LE MATEMATICHE
Vol. XLVIII (1993) – Fasc. II, pp. 297-309

SULLE IPERSUPERFICI ALGEBRICHE DI $P^4(\mathbb{C})$, CONTENUTE MULTIPLAMENTE NELLA PROPRIA HESSIANA

GIOVANNA ILARDI

We prove that a projective irreducible hypersurface of $P^4(\mathbb{C})$, whose simple points are 1-parabolic and having determined hessian cannot be a multiple component of its hessian.

1. - In questa nota si reca un contributo alla soluzione di un problema posto da B. Segre in [8] concernente le ipersuperfici di $P^r(\mathbb{C})$.

Premesso che, com'è ben noto, un'ipersuperficie di $P^r(\mathbb{C})$ è contenuta nella propria hessiana se, e soltanto se, è a punti parabolici e, più precisamente, che è contenuta in essa con molteplicità almeno h se è a punti h-parabolici, la questione in discorso è di determinare le ipersuperfici a punti h-parabolici, contenute nella propria hessiana con molteplicità superiore ad h.

In [8] ed in [9] B. Segre ha portato vari esempi di ipersuperfici per cui la circostanza si presenta. In [4] A. Franchetta ha dimostrato che la sola superficie algebrica di $P^3(\mathbb{C})$ irriducibile, a hessiana determinata (ossia non cono) contenuta multiplamente nella propria hessiana è la sviluppabile circoscritta a una cubica gobba. In [4] ed in [5] sono contenuti anche vari risultati riguardanti le ipersuperfici di $P^r(\mathbb{C})$, con $r > 3$. Ricordiamo qui quelli relativi alle ipersuperfici di $P^4(\mathbb{C})$.

Entrato in Redazione il 4 marzo 1994.

Sia V_3 un'ipersuperficie algebrica di $P^4(\mathbb{C})$ irriducibile, a punti 1-parabolici. Essa è luogo di un sistema Σ ∞^2 di rette lungo la generica delle quali l'iperpiano tangente a V_3 è fisso. Sia $W_d(0 \leq d \leq 2)$, il luogo dei fuochi di V_3 (per la nozione di fuoco cfr. ad esempio [9]). Se $d = 0$, V_3 è un cono e la sua hessiana è indeterminata.

In [4] sono completamente determinate le V_3 contenute multiplamente nella propria hessiana per le quali $d = 1$, che risultano pure a hessiana indeterminata.

Per il caso $d = 2$ i risultati contenuti in [4] e in [5] non sono conclusivi e si riassumono negli enunciati seguenti:

a) se un'ipersuperficie V_3 del tipo indicato esiste, essa ha ordine nove;
b) una tale ipersuperficie, ove esista, ha l'hessiana determinata.

In questo lavoro si proverà che ipersuperfici siffatte non esistono. Di qui segue, tenuto conto anche dei risultati contenuti in [8], relativi a ipersuperfici con 2-parabolici, che:

Non esistono in $P^4(\mathbb{C})$ ipersuperfici algebriche irriducibili a hessiana determinata, contenute multiplamente nella propria hessiana.

Il lavoro è così articolato. Il n. 2 è dedicato ai necessari richiami. Nel n. 3 si dà la dimostrazione completa della proposizione **a)**, sopra ricordata, che in [4] era soltanto accennnata. Nel n. 4 si prova che non esiste una ipersuperficie siffatta.

2. - Consideriamo un'ipersuperficie irriducibile dello spazio $P^r(\mathbb{C})$ (che nel seguito sarà indicato semplicemente con P^r), d'equazione $f(x_0, \ldots, x_r) = 0$, d'ordine $n \geq 3$, che indicheremo indifferentemente con V_{r-1} o con f. Sia P un suo punto semplice e sia $A(P)$ il luogo delle rette di P^r passanti per P ed aventi con f in P molteplicità d'intersezione maggiore o uguale a tre.

E' ben noto che si possono verificare le seguenti due circostanze:

— $A(P)$ coincide con l'iperpiano tangente a f in P ed in tal caso si dice che P è un punto di flesso per f;
— $A(P)$ è un cono quadrico, di dimensione $r-2$, avente un punto doppio in P, giacente nell'iperpiano tangente a f in P, detto *cono asintotico* a f in P.

Definizione 1. Un punto semplice P si dice h-parabolico per f, con $1 \leq h < r-1$, se il vertice di $A(P)$ è un sottospazio lineare h-dimensionale dell'iperpiano tangente a f in P, e $(r-1)$-parabolico se è un flesso.

Se f è a punti h-parabolici, f è costituita da un sistema algebrico irriducibile $\Sigma(f)$, di dimensione $r - h - 1$, di h-sottospazi di P^r e in ogni punto semplice appartenente al generico sottospazio di $\Sigma(f)$, f ha lo stesso iperpiano tangente.

Indichiamo con $H(f)$ il determinante (polinomio) hessiano di f:

$$H(f) = \det\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x_i \partial x_j}\right)_{i,j=0,\ldots,n} .$$

Definizione 2. L'ipersuperficie definita dall'equazione $H(f) = 0$, è l'hessiana di f, se $H(f)$ non è identicamente nullo. Si dice che f ha l'hessiana indeterminata se il determinante hessiano è identicamente nullo. In caso contrario si dice che f ha hessiana determinata.

E' noto che se f è a punti h-parabolici, il polinomio f^h divide il polinomio hessiano $H(f)$ di f.

Se f^r divide $H(f)$ per $r > h$ diremo che f è componente multipla della sua hessiana. Ciò in particolare si verifica se f ha hessiana indeterminata. Nel seguito si farà spesso uso della seguente

Proposizione 3. (cfr. [4]) *Se V_{r-1} è un'ipersuperficie algebrica irriducibile di P^r a punti 1-parabolici, condizione necessaria e sufficiente perchè essa sia componente multipla dell'hessiana è che ogni piano passante per la retta generica r di $\Sigma := \Sigma(f)$, e non contenuto nell'iperpiano tangente a V_{r-1} lungo r, intersechi V_{r-1}, fuori di r, in una curva avente con r un solo punto in comune.*

Un'estensione di questa proposizione alle ipersuperfici a punti h-parabolici, per $h > 1$ è contenuta in [8], pag. 26.

La Proposizione 3 comporta:

Corollario 4. *Se r è la retta generica di Σ, si ha:*

1) *i fuochi del sistema Σ, che appartengono a r coincidono in un unico punto;*
2) *le rette di Σ incidenti la retta r, la incontrano nel fuoco appartenente ad essa.*

Per la teoria generale dei fuochi cfr. [9] e [7], pag. 89.

3. - Dimostreremo in questo numero il

Teorema 5. *Un'ipersuperficie algebrica irriducibile di P^4 a punti 1-parabolici, contenuta multiplamente nella propria hessiana e con schema dei fuochi di dimensione due, se esiste, ha ordine nove.*

Dimostrazione. Sia V_3^n l'ipersuperficie considerata, d'ordine n, e sia W una componente bidimensionale del luogo dei fuochi.

Com'è dimostrato in [4], W è una superficie che è dotata di un sistema di linee asintotiche e V_3^n è il luogo delle tangenti a tali linee. Ricordo peraltro che una curva C di una superficie W di P^r si dice un'asintotica di W se in ogni punto p liscio per C e W il piano osculatore a C è tangente a W.

In conseguenza della Proposizione 3, la molteplicità d'intersezione della generica retta r di Σ con l'intersezione residua C^{n-1} di V_3 con un piano generico per r, nel fuoco appartenente ad r, è uguale a $n-1$.

Il Teorema 5 sarà provato se verificheremo che C^{n-1} passa per il fuoco con due rami lineari aventi contatto del terz'ordine, e non superiore, con r. Di qui infatti segue che l'ordine di V_3^n, supposta esistente, è nove.

Per effettuare la verifica possiamo metterci in coordinate affini e supponiamo che la superficie W dei fuochi di Σ sia rappresentata in un intorno del suo punto generico O, dalle equazioni parametriche:

$$x^i = c^i(u_1, u_2) \qquad (i = 1, \dots, 4)$$

ove O corrisponde a $u_1 = u_2 = 0$ e le c^i sono definite ed analitiche in un intorno D dell'origine del piano (u_1, u_2).

Si denoteranno con l'indice in alto le componenti del vettore $\boldsymbol{c}$, mentre la derivazione rispetto a u_i sarà indicata con un indice in basso.

Supponiamo i parametri u_1, u_2 scelti in modo che le linee $du_2 = 0$ siano le linee asintotiche di W.

Supponiamo inoltre il riferimento di $\mathbb{C}^4$ scelto in modo che l'origine sia il punto O, le tangenti alle linee $du_1 = 0$ e $du_2 = 0$ siano rispettivamente le rette rappresentate dalle equazioni $x^1 = x^3 = x^4 = 0$ e $x^2 = x^3 = x^4 = 0$, in modo che il piano tangente a W in O abbia equazioni $x^3 = x^4 = 0$.

Si consideri la matrice:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{c_{11}} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Essendo le linee $du_2 = 0$ asintotiche, tale matrice ha tutti i minori di ordine massimo identicamente nulli.

Per le ipotesi fatte sul riferimento, si ha:

$$\begin{aligned} c_1^2(\mathbf{0}) = c_1^3(\mathbf{0}) = c_1^4(\mathbf{0}) = 0 \\ c_2^1(\mathbf{0}) = c_2^3(\mathbf{0}) = c_2^4(\mathbf{0}) = 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Nell'origine e quindi in un suo intorno, che si può supporre coincidente con D, si ha:

$$\begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 \\ c_2^1 & c_2^2 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Siano:

$$c^i(u_1, u_2) = \alpha_1^i u_1 + \alpha_2^i u_2 + \alpha_{11}^i u_1^2 + \alpha_{12}^i u_1 u_2 + \alpha_{22}^i u_2^2 + \cdots \tag{3}$$

per $i = 1, \ldots, 4$ gli sviluppi in serie delle c^i.

Per le (2) si ha:

$$\alpha_1^2 = \alpha_1^3 = \alpha_1^4 = 0$$

$$\alpha_2^1 = \alpha_2^3 = \alpha_2^4 = 0 .$$

Si può supporre, poi:

$$\alpha_1^1 = \alpha_2^2 = 1 .$$

La matrice (1) ha rango 2 se valgono identicamente le relazioni:

$$c_1^2 c_2^3 c_{11}^1 + c_1^1 c_2^2 c_{11}^3 + c_1^3 c_2^1 c_{11}^2 - c_1^3 c_2^2 c_{11}^1 - c_1^1 c_2^3 c_{11}^2 - c_2^1 c_1^2 c_{11}^3 = 0$$

$$c_1^2 c_2^4 c_{11}^1 + c_1^1 c_2^2 c_{11}^4 + c_1^4 c_2^1 c_{11}^2 - c_1^4 c_2^2 c_{11}^1 - c_1^1 c_2^4 c_{11}^2 - c_2^1 c_1^2 c_{11}^4 = 0 .$$

Tenendo conto delle (3), esse danno luogo ad un'infinità di relazioni fra i coefficienti α. Si ha in particolare:

$$\alpha_{11}^i = 0$$

$$\alpha_{111}^i = \frac{1}{3}\alpha_{11}^2 \alpha_{12}^i$$

$$\alpha_{112}^i = \alpha_{11}^1 \alpha_{12}^i + 2\alpha_{11}^2 \alpha_{22}^i$$

$$\alpha_{1111}^i = \frac{1}{2}\alpha_{111}^2 \alpha_{12}^i - \frac{1}{2}\alpha_{11}^1 \alpha_{111}^i - \frac{1}{2}\alpha_{12}^2 \alpha_{111}^i + \frac{1}{6}\alpha_{11}^2 \alpha_{112}^i \tag{4}$$

....

....

per $i = 3, 4$.

La tangente t alla linea asintotica nel punto variabile $Q(u_1, u_2)$ di W è rappresentata dalle equazioni:

$$\frac{x^1 - c^1}{c_1^1} = \frac{x^2 - c^2}{c_1^2} = \frac{x^3 - c^3}{c_1^3} = \frac{x^4 - c^4}{c_1^4} .$$

Esse rappresentano anche la V_3, in quanto questa è descritta da tali tangenti.

Ci proponiamo ora di studiare la sezione C^{n-1} di V_3^n con un piano generico, π, per l'asse $x^2 = x^3 = x^4 = 0$. Si può supporre il riferimento scelto in modo che π sia rappresentato dalle equazioni $x^2 = x^4 = 0$. Si ha allora che t è incidente a π se, e soltanto se:

$$\frac{c^2}{c_1^2} = \frac{c^4}{c_1^4} .$$

Considerata la matrice $\begin{pmatrix} c \\ c_1 \end{pmatrix}$ ne denoteremo con Δ_{ij} il minore determinato dalle colonne di posto i, j, con $1 \le i < j \le 4$. Allora la precedente condizione si scrive anche $\Delta_{24} = 0$, mentre per il punto d'intersezione di t con π si ha:

$$x^1 = \frac{\Delta_{12}}{c_1^2} \qquad x^3 = -\frac{\Delta_{23}}{c_1^2} . \tag{5}$$

Si denoti con Γ la curva del piano (u_1, u_2) rappresentata dall'equazione:

$$\begin{gathered}\Delta_{24} = \alpha_{12}^4 u_2^2 + (2\alpha_{112}^4 - 2\alpha_{11}^2 \alpha_{22}^4) u_1 u_2^2 + \cdots + \alpha_{11}^2 \alpha_{111}^4 u_1^4 + \\ + (4\alpha_{1111}^4 + 2\alpha_{12}^2 \alpha_{111}^4 - 2\alpha_{12}^4 \alpha_{111}^2) u_1^3 u_2 + \cdots + 2\alpha_{11}^2 \alpha_{1111}^4 u_1^5 + \cdots = 0,\end{gathered} \tag{6}$$

dove sono stati esplicitati i termini dello sviluppo in serie utili per il seguito.

Dalla (6) risulta subito che Γ è costituita in un intorno dell'origine da due rami lineari, rappresentati dall'equazione:

$$u_2 = \delta u_1^2 + \mu u_1^3 + \cdots \tag{7}$$

E' facile verificare, sostituendo (7) in (6), che $\delta = \theta \alpha_{11}^2$, con $\theta = \pm i\sqrt{3}/3$.

Il valore di μ si ottiene ancora sostituendo (6) in (7) e annullando il coefficiente di u_1^5. Il calcolo di μ è rilevante, per trovare il contatto dei rami con la retta $x^2 = x^3 = x^4 = 0$. Esso si ricava dall'equazione:

$$2a\delta\mu + b\delta^2 + e\delta + j = 0 \tag{8}$$

dove

$$\begin{aligned} a &= \alpha^4_{12} \\ b &= 2\alpha^4_{112} - 2\alpha^2_{11}\alpha^4_{22} \\ e &= 4\alpha^4_{1111} + 2\alpha^2_{12}\alpha^4_{111} - 2\alpha^4_{12}\alpha^2_{111} \\ j &= 2\alpha^2_{11}\alpha^4_{1111} \end{aligned}$$

e tenendo conto delle (4).

Sostituendo l'espressione di u_2, fornita dalla (7) nelle (5), si ottiene:

$$x^1 = \frac{-\theta+1}{2}u_1 + \cdots, \qquad x^3 = \frac{2}{3}\theta\alpha^2_{11}(\alpha^3_{22}\alpha^4_{12} - \alpha^3_{12}\alpha^4_{22})u_1^4 + \cdots . \tag{9}$$

Resta così provato che C passa per l'origine con due rami lineari, che hanno un contatto del terzo ordine almeno con la retta $x^2 = x^3 = x^4 = 0$.

Resta da provare che:

Lemma 6. *Il contatto tra ognuno dei rami rappresentati dalla (9) e la retta $x^2 = x^3 = x^4 = 0$ non può essere d'ordine superiore a tre.*

Dimostrazione. Osserviamo che α^2_{11} non può essere identicamente nullo. Se lo fosse, infatti, la retta $x^2 = x^3 = x^4 = 0$ sarebbe una tangente di flesso alla curva asintotica $du_2 = 0$ nel punto $u_1 = u_2 = 0$. Per la genericità di tale punto sulla superficie W le curve asintotiche sarebbero rette, il che è assurdo.
Bisogna inoltre verificare che $\alpha^3_{22}\alpha^4_{12} - \alpha^3_{12}\alpha^4_{22} \neq 0$.

Si considerino allo scopo gli iperpiani di equazioni $x^3 = 0$, $x^4 = 0$. Le immagini sul piano (u_1, u_2) delle curve intersezioni di W con i detti iperpiani, hanno equazioni:

$$\alpha^i_{12}u_1u_2 + \alpha^i_{22}u_2^2 + \cdots = 0$$

per $i = 3, 4$ e pertanto le due curve presentano nell'origine un punto doppio con le tangenti principali di equazione:

$$u_2 = 0 \quad \text{e} \quad \alpha^i_{12}u_1 + \alpha^i_{22}u_2 = 0, \qquad \text{per } i = 3, 4.$$

Se fosse $\alpha^3_{22}\alpha^4_{12} - \alpha^3_{12}\alpha^4_{22} = 0$, le due coppie di tangenti coinciderebbero ed il generico iperpiano tangente $\sigma c^3 + \mu c^4 = 0$ segherebbe W in una curva, avente nell'origine un punto doppio con tangenti fisse.

La W dovrebbe soddisfare quindi due equazioni di Laplace. Ma com'è noto [9, pag. 97], ciò è possibile soltanto se W appartiene a un P^3 o è sviluppabile, circostanze che certamente non si verificano nel nostro caso, in quanto il luogo delle tangenti alle linee asintotiche di W è una V_3 appartenente a P^4.

Con ciò resta il Teorema 5. □

Notiamo che anche α^4_{12} non può essere identicamente nullo.

Infatti al variare dell'iperpiano tangente $\sigma x^3 + \mu x^4 = 0$, delle due tangenti nell'origine alla curva sezione con W, una è fissa ed è la retta $u_2 = 0$, mentre l'altra varia.

Se α^4_{12} fosse nullo, le due tangenti coinciderebbero per l'iperpiano $x^4 = 0$. Tale coincidenza avviene tuttavia per un solo iperpiano del fascio. Allora si può scegliere il riferimento in modo che l'iperpiano $x^4 = 0$ non sia quello per cui la seconda tangente coincida con la prima. Dunque si può supporre $\alpha^4_{12} \neq 0$. Analogamente per α^3_{12}.

4. - Si proverà ora il

Teorema 7. *Un'ipersuperficie algebrica irriducibile di $P^4(\mathbb{C})$ a punti 1-parabolici, avente hessiana determinata, non può essere contenuta multiplamente nella propria hessiana.*

Dimostrazione. Il teorema si proverà per assurdo, cioè ammettendo l'esistenza di un'ipersuperficie del tipo indicato, per la quale vale pertanto il Teorema 5, e mostrando che l'ipotesi conduce a una contraddizione.

Cominciamo col provare il

Lemma 8. *La superficie dei fuochi W ha ordine minore o uguale a quattro.*

Dimostrazione. Sia, come in precedenza, V_3 l'ipersuperficie considerata e sia W la superficie dei fuochi.

Con le notazioni e nelle ipotesi fatte nel corso della dimostrazione del Teorema 5, si studierà ora l'intersezione di V_3 con un piano generico π' per $\mathbf{0}$. Notiamo che, dovendo essere $\alpha^3_{12}\alpha^4_{22} - \alpha^4_{12}\alpha^3_{22} \neq 0$ (cfr. Lemma 6), possiamo assumere $\alpha^3_{22} \neq 0$ o $\alpha^4_{22} \neq 0$.

Assumiamo che accada la prima circostanza e prendiamo per π' il piano di equazioni $x^1 = x^3 = 0$.

La condizione di incidenza della retta t con π' è data da $\Delta_{13} = 0$, condizione che, usando le (4) assume la forma:

$$-\alpha^3_{22}u_2^2 + 2\alpha^3_{111}u_1^3 + 2\alpha^2_{11}\alpha^3_{22}u_1^2u_2 + \cdots = 0.$$

Detta C' l'intersezione di V_3 con π', si ha che essa, in un intorno di $\mathbf{0}$, ha equazioni parametriche:

$$x^2 = \frac{\Delta_{12}}{c^1_1} \qquad x^4 = \frac{\Delta_{14}}{c^1_1} \qquad \Delta_{13} = 0\,. \tag{10}$$

L'equazione $\Delta_{13} = 0$ rappresenta nel piano (u_1, u_2) una curva Γ'. Essa ha una cuspide nell'origine, rappresentata, in un suo intorno, dalle equazioni:

$$u_1 = s^2$$
$$u^2 = \sqrt{\frac{2\alpha^2_{11}\alpha^3_{12}}{3\alpha^3_{22}}}s^3 + \cdots$$

ove s è un nuovo parametro.

In corrispondenza, per le (10), nel piano $x^1 = x^3 = 0$ si ottiene un ramo di C' che è rappresentato dalle equazioni:

$$x^2 = \frac{\sqrt{2(\alpha^2_{11}\alpha^3_{12})}}{\sqrt{3(\alpha^3_{22})}}s^3 + \cdots$$

$$x^4 = \frac{2\alpha^2_{11}(\alpha^3_{12}\alpha^4_{22} - \alpha^3_{22}\alpha^4_{12})}{3\alpha^3_{22}}s^6 + \frac{\sqrt{2(\alpha^2_{11}\alpha^3_{12})}\alpha^1_{11}\alpha^4_{12}}{\sqrt{3(\alpha^3_{22})}}s^7 + \cdots$$

Si osservi che $\alpha^3_{12}\alpha^4_{22} - \alpha^4_{12}\alpha^3_{22}$è diverso da zero, per quanto si è visto nel corso della dimostrazione del Teorema 5.

Se fosse $\alpha^1_{11} \equiv 0$, per la superficie W si avrebbero le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
x^1 &= u_1 + \alpha^1_{12}u_1u_2 + \alpha^1_{22}u_2^2 + \alpha^1_{111}u_1^3 + \cdots \\
x^2 &= u_2 + \alpha^2_{11}u_1^2 + \alpha^2_{12}u_1u_2 + \alpha^2_{22}u_2^2 + \alpha^2_{111}u_1^3 + \cdots \\
x^3 &= \alpha^3_{12}u_1u_2 + \alpha^3_{22}u_2^2 + \alpha^4_{111}u_1^3 + \cdots \\
x^4 &= \alpha^4_{12}u_1u_2 + \alpha^4_{22}u_2^2 + \alpha^4_{111}u_1^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Consideriamo il generico iperpiano per l'asse x^1, ciò $x^2 + \lambda x^3 + \mu x^4 = 0$. Sia C la curva intersezione di W con tale iperpiano. Si ottiene allora nel piano (u_1, u_2) una curva Γ rappresentata dall'equazione:

$$u_2 + \alpha^2_{11}u_1^2 + (\alpha^2_{12} + \lambda\alpha^2_{13} + \mu\alpha^4_{12})u_1u_2 + (\alpha^2_{22} + \lambda\alpha^3_{22} + \mu\alpha^4_{22})u_2^2 + \cdots$$

Γ ha nell'origine un ramo lineare tangente alla linea u_1, rappresentata da uno sviluppo del tipo:

$$u_2 = hu_1^2 + ku_1^3 + \cdots,$$

con $h = -\alpha^2_{11}$, $k = \alpha^2_{12}\alpha^2_{11} + \lambda\alpha^2_{11}\alpha^2_{13} + \mu\alpha^2_{11}\alpha^4_{12}$.

In corrispondenza la curva C, intersezione di W con l'iperpiano, ha un ramo d'equazione:

$$\begin{aligned} x^1 &= u_1 + (\alpha^1_{12} - \alpha^2_{11})u_1^3 + \cdots \\ x^2 &= -\alpha^2_{12}\alpha^2_{11}u_1^3 + \cdots \\ x^3 &= -\alpha^2_{11}\alpha^3_{12}u_1^3 + \cdots \\ x^4 &= -\alpha^2_{11}\alpha^4_{12}u_1^3 + \cdots \end{aligned}$$

Nell'iperpiano si possono scegliere come coordinate x^1, x^2, x^3. Allora C è rappresentata da:

$$\begin{aligned} x^1 &= u_1 + \cdots + lu_1^3 + \cdots \\ x^2 &= \cdots mu_1^3 + \cdots \\ x^3 &= \cdots nu_1^3 + \cdots \end{aligned}$$

con $l = \alpha^1_{12} - \alpha^2_{11}$, $m = -\alpha^2_{12}\alpha^2_{11}$, $n = -\alpha^2_{11}\alpha^3_{12}$.

Poichè $\dfrac{d^2x^1}{du_1^2}, \dfrac{d^2x^2}{du_1^2}, \dfrac{d^2x^3}{du_1^2}$ sono nulle per $u_1 = 0$, la C ha il piano osculatore indeterminato, sicchè presenta un flesso con tangente, la tangente alla linea u_1. Dunque per la genericità del punto di W in cui stiamo lavorando, si ha che le linee u_1 sono rette e W sarebbe rigata, il che si esclude come nella dimostrazione del Lemma 6.

Ricordiamo che si ha anche $a^2_{11} \neq 0$, $\alpha^3_{12} \neq 0$, $\alpha^4_{12} \neq 0$.

Ne segue che C' presenta nell'origine due punti tripli infinitamente vicini che, ai fini del computo del genere, equivalgono a sei punti doppi, risultato che vale per tutte le intersezioni di π' con C'. Si osservi ora che essendo π' generico e V_3 una ipersuperficie irriducibile di ordine nove, C' è una curva irriducibile d'ordine nove e quindi genere non negativo. Pertanto il numero dei punti singolari di C' del tipo descritto e quindi il numero dei punti comuni a π' e W, ossia l'ordine di W, non supera 4. $\square$

Notiamo ora il risultato del Lemma 9 comporta una contraddizione, col fatto che W deve possedere un sistema di linee asintotiche, le cui tangenti riempiono la V_3. Ciò segue dalle considerazioni che andiamo a fare.

Osservazione 10. Ricordiamo intanto che, come si è osservato nel corso della dimostrazione del Lemma 6, W non può essere rigata, perchè non possiede un doppio sistema di linee asintotiche. Dunque non può essere una superficie del terz'ordine, perchè in tal caso sarebbe rigata o apparterebbe a un P^3. Resta soltanto da discutere l'ipotesi che W sia del quart'ordine. Una superficie del quart'ordine in $P^4(\mathbb{C})$ può essere rigata, a sezioni ellittiche, o la superficie di Veronese (cfr. [10], Cap. VIII).

E' utile a questo scopo, la seguente ovvia

Osservazione 11. Se sulla superficie W ci sono due fasci di curve (C) e (D) tali che per ogni punto di W ci sia una sezione iperpiana tangente contenente una curva di (C) e una di (D), le eventuali linee asintotiche di W sono o le curve del fascio (C) o le curve del fascio (D).

Ciò esclude che W sia a sezioni ellittiche. In tal caso, infatti, essa sarebbe rappresentata sul piano delle cubiche per cinque punti. Le rette per uno dei punti e le coniche per quattro dei punti rimanenti forniscono le immagini di due fasci di curve (C) e (D), soddisfacenti alle condizioni anzidette. Ma le curve di (C) e di (D), e quindi le linee asintotiche, sarebbero coniche, e ciò conduce a una contraddizione. Infatti se una conica fosse linea asintotica di W il piano π che la contiene sarebbe tangente a W in tutti i punti della conica. Ne seguirebbe che ogni iperpiano per π segherebbe W nella conica contata due volte, sicchè l'iperpiano passante per π e un punto di W esterno alla conica conterrebbe W, che invece appartiene a P^4. □

D'altra parte W non può essere la superficie di Veronese di P^4. Abbiamo infatti la seguente:

Osservazione 12. Una linea asintotica sulla superficie di Veronese in P^4 non può essere degenere.

Infatti essa non può essere una conica, per lo stesso motivo di cui all'osservazione 11. Se invece fosse una quartica razionale di P^3, lungo tale curva il piano tangente alla superficie coinciderebbe con il piano osculatore contenuto nel P^3, quindi l'iperpiano, che la contiene sarebbe tangente ovunque, il che è assurdo, per il teorema di Bézout. □

Lemma 13. *La superficie dei fuochi non può essere la superficie di Veronese di* P^4.

Dimostrazione. Supponiamo che lo sia e che abbia una famiglia di asintotiche. Poichè la superficie di Veronese in P^4 ha un gruppo ∞^3 di proiettività in sè , ogni asintotica ha almeno ∞^2 proiettività in sè.

Ma le curve che hanno più di ∞^1 proiettività in sè o sono degeneri, o sono curve razionali normali. Nel primo caso si ha una contraddizione per l'osservazione 12. Nel secondo caso la generica asintotica è proiezione di una sezione iperpiana che non passa per il centro di proiezione. Di tali sezioni iperpiane, che siano asintotiche, dovrebbero esisterne ∞^1.

Allora tra tali ∞^1 iperpiani, ce ne sarà uno per il centro di proiezione, e quindi c'è almeno un'asintotica che è sezione iperpiana della Veronese in P^4, e cioè è degenere, contraddizione. □

Osserviamo che un'altra dimostrazione del Lemma 13 si può altresì facilmente ottenere dall'analisi delle curve asintotiche della superficie romana di Steiner in P^3 (cfr. [10], pag. 85). Da essa risulta che il sistema delle asintotiche di tale superficie è irriducibile. Ciò comporta che la superficie di Veronese in P^4, di cui la superficie di Steiner è proiezione generica, non possiede un sistema di asintotiche.

Ricordando ora che le ipersuperfici a punti 2-parabolici contenute almeno triplamente nella propria hessiana sono coni, e dunque hanno hessiana indeterminata [8], il risultato ottenuto si può completare nel senso che:

Corollario 14. *Non esistono in $P^4(\mathbb{C})$ ipersuperfici algebriche irriducibili a hessiana determinata contenute multiplamente nella propria hessiana.*

Con ciò il problema posto da B. Segre resta completamente risolto per lo spazio $P^4(\mathbb{C})$.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. Ciliberto, *Ipersuperficie algebriche a punti parabolici e relative hessiane,* Rend. Accad. Naz. delle Scienze detta dei XL - Memorie di Matematica, (IV) 4 (1979), pp. 25–42.

[2] C. Ciliberto - E. Sernesi, *Singularities of the theta divisor and congruences of planes,* J. Algebraic Geometry, 1 (1992), pp. 231–350.

[3] F. Conforto, *Le Superfici Razionali,* Zanichelli, Bologna, 1939.

[4] A. Franchetta, *Forme algebriche sviluppabili e relative hessiane,* Atti Ac. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 10 (1951), pp. 1–4.

[5] A. Franchetta, *Sulle forme algebriche di S^4 aventi l'hessiana indeterminata,* Rend. Mat., (5) 13 (1954), pp. 1–6.

[6] C. Segre, *Su una classe di superficie degli iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine,* in Opere, vol. II (1906-07), pp. 20–49, Roma, 1958.

[7] C. Segre, *Preliminari di una teoria della varietà luoghi di spazio,* Rend. Circ. Mat. Palermo, 30 (1910), pp. 87–121.

[8] B. Segre, *Bertini forms and hessian matrices,* J. London Math. Soc., 26 (1951), pp. 164–176.

[9] B. Segre, *Sull'hessiana di taluni polinomi (determinanti, pfaffiani, discriminanti, risultanti, hessiani), note I e II,* Atti Ac. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 37 (1964), pp. 109–117 e pp. 215–221.

[10] B. Segre, *Prodromi di Geometria Algebrica,* Cremonese, Roma, 1972.

Dipartimento di Matematica e Appl. "R. Caccioppoli",
Università di Napoli,
Complesso Monte S. Angelo, Edif. T,
Via Cintia,
80126 Napoli (Italy)