qualche $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ risulta

$$\sup_{A_i} \varphi = 0,$$

allora la serie $\sum_\lambda^\varphi$ è ovviamente convergente, mentre in caso contrario, in virtù delle ipotesi e delle considerazioni svolte nel § 1, $\forall n \in \mathbb{N}$ sussiste la diseguaglianza:

(1) $$\sqrt[n+1]{a_{n+1}} = \sqrt[n+1]{\lambda\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n)} \leq$$

$$\leq \sqrt[n+1]{\lambda\, q^{\sum_{i=1}^{p} n_i \wedge m_i} \prod_{i=1}^{p} \left[(\sup_{A_i} \varphi)^{n_i - m_i} \vee (\sup_{B_i} \varphi)^{m_i - n_i} \right]} =$$

$$= \lambda^{\frac{1}{n+1}} q^{\sum_{i=1}^{p} \frac{n_i}{n+1} \wedge \frac{m_i}{n+1}} \prod_{i=1}^{p} \left[(\sup_{A_i} \varphi)^{\frac{n_i}{n+1} - \frac{m_i}{n+1}} \vee (\sup_{B_i} \varphi)^{\frac{m_i}{n+1} - \frac{n_i}{n+1}} \right].$$

Poiché per il teorema 1.1 si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n_i}{n+1} = \frac{\operatorname{mis} A_i}{T} \quad \text{e} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{m_i}{n+1} = \frac{\operatorname{mis} B_i}{T},$$

risulta

$$\text{(2)} \qquad \lim_{n \to \infty} \lambda^{\frac{1}{n+1}} q^{\sum_{i=1}^{p} \frac{n_i}{n+1} \wedge \frac{m_i}{n+1}} \prod_{i=1}^{p} \left[(\sup_{A_i} \varphi)^{\frac{n_i}{n+1} - \frac{m_i}{n+1}} \vee (\sup_{B_i} \varphi)^{\frac{m_i}{n+1} - \frac{n_i}{n+1}} \right] =$$

$$= q^{\sum_{i=1}^{p} \frac{\operatorname{mis} B_i}{T}} \prod_{i=1}^{p} \left[(\sup_{A_i} \varphi)^{\frac{\operatorname{mis} A_i - \operatorname{mis} B_i}{T}} \vee (\sup_{B_i} \varphi)^{\frac{\operatorname{mis} B_i - \operatorname{mis} A_i}{T}} \right] \leq$$

$$\leq q^{\sum_{i=1}^{p} \frac{\operatorname{mis} B_i}{T}} < 1.$$

Da (1) e (2) segue ovviamente la tesi. □

Teorema 2.2. *Sia $\varphi(x)$ definita in $[0, +\infty[$ a valori in $[m, M]$ $(m > 0)$ periodica di periodo T $(T \notin \mathbb{Q})$; inoltre valgano le seguenti condizioni:*

1) $\exists\, \alpha \in]0, T[$ *tale che* $\varphi(x) \geq 1$ $\forall x \in [\alpha, T[$;

2) $\exists\, p \in \mathbb{N}$ *tale che l'intervallo* $[0, T[$ *si può decomporre in* $2p+1$ *intervalli parziali semiaperti a destra*

$$A_i = [x_i, x_{i-1}[\quad i = 1, 2, \ldots, p\,; \quad x_0 = \alpha,\ x_p = 0\,;$$

$$B_i = [y_{i-1}, y_i[\quad i = 1, 2, \ldots, p\,; \quad y_0 > \alpha,\ y_p = T\,;$$

$$C = [\alpha, y_0[$$

tali che per $i = 1, 2, \ldots, p$ *si abbia*

$$\operatorname{mis} A_i < \operatorname{mis} B_i$$

e

$$\varphi(x)\varphi(y) \geq 1 \quad \forall (x, y) \in A_i \times B_i\,.$$

Allora la serie $\sum_\lambda^\varphi$ *è divergente.*

Dimostrazione. Con le stesse notazioni introdotte nella dimostrazione del teorema precedente, in virtù del teorema 1.1 esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > \nu$ risulta $n_i < m_i$ per $i = 1, 2, \ldots, p$.

Allora, $\forall n > \nu$, per le ipotesi e per le considerazioni svolte nel § 1, si ha:

$$a_{n+1} = \lambda\varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(n) \geq \lambda \prod_{i=1}^{p} \left(\inf_{B_i} \varphi)^{m_i - n_i}\right) \geq \lambda,$$

da cui, ovviamente, la tesi. □

Osservazione. Se nella ipotesi 2) del teorema 2.1 la diseguaglianza

$$\operatorname{mis} A_i \geq \operatorname{mis} B_i \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

viene sostituita dalla diseguaglianza (più forte)

$$\operatorname{mis} A_i > \operatorname{mis} B_i \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

allora in virtù del teorema 1.1 esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > \nu$ si ha

$$n_i > m_i \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Pertanto, in questo caso, la diseguaglianza (1) che figura nella dimostrazione del teorema 2.1 può essere sostituita con la seguente (assai più semplice)

$$\sqrt[n+1]{a_{n+1}} \leq \lambda^{\frac{1}{n+1}} q^{\sum\limits_{i=1}^{p} \frac{m_i}{n+1}},$$

dalla quale segue subito la tesi.

Esempio 1. Sia $\varphi_1(x)$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità in $[0, +\infty[$ la funzione

$$f_1(x) = \frac{x}{\pi} \qquad x \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right[.$$

Allora $\varphi_1(x)$ è una funzione periodica (di periodo $\frac{3}{2}\pi$) e per essa sono verificate tutte le ipotesi del teorema 2.1, come si vede facilmente ponendo:

$$A_1 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad B_1 = \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right[, \quad C = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[, \quad q = \frac{3}{4}.$$

Pertanto la serie $\sum_{\lambda}^{\varphi_1}$ è convergente.

Esempio 2. Sia $\varphi_2(x)$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità in $[0, +\infty[$ la funzione

$$f_2(x) = \frac{x^2}{\pi^2} \qquad x \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right[.$$

Allora $\varphi_2(x)$ è una funzione periodica (di periodo $\frac{3}{2}\pi$) e per essa sono verificate tutte le ipotesi del teorema 2.1, come si vede facilmente ponendo :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right[, \quad A_2 = \left[0, \frac{\pi}{3}\right[;\\
B_1 &= \left[\pi, \frac{6}{5}\pi\right[, \quad B_2 = \left[\frac{6}{5}\pi, \frac{3}{2}\pi\right[;\\
C &= \left[\frac{2}{3}\pi, \pi\right[;\\
q &= \frac{16}{25}.
\end{aligned}$$

Pertanto la serie $\sum_{\lambda}^{\varphi_2}$ è convergente.

Esempio 3. Sia $\varphi_3(x)$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità in $[0, +\infty[$ la funzione

$$f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\pi} & \text{per } x \in [0, \pi] \\[2ex] \dfrac{x^2}{\pi^2} & \text{per } x \in \left]\pi, \dfrac{3}{2}\pi\right[\end{cases}.$$

Allora $\varphi_3(x)$ è una funzione periodica (di periodo $\frac{3}{2}\pi$) e per essa sono verificate tutte le ipotesi del teorema 2.1, come si vede facilmente ponendo :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right[, \quad A_2 = \left[0, \frac{\pi}{3}\right[;\\
B_1 &= \left[\pi, \frac{6}{5}\pi\right[, \quad B_2 = \left[\frac{6}{5}\pi, \frac{3}{2}\pi\right[;\\
C &= \left[\frac{2}{3}\pi, \pi\right[;\\
q &= \frac{24}{25}.
\end{aligned}$$

Pertanto la serie $\sum_{\lambda}^{\varphi_3}$ è convergente.

Esempio 4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \operatorname{sen}^2\left(y + \int_0^x e^{-t^2}\,dt\right) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e sia $\psi(x)$ la sua soluzione. Indichiamo con $\psi_1(x)$ la restrizione in $[0,2]$ della funzione

$$\frac{1}{\pi}\arctan\psi(x)$$

e osserviamo che $\psi_1(x)$ risulta crescente, continua e tale che $\psi_1(2) < \frac{1}{2}$.
Consideriamo poi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \operatorname{sen}^2\left(y + \int_0^x e^{-t^2}\,dt\right) \\ y(3) = 1 \end{cases}$$

e osserviamo che, detta $\chi(x)$ la sua soluzione (crescente e continua) e fissato un numero $\varepsilon > 0$ tale che

$$\psi_1(2)(1+\varepsilon) < 1\,,$$

esiste un $T \in (\mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}) \cap]3,4[$ tale che $\chi(T) < (1+\varepsilon)$. Sia $\chi_1(x)$ la restrizione di $\chi(x)$ a $[3,T]$. Poniamo, infine

$$f_4(x) = \begin{cases} \psi_1(x) & \text{per } x \in [0,2] \\ (1-\psi_1(2))(x-2) + \psi_1(2) & \text{per } x \in]2,3] \\ \chi_1(x) & \text{per } x \in]3,T[\end{cases}$$

e denotiamo con $\varphi_4(x)$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità in $[0,+\infty[$ la funzione $f_4(x)$. Si vede allora facilmente che scegliendo

$$A_1 = [0,2[\,; \quad B_1 = [3,T[\,; \quad C = [2,3[; \quad q = \psi_1(2)\,(1+\varepsilon)\,,$$

la funzione $\varphi_4(x)$ verifica tutte le ipotesi del teorema 2.1, e pertanto la serie $\sum_\lambda^{\varphi_4}$ è convergente.

Esempio 5. Sia $\varphi_5(x)$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità in $[0,+\infty[$ la funzione

$$f_5(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2} & \text{per } x = 0 \\ \dfrac{x}{2\pi} + \dfrac{3}{4} & \text{per } x \in \left]0, \dfrac{3}{2}\pi\right[\,. \end{cases}$$

Allora $\varphi_5(x)$ è una funzione periodica (di periodo $\frac{3}{2}\pi$) e per essa sono verificate tutte le ipotesi del teorema 2.2, come si vede facilmente ponendo :

$$A_1 = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad A_2 = \left[0, \frac{\pi}{4}\right[;$$
$$B_1 = \left[\frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi\right[, \quad B_2 = \left[\frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi\right[;$$
$$C = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi\right[.$$

Pertanto la serie $\sum_{\lambda}^{\varphi_5}$ è divergente.

Esempio 6. Sia $\varphi_6(x)$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità in $[0, +\infty[$ la funzione

$$f_6(x) = \begin{cases} 3 & \text{per } x = 0 \\ \dfrac{x^2}{\pi^2} + \dfrac{3}{4} & \text{per } x \in \left]0, \dfrac{3}{2}\pi\right[. \end{cases}$$

Allora $\varphi_6(x)$ è una funzione periodica (di periodo $\frac{3}{2}\pi$) e per essa sono verificate tutte le ipotesi del teorema 2.2, come si vede facilmente ponendo :

$$A_1 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad B_1 = \left[\sqrt{\frac{7}{12}}\pi, \frac{3}{2}\pi\right[, \quad C = \left[\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{7}{12}}\pi\right[.$$

Pertanto la serie $\sum_{\lambda}^{\varphi_6}$ è divergente.

Esempio 7. Sia $\varphi_7(x)$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità in $[0, +\infty[$ la funzione

$$f_7(x) = \begin{cases} 9 & \text{per } x = 0 \\ \dfrac{1}{4} & \text{per } x \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right] \\ \dfrac{4x^2}{\pi^2} & \text{per } x \in \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3}{2}\pi\right[. \end{cases}$$

Ponendo

$$A_1 = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad A_2 = \left[0, \frac{\pi}{3}\right[;$$
$$B_1 = \left[\frac{3}{4}\pi, \pi\right[, \quad B_2 = \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right[;$$
$$C = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right[,$$

si vede facilmente che la funzione $\varphi_7(x)$ (periodica di periodo $\frac{3}{2}\pi$) verifica tutte le ipotesi del teorema 2.2, pertanto la serie $\sum_{\lambda}^{\varphi_7}$ è divergente.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Fiorito - R. Musmeci - M. Strano, *Diophantine approximations and convergence of series in Banach spaces,* preprint.

[2] L. Kuipers - H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences,* J. Wiley & Sons, New York, 1974.

Dipartimento di Matematica,
Università di Catania,
Viale A. Doria 6,
95125 Catania (Italy)