LE MATEMATICHE
Vol. XLVIII (1993) – Fasc. I, pp. 145-151

SUI BLOCKING SET IRRIDUCIBILI DUALMENTE CONTENUTI IN UN K-ARCO

FULVIO ZUANNI

In this paper we give some constructions of irreducible blocking sets contained in a blocking set k-arc derived.

1. Introduzione.

Sia $P = PG(2, q)$ un piano proiettivo sul campo di Galois $G = GF(q)$, q potenza di un primo p. Un *k-arco* di P è un insieme di k punti a tre a tre non allineati, esso è detto *completo* se non è contenuto propriamente in un $(k+1)$-arco e se di cardinalità massima si dice *ovale*. E' noto il

Risultato 1.1. (B. Segre [13]). *Se q è dispari allora ogni ovale di P è una conica di P.*

Esempio di arco completo dovuto a B. Segre e L. Lombardo Radice (cfr.[12]). Sia Q' l'insieme dei quadrati non nulli di G. Nel riferimento $\{U_0(1, 0, 0), U_1(0, 1, 0), U_2(0, 0, 1), U(1, 1, 1)\}$ sia C la conica di equazione $x_1x_2 = x_0^2$. Sia $S_{Q'}$ l'insieme costituito dai punti di C del tipo $(1, g, g^{-1})$, $g \in Q'$, (ramo dei quadrati) e dai punti U_0, U_1 e U_2. Si prova che se $q \equiv 3$ (mod 4) allora $S_{Q'}$ è un $((q+5)/2)$-arco completo che chiameremo *arco di Segre*.

Un sottoinsieme B di P si dice *blocking set* se ogni retta di P ha intersezione non vuota con B e con $P \setminus B$. Un blocking set B si dice *irriducibile* se non esistono blocking set contenuti propriamente in B, o in modo equivalente se e solo se per ogni punto di B passa una retta 1-secante. E' noto il

Entrato in Redazione il 23 giugno 1993.

Risultato 1.2. (A. Bruen [5], A. Bruen e J. Thas [7], G. Tallini [15]). *Sia B un blocking set irriducibile di cardinalità b, allora*

$$q + q^{1/2} + 1 \leq b \leq q^{3/2} + 1;$$

valendo il segno di uguaglianza a sinistra se e solo se q è un quadrato e B è un subpiano di Baer; valendo il segno a destra se e solo se q è un quadrato e B è un arco hermitiano.

Diamo ora tre esempi di blocking set utili per il seguito.

1) Siano r ed s due rette distinte di P, $W = r \cap s$, $A \in r \setminus \{W\}$, $B \in s \setminus \{W\}$, $C \in AB \setminus \{A, B\}$. L'insieme $T_1 = r \cup s \cup \{C\} \setminus \{A, B\}$ è un blocking $2q$-set irriducibile.

2) Siano r, s e W come sopra, $A_1, A_2 \in r \setminus \{W\}$, $A_1 \neq A_2$, $B_1, B_2 \in s \setminus \{W\}$, $B_1 \neq B_2$, $C_1 = A_1B_1 \cap A_2B_2, C_2 = A_1B_2 \cap A_2B_1$. L'insieme $T_2 = r \cup s \cup \{C_1, C_2\} \setminus \{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ risulta essere un blocking $(2q - 1)$-set irriducibile $(q > 3)$.

3) Considero il triangolo di vertici U_0, U_1, U_2 come nell'arco di Segre. Sui lati considero i punti di coordinate

$$(1, x, 0)\ ,\ (1, 0, y)\ ,\ (0, 1, m)$$

con x, y, m quadrati di G. Tale insieme, introdotto in [9], si chiama triangolo proiettivo di lato $(q + 3)/2$ (congetturato minimo nei piani d'ordine primo).

Osserviamo che se $k < (q + 2)$, il duale dell'insieme delle *corde* di k-arco completo è un blocking set di cardinalità $[k(k - 1)/2]$, che si dice blocking set k-arco derivato o blocking set dualmente contenuto in un k-arco.
Tali blocking set sono caratterizzati dal seguente

Risultato 1.3. (A. Bruen e C. Fischer [8]). *Un blocking set B è derivato da un k-arco se e solo se*

1) B ha al più $k(k - 1)/2$ punti;
2) il numero delle rette $(k - 1)$-secanti B è almeno k;
3) mai tre rette $(k - 1)$-secanti B sono concorrenti.

Se $q > 3$ il blocking set derivato da una conica è riducibile, e se $q \geq 47$ il blocking set derivato dall'arco di Segre è riducibile. E' naturale porsi il problema generale di classificare i blocking set irriducibili contenuti in un blocking set riducibile derivato da un arco.
In questa nota si provano quattro risultati parziali nel *caso q dispari* e precisamente:

Paragrafo 2. Il blocking set derivato da una conica contiene un blocking set irriducibile di tipo T_1.

Paragrafo 3. Il blocking set derivato da una conica contiene un blocking set irriducibile di tipo T_2 se e solo se $q \equiv 1 \pmod 3$.

Paragrafo 4. Se un blocking set k-arco derivato contiene un triangolo proiettivo allora $k \geq (q+5)/2$ e $(3q-2k) \equiv 1 \pmod 4$.

Paragrafo 5. Il blocking set derivato dall'arco di Segre contiene un triangolo proiettivo di lato $(q+3)/2$.

Denoteremo con Z^* il duale di un sottoinsieme Z di P.

2. Un blocking $2q$-set dualmente contenuto in una conica.

Sia C una conica di $P = PG(2, q)$ con q dispari. Siano U_1 e U_2 due punti distinti di C, t_1 e t_2 le tangenti a C rispettivamente in U_1 e U_2. Denotiamo con U_0 il punto di intersezione tra t_1 e t_2.

Sia B il $2q$-insieme avente come elementi:
- tutte le corde di C passanti per U_1;
- tutte le corde di C passanti per U_2;
- una qualsiasi corda di C passante per U_0.

Si noti che l'insieme B^*, che è contenuto nel blocking set derivato dalla conica, è un blocking $2q$-set di tipo T_1.

Osservazione 2.1. Se q è pari tale costruzione non è possibile in quanto in tal caso U_0 è il nucleo della conica e quindi per U_0 non passa alcuna corda della conica.

3. Un blocking $(2q-1)$-set dualmente contenuto in una conica.

Sia C una conica di $P = PG(2, q)$ con q dispari. Siano U_1 e U_2 due punti distinti di C, t_1 e t_2 le tangenti a C rispettivamente in U_1 e U_2. Denotiamo con U_0 il punto di intersezione tra t_1 e t_2. Sia DE una corda di C passante per U_0. Denotiamo con H il punto di intersezione della corda U_1D e della tangente t_2 e con K il punto di intersezione della corda U_2D e della tangente t_1.

Sia B il $(2q-1)$-insieme avente come elementi:
- la corda U_1U_2
- le $(q-2)$ corde U_1F con F elemento di $C - \{D, U_2\}$
- le $(q-2)$ corde U_2F con F elemento di $C - \{D, U_1\}$
- la corda DE
- la retta HK.

E' facile vedere che l'insieme B^* è un blocking set di tipo T_2. Proveremo che B^* è contenuto nel blocking set derivato da una conica. A riguardo si ha

Osservazione 3.1. L'insieme B è un sottinsieme dell'insieme delle corde di C se e solo se la retta HK è una corda di C.

Teorema 3.2. *La retta HK è una corda di C se e solo se $q \equiv 1 \pmod 3$.*

Dimostrazione. Senza perdere di generalità, fissiamo i punti U_0, U_1, U_2, U e la conica C come nell'introduzione. Si ha che $D(1, g, g^{-1})$, $E(1, -g, -g^{-1})$, $H(1, 0, g^{-1})$ e $K(1, g, 0)$ con $g \in G \setminus \{0\}$.
La retta HK ha equazione $gx_0 - x_1 - g^2x_2 = 0$. Poichè U_1 e U_2 non appartengono ad HK, possiamo porre $x_0 = 1$, $x_1 = x$ e $x_2 = y$, in modo che le intersezioni tra C ed HK sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} xy = 1 \\ g - x - g^2y = 0 \end{cases}$$

da cui $x^2 - gx + g^2 = 0$. Ponendo $z = -x/g$ si ha $z^2 + z + 1 = 0$.
La retta HK è una corda di C se e solo se tale equazione ha due soluzioni distinte in G, cioè se e solo se $q \equiv 1 \pmod 3$ (cfr. [10]).

4. Blocking set k-arco derivati e triangolo proiettivo.

Sia $P = PG(2, q)$ con q dispari, K denoti un k-arco completo di P e D l'insieme delle corde di K.

Teorema 4.1. *L'insieme D^* contiene un triangolo T^* di lato $(q + 3)/2$ se e solo se l'arco K ha almeno $(q + 5)/2$ punti.*

Dimostrazione. Supponiamo che D^* contenga un triangolo T^* di lato $(q + 3)/2$. Ai tre lati e ai tre vertici del triangolo corrispondono, nella dualità, rispettivamente tre punti dell'arco K e le tre corde che li congiungono due a due. Ad ognuno degli ulteriori $(q - 1)/2$ punti di ogni lato del triangolo corrisponde, nella dualità, una corda di K. Per cui l'arco K ha almeno altri $(q - 1)/2$ punti. Quindi l'arco ha almeno $3 + (q - 1)/2 = (q + 5)/2$ punti.
Viceversa, se l'arco K ha almeno $(q + 5)/2$ punti si fissino 3 punti distinti A, B e C di K. Si consideri l'insieme avente come elementi le corde AB, AC e BC, altre $(q - 1)/2$ corde per A, altre $(q - 1)/2$ corde per B e altre $(q - 1)/2$ corde per C. Il duale di tale insieme è un triangolo di lato $(q + 3)/2$.

Lemma 4.2. *Se l'insieme D^* contiene un triangolo proiettivo T^* di lato $(q + 3)/2$ allora ogni punto del piano P appartiene ad una o due o tre o $(q + 3)/2$ corde di T, sottoinsieme di D.*

Dimostrazione. Immediata, poichè ogni retta di P^* interseca il triangolo proiettivo T^* proprio in 1 o 2 o 3 o $(q+3)/2$ punti.

Teorema 4.3. *Se un blocking set k-arco derivato contiene un triangolo prioiettivo T^* di lato $(q+3)/2$, allora $(3q-2k) \equiv 1 \pmod 4$.*

Dimostrazione. Consideriamo i tre punti di K corrispondenti, nella dualità, ai tre lati del triangolo proiettivo T^*. Per ognuno di essi passano $(q+3)/2$ corde appartenenti a T. E' facile convincersi che per gli altri $(k-3)$ punti di K passano o una o tre corde appartenenti a T. Se m è il numero di punti in cui arrivano tre corde si ha $3m + [(k-3) - m] = 3(q-1)/2$ da cui $3q - 2k = 4m - 3$. Se fosse $m = 0$ si avrebbe $k = 3(q+1)/2 > (q+1)$ che è assurdo. Dal fatto che m è un intero positivo segue la tesi.

Corollario 4.4. *Se il blocking set derivato da una conica contiene un triangolo proiettivo di lato $(q+3)/2$ allora $q \equiv 3 \pmod 4$.*

5. Arco di Segre e triangolo proiettivo.

Sia $P = PG(2,q)$ con $q \equiv 3 \pmod 4$ e $S_{Q'}$ l'arco di Segre di P. Il blocking set derivato dall'arco di Segre $S_{Q'}$ ha cardinalità $(q+5)(q+3)/8$. Con semplici calcoli, si vede che per $q \geq 47$ tale blocking set è riducibile e che per $q \leq 43$ potrebbe essere irriducibile. In questo paragrafo si prova che questo blocking set contiene il triangolo proiettivo e, quindi, è sempre riducibile.

Sia B l'insieme formato dalle seguenti corde di $S_{Q'}$:
- le $(q-1)/2$ corde U_0F con $F \in S_{Q'} \setminus \{U_0, U_1, U_2\}$;
- le $(q-1)/2$ corde U_1F con $F \in S_{Q'} \setminus \{U_0, U_1, U_2\}$;
- le $(q-1)/2$ corde U_2F con $F \in S_{Q'} \setminus \{U_0, U_1, U_2\}$;
- le 3 corde U_0U_1, U_0U_2 e U_1U_2.

E' facile vedere che l'insieme B^*, duale di B, è un triangolo di lato $(q+3)/2$.

Lemma 5.1. *Siano U_0F e U_1G ($F, G \in S_{Q'} \setminus \{U_0, U_1, U_2\}$) due corde di B e sia A il loro punto di intersezione. Allora esiste una corda U_2H ($H \in S_{Q'} \setminus \{U_0, U_1, U_2\}$) di B passante per A.*
Risultato analogo si ha per i casi U_1F, U_2G e U_2F, U_0G.

Dimostrazione. Siano U_0F e U_1G ($F, G \in S_{Q'} \setminus \{U_0, U_1, U_2\}$) due corde di B. Avremo che $F(1, b, b^{-1})$ e $G(1, g, g^{-1})$, con b e g quadrati non nulli. La corda U_0F ha equazione $x_2 = b^{-2}x_1$, mentre la corda U_1G ha equazione $x_2 = g^{-1}x_0$. Risulta $A(1, t, g^{-1})$ con $t = b^2g^{-1}$ quadrato non nullo. Prendiamo il punto $H(1, t, t^{-1})$ di $S_{Q'} \setminus \{U_0, U_1, U_2\}$. La corda U_2H di B, di equazione $x_1 = tx_0$, passa per il punto A.

Dal lemma precedente segue subito, per dualità, il

Teorema 5.2. *L'insieme B^* è un triangolo proiettivo.*

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Berardi - F. Eugeni, *On the cardinality of blocking sets in $PG(2, q)$,* J. Geom., 22 (1984), pp. 5-14.

[2] L. Berardi - F. Eugeni, *Blocking sets in projective planes of order four,* Proceedings "Combinatorics '86" in Annals of Discrete Math., 37 (1988), pp. 43-50.

[3] L. Berardi - S. Innamorati, *Irreducible blocking sets in the projective plane of order five,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 38 (1990), pp. 293-311.

[4] A. Beutelspacher - F. Eugeni, *Sui blocking sets di dato indice con particolare riguardo all'indice tre,* Boll. U.M.I., (6) 4-A (1985), pp. 441-450.

[5] A.A. Bruen, *Baer Subplane and blocking sets,* Bull. Amer. Math. Soc., 76 (1970), pp. 342-344.

[6] A.A. Bruen, *Blocking sets in projective planes,* Siam J. Appl. Math., 21 (1971), pp. 380-392.

[7] A.A. Bruen - J.A. Thas, *Blocking sets,* Geometriae Dedicata, 6 (1977), pp. 193-203.

[8] A.A. Bruen - J.C. Fisher, *Blocking sets and complete k-arcs,* Pacific J. Math., 53 (1974), pp. 73-84.

[9] J. Di Paola, *On minimum blocking coalitions in small projective plane games,* Siam J. Appl. Math., 17 (1969), pp. 378-392.

[10] J.W.P. Hirschfeld, *Projective geometries over finite fields,* Clarendon Press, Oxford, 1979.

[11] S. Innamorati - A. Maturo, *On irreducible blocking sets in projective plane,* Ratio Math., 2 (1991), pp. 151-155.

[12] B. Segre, *Istituzioni di Geometria Superiore,* Istituto Matematico "Guido Castelnuovo", Roma, 1966.

[13] B. Segre, *Ovals in finite projective plane,* Canad. J. Math., 7 (1955), pp. 414-416.

[14] D. Senato, *Blocking sets di indice tre,* Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, 49 (1982), pp. 89-95.

[15] G. Tallini, *On blocking sets in finite projective and affine spaces,* Annals of Discrete Math., 37 (1988), pp. 433-450.

Dipartimento di Ingegneria Elettrica,
Università degli Studi,
L'Aquila (Italy)