LE MATEMATICHE
Vol. XLVIII (1993) – Fasc. II, pp. 331-347

DIFFERENZIABILITA' LOCALE PER SISTEMI PARABOLICI NON LINEARI DEL SECONDO ORDINE CON NON LINEARITA' $1 < q < 2$

LUISA FATTORUSSO

Let Ω be a bounded open subset of $\mathbb{R}^n$ and $X = (x, t)$ is a point of $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. In the cylinder $Q = \Omega \times (-T, 0)$, $T > 0$, we consider the solutions $u \in L^q(-T, 0, H^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^N)) \cap C^{0,\lambda}(\overline{Q}, \mathbb{R}^N)$ ($1 < q < 2$, $0 < \lambda < 1$, N integer > 1) of the non linear second order system of variational type

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i a^i(X, u, Du) + \frac{\partial u}{\partial t} = B^0(X, u, Du)$$

and we prove that they belong to the space

$$L^r(-a, 0, H^{1+\vartheta,r}(B(\sigma), \mathbb{R}^N)), \quad \forall \vartheta \in \left(0, \frac{q}{2}\right), \quad \forall q \le r < 2,$$

$\forall a \in (0, T)$ and $\forall B(\sigma) \subset\subset \Omega$.

Entrato in Redazione il 7 giugno 1994.

Lavoro eseguito con contributo finanziario del M.U.R.S.T. e nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

1. Introduzione.

La differenziabilità locale delle soluzioni $u \in H^{m,q} \cap C^{m-1,\lambda}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ ($m \in \mathbb{N}$, $q > 1$, $0 < \lambda < 1$) del sistema non lineare ellittico di ordine $2m$

$$\sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha a^\alpha(x, Du) = 0$$

è stata studiata da S. Campanato in [1], sia nel caso di non linearità $q \geq 2$, che nel caso di non linearità $1 < q < 2$ in ipotesi di forte ellitticità e supponendo che le derivate dei vettori a^α soddisfino condizioni di "andamento naturale".

Successivamente L. Fattorusso – M. Marino in [3] hanno stabilito risultati analoghi di differenziabilità per le soluzioni di classe $L^q(-T, 0, H^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^N)) \cap C^{0,\lambda}(\overline{Q}, \mathbb{R}^N)$ ($q \geq 2$, $0 < \lambda < 1$) del corrispondente sistema parabolico non lineare, con non linearità $q \geq 2$, supponendo che i coefficienti soddisfino condizioni di "andamento naturale" più deboli di quelle usuali (stretta monotonia).

Scopo di questa Nota è provare, nelle stesse ipotesi di [3], risultati di differenziabilità locale per le soluzioni, di classe $L^q(-T, 0, H^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^N)) \cap C^{0,\lambda}(\overline{Q}, \mathbb{R}^N)$ ($1 < q < 2$, $0 < \lambda < 1$), dello stesso sistema parabolico non lineare, con non linearità $1 < q < 2$.

2. Ipotesi e risultati.

Sia $u \in L^q(-T, 0, H^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^N)) \cap C^{0,\lambda}(\overline{Q}, \mathbb{R}^N)$ (1), $1 < q < 2$, $0 < \lambda < 1$, una soluzione del sistema non lineare del secondo ordine di tipo variazionale:

$$-\sum_{j=1}^{n} D_j a^j(X, u, Du) + \frac{\partial u}{\partial t} = B^0(X, u, Du), \tag{2.1}$$

nel senso che

$$\int_Q \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(a^j(X, u, Du) \mid D_j\varphi \right) - \left(u \middle| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right\} dX = \tag{2.2}$$

$$= \int_Q \left(B^0(X, u, Du) \mid \varphi \right) dX, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(Q, \mathbb{R}^N),$$

dove $a^j(X, u, p)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ e $B^0(X, u, p)$ sono vettori di $\mathbb{R}^N$, definiti in $\Lambda = Q \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$, misurabili in X, continui in (u, p) e soddisfacenti le seguenti condizioni:

(1) La nomenclatura e il simbolismo sono quelli di [3].

esiste $1 < q < 2$ *tale che*

(2.3) *per ogni* $x \in \Omega$, $y \in B\left(x, \frac{1}{\sqrt{2}} d_x\right)$ $(d_x = \operatorname{dist}(\{x\}, \partial\Omega) > 0)$, $t \in (-T, 0)$, $u, v \in \mathbb{R}^N$ *con* $\|u\|, \|v\| \leq K$, $p, \bar{p} \in \mathbb{R}^{nN}$, *risulta:*

$$\|B^0(X, u, p)\| \leq M(K) V^q(p) \; (^2),$$
$$\|B^0(x, t, u, p) - B^0(y, t, v, p)\| \leq M(K)(\|x - y\| + \|u - v\|) V^q(p),$$
$$\|B^0(X, u, p) - B^0(X, u, \bar{p})\| \leq M(K) \|p - \bar{p}\| (1 + \|p\|^2 + \|\bar{p}\|^2)^{\frac{q-1}{2}};$$

(2.4) *per ogni* $x \in \Omega$, $y \in B\left(x, \frac{1}{\sqrt{2}} d_x\right)$, $t \in (-T, 0)$, u, $v \in \mathbb{R}^N$ *con* $\|u\|, \|v\| \leq K$, $p \in \mathbb{R}^{nN}$, *risulta:*

$$\|a(X, u, p)\| \leq M(K) V^{q-1}(p) \; (^3),$$
$$\|a(x, t, u, p) - a(y, t, v, p)\| \leq M(K)(\|x - y\| + \|u - v\|) V^{q-1}(p);$$

(2.5) *le applicazioni* $p \to a^j(X, u, p)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $(X, u) \in Q \times \mathbb{R}^N$, *sono strettamente monotone con non linearità* $1 < q < 2$, *nel senso che esistono due costanti positive* $M(K)$ *e* $\nu(K)$ *tali che:*

$$\|a(X, u, p) - a(X, u, \bar{p})\| \leq M(K) \|p - \bar{p}\| (1 + \|p\|^2 + \|\bar{p}\|^2)^{\frac{q-2}{2}},$$
$$(a(X, u, p) - a(X, u, \bar{p}) \mid p - \bar{p}) \geq \nu(K) \|p - \bar{p}\|^2 (1 + \|p\|^2 + \|\bar{p}\|^2)^{\frac{q-2}{2}},$$

per ogni $(X, u) \in Q \times \mathbb{R}^N$ *con* $\|u\| \leq K$ *e per ogni* $p, \bar{p} \in \mathbb{R}^{nN}$;

proveremo che, per ogni cubo $B(\sigma) = B(x^0, \sigma) \subset\subset B(\sigma_0) = B(x^0, \sigma_0) \subset\subset \Omega$ e $\forall a, b \in (0, T)$ con $a < b$, risulta:

$$u \in L^r(-a, 0, H^{1+\vartheta, r}(B(\sigma), \mathbb{R}^N)), \quad \forall 0 < \vartheta < \frac{q}{2}, \quad \forall q \leq r < 2,$$

e si ha la seguente maggiorazione:

$$\int_{-a}^{0} |Du|^r_{\vartheta, r, B(\sigma)} dt \leq c(\nu, K, U, \vartheta, \lambda, r, \sigma, \sigma_0, a, b, n, q) \cdot$$
$$\cdot \int_{-b}^{0} dt \int_{B(\sigma_0)} (1 + \|Du\|)^q dx,$$

dove

$$K = \sup_Q \|u\|, \qquad U = [u]_{\lambda, \bar{Q}} = \sup_{\substack{X, Y \in \bar{Q} \\ X \neq Y}} \frac{\|u(X) - u(Y)\|}{d^\lambda(X, Y)} \; (^4).$$

---

(2) $V(p) = (1 + \|p\|^2)^{1/2}$.

(3) $a(X, u, p) = (a^1(X, u, p) \mid \ldots \mid a^n(X, u, p)) \in \mathbb{R}^{nN}$.

(4) $d(X, Y)$ è la metrica parabolica:

3. Alcune maggiorazioni.

Dimostriamo i seguenti lemmi:

Lemma 3.I. *Se* $u \in L^q(-T, 0, H^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^N)) \cap C^{0,\lambda}(\overline{Q}, \mathbb{R}^N)$, $1 < q < 2$, $0 < \lambda < 1$, *è una soluzione del sistema* (2.2) *e se valgono le ipotesi* (2.3), (2.4), (2.5), *allora, per ogni cubo* $B(3\sigma) = B(x^0, 3\sigma) \subset\subset \Omega$, $\forall a, b \in (0, T)$ *con* $a < b$, $\forall m$ *intero* $> \frac{2}{a}$, $\forall \psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *soddisfacente le* (3.3) *di* [2], *per ogni intero* i *con* $1 \le i \le n$ *e per ogni numero reale* h *con* $|h| < \sigma$, *si ha:*

$$(3.1) \qquad \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^2 \rho_m^2 \Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h} Du\|\Big)^{q-2} \|\tau_{i,h} Du\|^2 dx \le$$

$$\le c(\nu, K, \sigma, a, b, n, q) \left\{ \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h} Du\|\Big)^q \|\tau_{i,h} u\|^2 dx + \right.$$

$$\left. + |h|^2 \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(3\sigma)} (1 + \|Du\|)^q dx \right\},$$

dove $\tau_{i,h} v(X) = v(x + he^i, t) - v(X)$ (5), $K = \sup\limits_Q \|u\|$ *e* $\rho_m(t)$ *è la funzione reale definita in* $\mathbb{R}$ *dalle* (3.4) *di* [2].

Dimostrazione. Fissati $B(3\sigma) = B(x^0, 3\sigma) \subset\subset \Omega$ e $a, b \in (0, T)$ con $a < b$; siano $\psi(x)$, $\rho_m(t)$ e $g_s(t)$ le funzioni reali definite nella dimostrazione del Teorema 3.I di [2].

Detti i un intero, $1 \le i \le n$, ed h un numero reale con $|h| < \sigma$, assumiamo nella (2.2), per ogni $m > \frac{2}{a}$ e $\forall s > \max\left(m, \frac{1}{T-b}\right)$:

$$\varphi = \tau_{i,-h} \left\{ \psi^2 \rho_m \Big[(\rho_m \tau_{i,h} u) * g_s \Big] \right\}.$$

Ragionando come nella dimostrazione del Teorema 3.I di [3] (cfr. la (3.6) di [3]) si ottiene

$$(3.2) \qquad A = \int_Q \psi^2 \rho_m^2 \sum_{j=1}^n (a^j(X, u(X), Du(X) + \tau_{i,h} Du(X)) -$$

$$d(X, Y) = \max\{\|x - y\|, |t - \tau|^{1/2}\}, \ X = (x, t), \ Y = (y, \tau).$$

(5) $\{e^i\}_{i=1,2,\dots,n}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

$$- a^j(X, u(X), Du(X)) \mid \tau_{i,h} D_j u) dX =$$

$$= -2 \int_Q \psi \rho_m^2 \sum_{j=1}^n (a^j(X, u(X), Du(X) + \tau_{i,h} Du(X)) -$$

$$- a^j(X, u(X), Du(X)) \mid D_j \psi \tau_{i,h} u) dX -$$

$$- \int_Q \sum_{j=1}^n (a^j(X, u(X) + \tau_{i,h} u(X), Du(X) + \tau_{i,h} Du(X)) -$$

$$- a^j(X, u(X), Du(X) + \tau_{i,h} Du(X)) \mid D_j(\psi^2 \rho_m^2 \tau_{i,h} u)) dX -$$

$$- \int_Q \sum_{j=1}^n (a^j(x + he^i, t, u(X) + \tau_{i,h} u(X), Du(X) + \tau_{i,h} Du(X)) -$$

$$- a^j(X, u(X) + \tau_{i,h} u(X), Du(X) + \tau_{i,h} Du(X)) \mid D_j(\psi^2 \rho_m^2 \tau_{i,h} u)) dX +$$

$$+ \int_Q \psi^2 \rho_m \rho_m' \|\tau_{i,h} u\|^2 dX + \int_Q \psi^2 \rho_m^2 (B^0(x + he^i, t, u(X) + \tau_{i,h} u(X), Du(X) +$$

$$+ \tau_{i,h} Du(X)) - B^0(X, u(X) + \tau_{i,h} u(X), Du(X) + \tau_{i,h} Du(X)) \mid \tau_{i,h} u) dX +$$

$$+ \int_Q \psi^2 \rho_m^2 (B^0(X, u(X) + \tau_{i,h} u(X), Du(X) + \tau_{i,h} Du(X)) -$$

$$- B^0(X, u(X), Du(X) + \tau_{i,h} Du(X)) \mid \tau_{i,h} u) dX +$$

$$+ \int_Q \psi^2 \rho_m^2 (B^0(X, u(X), Du(X) + \tau_{i,h} Du(X)) -$$

$$- B^0(X, u(X), Du(X)) \mid \tau_{i,h} u) dX = B + C + D + E + F + G + H.$$

In virtù della ipotesi (2.5), il primo membro della (3.2) si minora in questo modo:

(3.3) $$A \geq \nu(K) \cdot$$

$$\cdot \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^2 \rho_m^2 \Big(1 + \|Du + \tau_{i,h} Du\|^2 + \|Du\|^2\Big)^{(q-2)/2} \|\tau_{i,h} Du\|^2 dx \geq$$

$$\geq \frac{\nu(K)}{3^{\frac{2-q}{2}}} \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^2 \rho_m^2 \Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h} Du\|\Big)^{q-2} \|\tau_{i,h} Du\|^2 dx.$$

Infatti

$$1 + \|Du + \tau_{i,h}Du\|^2 + \|Du\|^2 \le 1 + 3\|Du\|^2 + 2\|\tau_{i,h}Du\|^2 \le$$

$$\le 3(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h}Du\|)^2,$$

da cui, essendo $\frac{q-2}{2} < 0$

$$(1 + \|Du + \tau_{i,h}Du\|^2 + \|Du\|^2)^{\frac{q-2}{2}} \ge 3^{\frac{q-2}{2}}(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h}Du\|)^{q-2}$$

e quindi

$$\psi^2\rho_m^2(1 + \|Du + \tau_{i,h}Du\|^2 + \|Du\|^2)^{\frac{q-2}{2}}\|\tau_{i,h}Du\|^2 \ge$$

$$\ge \frac{1}{3^{\frac{2-q}{2}}}\psi^2\rho_m^2\Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h}Du\|\Big)^{q-2}\|\tau_{i,h}Du\|^2.$$

Maggioriamo adesso i termini B, C, D, E, F, G, H con la stessa tecnica adoperata nella dimostrazione del Teorema 3.I di [3].

Grazie all'ipotesi (2.5) si ha che

$$|B| \le c(K, \sigma, n)\cdot \tag{3.4}$$

$$\cdot\int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \psi\rho_m^2\Big(1 + \|Du + \tau_{i,h}Du\|^2 + \|Du\|^2\Big)^{\frac{q-2}{2}}\cdot$$

$$\cdot\|\tau_{i,h}Du\|\cdot\|\tau_{i,h}u\|dx.$$

D'altra parte risulta:

$$1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h}Du\| = 1 + \|Du\| + \|(Du + \tau_{i,h}Du) - Du\| \le$$

$$\le 1 + \|Du + \tau_{i,h}Du\| + 2\|Du\|,$$

da cui

$$(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h}Du\|)^2 \le 3(1 + \|Du + \tau_{i,h}Du\|^2 + 4\|Du\|^2) \le$$

$$\le 12\,(1 + \|Du + \tau_{i,h}Du\|^2 + \|Du\|^2)$$

e quindi, essendo $(q-2)/2 < 0$

$$(1 + \|Du + \tau_{i,h}Du\|^2 + \|Du\|^2)^{\frac{q-2}{2}} \le 12^{\frac{2-q}{2}}(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h}Du\|)^{q-2}. \tag{3.5}$$

Dalle (3.4) e (3.5) si deduce allora

$$|B| \leq c(K, \sigma, n, q) \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \psi \rho_m^2 \Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h} Du\|\Big)^{q-2} \cdot$$

$$\cdot \|\tau_{i,h} Du\| \|\tau_{i,h} u\| \, dx,$$

da cui, per ogni $\varepsilon > 0$, segue che (vedi [3]):

$$(3.6) \qquad |B| \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^2 \rho_m^2 \Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h} Du\|\Big)^{q-2} \|\tau_{i,h} Du\|^2 dx +$$

$$+ c(K, \sigma, n, q, \varepsilon) \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h} Du\|\Big)^{q} \|\tau_{i,h} u\|^2 dx.$$

Analogamente si ha:

$$(3.7) \qquad |C| \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^2 \rho_m^2 \Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h} Du\|\Big)^{q-2} \|\tau_{i,h} Du\|^2 dx +$$

$$+ c(K, \sigma, n, \varepsilon) \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h} Du\|\Big)^{q} \|\tau_{i,h} u\|^2 dx,$$

$$(3.8) \qquad |D| \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^2 \rho_m^2 \Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h} Du\|\Big)^{q-2} \|\tau_{i,h} Du\|^2 dx +$$

$$+ c(K, \sigma, n, q, \varepsilon) |h|^2 \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(3\sigma)} \Big(1 + \|Du\|\Big)^{q} dx.$$

Si ha inoltre

$$(3.9) \qquad E = \int_Q \psi^2 \rho_m \rho_m' \|\tau_{i,h} u\|^2 dX \leq \frac{1}{b-a} \int_{-b}^{-a} dt \int_{B(2\sigma)} \|\tau_{i,h} u\|^2 dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{b-a} \int_{-b}^{-a} dt \int_{B(2\sigma)} \Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h} Du\|\Big)^{q} \|\tau_{i,h} u\|^2 dx.$$

Infine i termini F, G ed H si possono così maggiorare (vedi ancora [3], Teorema 3.I):

$$|F| \leq c(K,q)|h|^2 \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(3\sigma)} \Big(1+\|Du\|\Big)^q dx + \tag{3.10}$$

$$+ \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \Big(1+\|Du\|+\|\tau_{i,h}Du\|\Big)^q \|\tau_{i,h}u\|^2 dx,$$

$$|G| \leq c(K) \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \Big(1+\|Du\|+\|\tau_{i,h}Du\|\Big)^q \|\tau_{i,h}u\|^2 dx, \tag{3.11}$$

$$|H| \leq \tag{3.12}$$

$$\varepsilon \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^2 \rho_m^2 \Big(1+\|Du\|+\|\tau_{i,h}Du\|\Big)^{q-2} \|\tau_{i,h}Du\|^2 dx +$$

$$+ c(K,q,\varepsilon) \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \Big(1+\|Du\|+\|\tau_{i,h}Du\|\Big)^q \|\tau_{i,h}u\|^2 dx, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Mediante le (3.2), (3.3), (3.6) – (3.12) (con ε convenientemente scelto) si ha:

$$\int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^2 \rho_m^2 \Big(1+\|Du\|+\|\tau_{i,h}Du\|\Big)^{q-2} \|\tau_{i,h}Du\|^2 dx \leq$$

$$\leq c(\nu,K,\sigma,a,b,n,q) \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \Big(1+\|Du\|+\|\tau_{i,h}Du\|\Big)^q \|\tau_{i,h}u\|^2 dx +$$

$$+ c(\nu,K,\sigma,n,q)|h|^2 \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(3\sigma)} \Big(1+\|Du\|\Big)^q dx$$

che è la (3.1).

Lemma 3.II. *Se* $u \in L^{q+\frac{2\eta}{2-q}}\Big(-b, -\frac{1}{m}, H_{\mathrm{loc}}^{1,q+\frac{2\eta}{2-q}}(\Omega, \mathbb{R}^N)\Big)$, $1 < q < 2$, $0 \leq \eta < 2-q$, $b > 0$, m *intero* $> \frac{2}{a}$ *con* $a \in (0,b)$, *allora, per ogni cubo* $B(3\sigma) = B(x^0, 3\sigma) \subset\subset \Omega$, $\forall \psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *soddisfacente le* (3.3) *di* [2], *per* *ogni intero* i *con* $1 \leq i \leq n$ *e per ogni numero reale* h *con* $|h| < \sigma$, *si ha la maggiorazione:*

$$(3.13)\qquad \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^2 \rho_m^2 \Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h} Du\|\Big)^{\eta} \|\tau_{i,h} Du\|^q dx \leq$$

$$\leq c \left(\int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^2 \rho_m^2 \Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h} Du\|\Big)^{q-2} \|\tau_{i,h} Du\|^2 dx \right)^{q/2} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(3\sigma)} \Big(1 + \|Du\|\Big)^{q + \frac{2\eta}{2-q}} dx \right)^{1-q/2},$$

dove $\rho_m(t)$ *è la funzione reale definita in* $\mathbb{R}$ *dalle* (3.4) *di* [2].

Dimostrazione. In $B(2\sigma) \times (-b, -1/m)$, si ha:

$$(3.14)\qquad \psi^2 \rho_m^2 \Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h} Du\|\Big)^{\eta} \|\tau_{i,h} Du\|^q =$$

$$= \left[\psi^q \cdot \rho_m^q \Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h} Du\|\Big)^{(q-2)\frac{q}{2}} \|\tau_{i,h} Du\|^q \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\psi^{2-q} \rho_m^{2-q} \Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h} Du\|\Big)^{\eta + (2-q)\frac{q}{2}} \right].$$

La (3.13) è conseguenza della disuguaglianza di Hölder applicata alla (3.14).

Lemma 3.III. *Se* $u \in L^{q + \frac{2\eta}{2-q}}\Big(-b, -\rho, H_{\text{loc}}^{1, q + \frac{2\eta}{2-q}}(\Omega, \mathbb{R}^N)\Big) \cap C^{0,\lambda}(\overline{Q}, \mathbb{R}^N)$, $1 < q < 2$, $0 \leq \eta < 2 - q$, $0 \leq \rho < b$, $0 < \lambda < 1$, *allora,* $\forall B(3\sigma) = B(x^0, 3\sigma) \subset\subset \Omega$ *e* $|h| < \sigma$, *si ha:*

$$(3.15)\qquad \sum_{i=1}^{n} \int_{-b}^{-\rho} dt \int_{B(2\sigma)} \Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h} Du\|\Big)^{q} \|\tau_{i,h} u\|^2 dx \leq$$

$$\leq c(U) |h|^{2\lambda + (1-\lambda)\frac{2\eta}{2-q}} \int_{-b}^{-\rho} dt \int_{B(3\sigma)} \Big(1 + \|Du\|\Big)^{q + \frac{2\eta}{2-q}} dx,$$

dove $U = [u]_{\lambda, \overline{Q}}$.

Vedi [1], Lemma 5.II.

4. Differenziabilità delle soluzioni del sistema (2.2).

Teorema 4.I. *Se* $u \in L^q(-T, 0, H^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^N)) \cap C^{0,\lambda}(\overline{Q}, \mathbb{R}^N)$, $1 < q < 2$, $0 < \lambda < 1$, *è una soluzione del sistema* (2.2) *e se valgono le ipotesi* (2.3), (2.4), (2.5), *allora, per ogni cubo* $B(3\sigma) = B(x^0, 3\sigma) \subset\subset \Omega$, $\forall a, b \in (0, T)$ *con* $a < b$ *e* $\forall \vartheta_0 \in (0, \lambda)$

$$u \in L^q(-a, 0, H^{1+\vartheta_0,q}(B(\sigma), \mathbb{R}^N)) \tag{4.1}$$

e vale la seguente maggiorazione

$$\int_{-a}^{0} |Du|^q_{\vartheta_0,q,B(\sigma)} dt \leq \tag{4.2}$$

$$\leq c(\nu, K, U, \vartheta_0, \lambda, \sigma, a, b, n, q) \int_{-b}^{0} dt \int_{B(3\sigma)} \Big(1 + \|Du\|\Big)^q dx,$$

dove $K = \sup\limits_{Q} \|u\|$, $U = [u]_{\lambda,\overline{Q}}$.

Dimostrazione. Fissati $B(3\sigma) = B(x^0, 3\sigma) \subset\subset \Omega$, $a, b \in (0, T)$ con $a < b$ e $\vartheta_0 \in (0, \lambda)$, siano $\psi(x)$ e $\rho_m(t)$ le funzioni reali verificanti le (3.3) e (3.4) di [2].

Dalla (3.1) e dal fatto che $u \in C^{0,\lambda}(\overline{Q}, \mathbb{R}^N)$, segue, per ogni $|h| < h_0 = \min(1, \sigma)$:

$$\int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^2 \rho_m^2 \Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h} Du\|\Big)^{q-2} \|\tau_{i,h} Du\|^2 dx \leq \tag{4.3}$$

$$\leq c(\nu, K, U, \sigma, a, b, n, q) |h|^{2\lambda} \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(3\sigma)} \Big(1 + \|Du\|\Big)^q dx.$$

D'altra parte per il Lemma 3.II (nel quale assumiamo $\eta = 0$) si ha

$$\int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^2 \rho_m^2 \|\tau_{i,h} Du\|^q dx \leq \tag{4.4}$$

$$\leq c\Big(\int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^2 \rho_m^2 \Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h} Du\|\Big)^{q-2} \|\tau_{i,h} Du\|^2 dx\Big)^{q/2} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(3\sigma)} \Big(1 + \|Du\|\Big)^q dx \right)^{1-q/2}.$$

Dalle (4.3) e (4.4) si deduce allora

$$\int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^2 \rho_m^2 \|\tau_{i,h} Du\|^q dx \leq$$

$$\leq c(\nu, K, U, \sigma, a, b, n, q)|h|^{\lambda q} \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(3\sigma)} \left(1 + \|Du\|\right)^q dx$$

da cui

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{-a}^{-2/m} dt \int_{B(\sigma)} \|\tau_{i,h} Du\|^q dx \leq \tag{4.5}$$

$$\leq c(\nu, K, U, \sigma, a, b, n, q)|h|^{\lambda q} \int_{-b}^{0} dt \int_{B(3\sigma)} \left(1 + \|Du\|\right)^q dx.$$

Dalla (4.5) si ricava infine, passando al limite per $m \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{-a}^{0} dt \int_{B(\sigma)} \|\tau_{i,h} Du\|^q dx \leq \tag{4.6}$$

$$\leq c(\nu, K, U, \sigma, a, b, n, q)|h|^{\lambda q} \int_{-b}^{0} dt \int_{B(3\sigma)} \left(1 + \|Du\|\right)^q dx.$$

Questa disuguaglianza è banalmente verificata anche per $h_0 \leq |h| < 2\sigma$ ([6]).

Dalla (4.6) si ottiene allora, essendo $\vartheta_0 \in (0, \lambda)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{-a}^{0} dt \int_{-2\sigma}^{2\sigma} \frac{dh}{|h|^{1+\vartheta_0 q}} \int_{B(\sigma)} \|\tau_{i,h} Du\|^q dx \leq$$

$$\leq c(\nu, K, U, \vartheta_0, \lambda, \sigma, a, b, n, q) \int_{-b}^{0} dt \int_{B(3\sigma)} \left(1 + \|Du\|\right)^q dx,$$

da cui, in virtù del Lemma 2.II di [3], seguono facilmente le (4.1) e (4.2).

([6]) La costante c dipenderà dagli argomenti: $\nu, K, U, \sigma, a, b, n, q, \lambda$.

Teorema 4.II. *Se* $u \in L^{q+\frac{2\eta}{2-q}}(-T, 0, H^{1,q+\frac{2\eta}{2-q}}(\Omega, \mathbb{R}^N)) \cap C^{0,\lambda}(\overline{Q}, \mathbb{R}^N)$, $1 < q < 2$, $0 \leq \eta < 2-q$, $0 < \lambda < 1$, *è una soluzione del sistema* (2.2) *e se valgono le ipotesi* (2.3), (2.4), (2.5), *allora, per ogni cubo* $B(3\sigma) = B(x^0, 3\sigma) \subset\subset \Omega$, $\forall a, b \in (0, T)$ *con* $a < b$ *e* $\forall \vartheta_0 \in (0, \lambda)$

$$u \in L^{q+\eta}(-a, 0, H^{1+\vartheta, q+\eta}(B(\sigma), \mathbb{R}^N))$$

e si ha la seguente maggiorazione

$$\int_{-a}^{0} |Du|^{q+\eta}_{\vartheta, q+\eta, B(\sigma)} dt \leq \tag{4.7}$$

$$\leq c(\nu, K, U, \vartheta_0, \lambda, \eta, \sigma, a, b, n, q) \int_{-b}^{0} dt \int_{B(3\sigma)} \Big(1 + \|Du\|\Big)^{q+\frac{2\eta}{2-q}} dx,$$

dove $\vartheta = \dfrac{q\eta}{(2-q)(q+\eta)}(1-\vartheta_0) + \vartheta_0 \dfrac{q}{q+\eta}$.

Dimostrazione. Fissati $B(3\sigma) = B(x^0, 3\sigma) \subset\subset \Omega$ e $a, b \in (0, T)$ con $a < b$; siano $\psi(x)$ e $\rho_m(t)$ (m intero $> \frac{2}{a}$) le funzioni reali definite nella dimostrazione del Teorema 3.I di [2]. Detti i un intero, $1 \leq i \leq n$, ed h un numero reale con $|h| < \sigma$, dal Lemma 3.II segue:

$$\int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^2 \rho_m^2 \Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h} Du\|\Big)^{\eta} \|\tau_{i,h} Du\|^q dx \leq \tag{4.8}$$

$$\leq c \left(\int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^2 \rho_m^2 \Big(1 + \|Du\| + \|\tau_{i,h} Du\|\Big)^{q-2} \|\tau_{i,h} Du\|^2 dx \right)^{q/2} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(3\sigma)} \Big(1 + \|Du\|\Big)^{q+\frac{2\eta}{2-q}} dx \right)^{1-\frac{q}{2}}.$$

D'altra parte, grazie al Lemma 3.I, si ha:

$$\left(\int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^2 \rho_m^2 \Big(1+\|Du\|+\|\tau_{i,h} Du\|\Big)^{q-2} \|\tau_{i,h} Du\|^2 dx \right)^{q/2} \leq \tag{4.9}$$

$$\leq c(\nu, K, \sigma, a, b, n, q) \Bigg\{ \Bigg(\int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \Big(1 + \|Du\| +$$

$$+\|\tau_{i,h}Du\|\Big)^q \|\tau_{i,h}u\|^2 dx\Bigg)^{q/2} + |h|^q\Bigg(\int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(3\sigma)} \Big(1+\|Du\|\Big)^q dx\Bigg)^{q/2}\Bigg\}.$$

Dalle (4.8) e (4.9), grazie anche al Lemma 3.III, si deduce:

$$\int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^2\rho_m^2\Big(1+\|Du\|+\|\tau_{i,h}Du\|\Big)^\eta \|\tau_{i,h}Du\|^q dx \le$$

$$\le c(\nu, K, \sigma, a, b, n, q)\Bigg\{\Bigg(\int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(2\sigma)} \Big(1+\|Du\|+$$

$$+\|\tau_{i,h}Du\|\Big)^q \|\tau_{i,h}u\|^2 dx\Bigg)^{q/2}\Bigg(\int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(3\sigma)} \Big(1+\|Du\|\Big)^{q+\frac{2\eta}{2-q}} dx\Bigg)^{1-\frac{q}{2}} +$$

$$+|h|^q \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(3\sigma)} \Big(1+\|Du\|\Big)^{q+\frac{2\eta}{2-q}} dx\Bigg\} \le$$

$$\le c(\nu, K, U, \sigma, a, b, n, q)\cdot$$

$$\cdot\Big(|h|^{q\lambda+(1-\lambda)\frac{q\eta}{2-q}} + |h|^q\Big)\int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(3\sigma)} \Big(1+\|Du\|\Big)^{q+\frac{2\eta}{2-q}} dx.$$

Ora, essendo $q\lambda + (1-\lambda)\frac{q\eta}{2-q} < q$, per ogni $|h| < h_0 = \min(1, \sigma)$, si ha:

$$\sum_{i-1}^{n} \int_{-a}^{-2/m} dt \int_{B(\sigma)} \Big(1+\|Du\|+\|\tau_{i,h}Du\|\Big)^\eta \|\tau_{i,h}Du\|^q dx \le$$

$$\le c(\nu, K, U, \sigma, a, b, n, q)|h|^{q\lambda+(1-\lambda)\frac{q\eta}{2-q}} \int_{-b}^{-1/m} dt \int_{B(3\sigma)} \Big(1+\|Du\|\Big)^{q+\frac{2\eta}{2-q}} dx,$$

da cui

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{-a}^{-2/m} dt \int_{B(\sigma)} \|\tau_{i,h}Du\|^{q+\eta} dx \le$$

$$\le c(\nu, K, U, \sigma, a, b, n, q)|h|^{q\lambda+(1-\lambda)\frac{q\eta}{2-q}} \int_{-b}^{0} dt \int_{B(3\sigma)} \Big(1+\|Du\|\Big)^{q+\frac{2\eta}{2-q}} dx$$

e passando al limite per $m \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{-a}^{0} dt \int_{B(\sigma)} \|\tau_{i,h}Du\|^{q+\eta} dx \le$$

$$\le c(\nu, K, U, \sigma, a, b, n, q)|h|^{q\lambda+(1-\lambda)\frac{q\eta}{2-q}} \int_{-b}^{0} dt \int_{B(3\sigma)} \Big(1+\|Du\|\Big)^{q+\frac{2\eta}{2-q}} dx.$$

Questa diseguaglianza è banalmente verificata per $h_0 \le |h| < 2\sigma$ (7); si

(7) La costante c dipenderà dagli argomenti: $\nu, K, U, \sigma, a, b, n, q, \lambda, \eta$.

ha pertanto, essendo $q(\lambda - \vartheta_0)\Big(1 - \frac{\eta}{2-q}\Big) > 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{-a}^{0} dt \int_{-2\sigma}^{2\sigma} \frac{dh}{|h|^{1+(q+\eta)\vartheta}} \int_{B(\sigma)} \|\tau_{i,h} Du\|^{q+\eta} dx \le \tag{4.10}$$

$$\le c(\nu, K, U, \vartheta_0, \lambda, \eta, \sigma, a, b, n, q) \int_{-b}^{0} dt \int_{B(3\sigma)} \Big(1 + \|Du\|\Big)^{q+\frac{2\eta}{2-q}} dx,$$

da cui, in virtù del Lemma 2.II di [3], segue l'appartenenza di $D_i u$ allo spazio $L^{q+\eta}(-a, 0, H^{\vartheta, q+\eta}(B(\sigma), \mathbb{R}^N))$ e la (4.7).

Dai Teoremi 4.I e 4.II segue con procedimento iterativo il seguente

Teorema 4.III. *Se* $u \in L^q(-T, 0, H^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^N)) \cap C^{0,\lambda}(\overline{Q}, \mathbb{R}^N)$, $1 < q < 2$, $0 < \lambda < 1$, *è una soluzione del sistema* (2.2) *e se valgono le ipotesi* (2.3), (2.4), (2.5), *allora,* $\forall B(\sigma) \subset\subset B(\sigma_0) \subset\subset \Omega$, $\forall a, b \in (0, T)$ *con* $a < b$

$$u \in L^r(-a, 0, H^{1+\vartheta, r}(B(\sigma), \mathbb{R}^N)), \quad \forall 0 < \vartheta < \frac{q}{2} \quad e \quad \forall q \le r < 2,$$

e si ha la seguente maggiorazione

$$\int_{-a}^{0} |Du|^r_{\vartheta, r, B(\sigma)} dt \le c(\nu, K, U, \vartheta, \lambda, r, \sigma, \sigma_0, a, b, n, q) \cdot$$

$$\cdot \int_{-b}^{0} dt \int_{B(\sigma_0)} \Big(1 + \|Du\|\Big)^q dx.$$

Dimostrazione. Siano $\vartheta \in \Big(0, \frac{q}{2}\Big)$ ed $r \in [q, 2)$; posto:

$$\vartheta_0 = \frac{1}{2} \min\Big(\lambda, \frac{q}{2}\Big),$$

$$\begin{cases} \eta_0 = 0 \\ \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{q}{2}\vartheta_0(2 - q - \eta_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \tag{4.11}$$

$$\vartheta_{i+1} = \frac{q\eta_i}{(2-q)(q+\eta_i)} (1 - \vartheta_0) + \frac{q\vartheta_0}{q+\eta_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.12}$$

risulta (8):

$$\eta_{i+1} = \frac{q\vartheta_0}{2}(2-q)\sum_{j=0}^{i}\left(1-\frac{q\vartheta_0}{2}\right)^j =$$

$$= (2-q)\left[1-\left(1-\frac{q\vartheta_0}{2}\right)^{i+1}\right], \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

da cui segue che le successioni $\{\eta_i\}_{i\in\mathrm{N}}$ e $\{\vartheta_i\}_{i\in\mathrm{N}}$ sono a termini positivi, crescenti e convergenti:

$$\text{(4.13)} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{i\to\infty}(q+\eta_i) = \sup\left\{q+\eta_i, \quad i=1,2,\dots\right\} = 2 > r, \\ \lim\limits_{i\to\infty}\vartheta_i = \sup\left\{\vartheta_i, \quad i=1,2,\dots\right\} = \frac{q}{2} > \vartheta. \end{cases}$$

Le (4.13) assicurano allora che $\exists i \in \mathbb{N}$, $i = i(\vartheta, \lambda, r, q)$, tale che

$$q + \eta_i \in (r, 2), \vartheta_{i+1} \in \left(\vartheta, \frac{q}{2}\right).$$

Fissati ora $a, b \in (0, T)$ con $a < b$ e posto $a_s = b - (s+1)\frac{b-a}{i+1}$, $b_s = a_s + \frac{b-a}{2(i+1)}$, $s = 0, 1, \dots, i$, dal Teorema 4.I si deduce, $\forall B(3\rho) = B(y^0, 3\rho) \subset\subset \Omega$:

$$\text{(4.14)} \qquad u \in L^q(-a_0, 0, H^{1+\vartheta_0,q}(B(\rho), \mathbb{R}^N)) \cap C^{0,\lambda}(\overline{B(\rho)\times(-a_0,0)}, \mathbb{R}^N)$$

e

$$\text{(4.15)} \qquad \int_{-a_0}^{0} |Du|^q_{\vartheta_0,q,B(\rho)}dt \le$$

$$\le c(\nu, K, U, \vartheta, \lambda, r, \rho, a, b, n, q)\int_{-b_0}^{0} dt\int_{B(3\rho)}\Big(1+\|Du\|\Big)^q dx \le$$

$$\le c(\nu, K, U, \vartheta, \lambda, r, \rho, a, b, n, q)\int_{-b}^{0} dt\int_{B(3\rho)}\Big(1+\|Du\|\Big)^q dx.$$

E' possibile allora applicare il Lemma 2.V di [3] (9) che assicura che

$$u \in L^{q(1+\vartheta_0)}(-a_0, 0, H^{1,q(1+\vartheta_0)}(B(\rho), \mathbb{R}^N)) \cap C^{0,\lambda}(\overline{B(\rho)\times(-a_0,0)}, \mathbb{R}^N)$$

(8) $\vartheta_1 = \vartheta_0$.

(9) Il Lemma 2.V di [3] continua ad essere valido anche per $1 < q < 2$.

e

$$\int_{-a_0}^{0} dt \int_{B(\rho)} \|Du\|^{q(1+\vartheta_0)} dx \le$$

$$\le c(K, U, \lambda, \rho, n, q) \int_{-a_0}^{0} \Big(1 + |Du|^q_{\vartheta_0, q, B(\rho)}\Big) dt.$$

Da quest'ultima maggiorazione, grazie anche alla (4.15), segue ([10])

$$\int_{-a_0}^{0} dt \int_{B(\rho)} \|Du\|^{q+\frac{2\eta_1}{2-q}} dx \le \tag{4.16}$$

$$\le c(\nu, K, U, \vartheta, \lambda, r, \rho, a, b, n, q) \int_{-b}^{0} dt \int_{B(3\rho)} \Big(1 + \|Du\|\Big)^q dx.$$

Facendo ora uso del Teorema 4.II (con $T = a_0$, $\Omega = B(\rho)$, $\eta = \eta_1$, $a = a_1$, $b = b_1$, $\sigma = 3^{-2}\rho$) si deduce:

$$u \in L^{q+\eta_1}(-a_1, 0, H^{1+\vartheta_2, q+\eta_1}(B(3^{-2}\rho), \mathbb{R}^N)) \cap C^{0,\lambda}(\overline{B(3^{-2}\rho) \times (-a_1, 0)}, \mathbb{R}^N)$$

e

$$\int_{-a_1}^{0} |Du|^{q+\eta_1}_{\vartheta_2, q+\eta_1, B(3^{-2}\rho)} dt \le c(\nu, K, U, \vartheta, \lambda, r, \rho, a, b, n, q) \cdot$$

$$\cdot \int_{-b_1}^{0} dt \int_{B(3^{-1}\rho)} \Big(1 + \|Du\|\Big)^{q+\frac{2\eta_1}{2-q}} dx \le$$

$$\le c(\nu, K, U, \vartheta, \lambda, r, \rho, a, b, n, q) \int_{-a_0}^{0} dt \int_{B(\rho)} \Big(1 + \|Du\|\Big)^{q+\frac{2\eta_1}{2-q}} dx,$$

da cui, per la (4.16), segue:

$$\int_{-a_1}^{0} |Du|^{q+\eta_1}_{\vartheta_2, q+\eta_1, B(3^{-2}\rho)} dt \le$$

$$\le c(\nu, K, U, \vartheta, \lambda, r, \rho, a, b, n, q) \int_{-b}^{0} dt \int_{B(3\rho)} \Big(1 + \|Du\|\Big)^q dx.$$

Iterando questo procedimento si deduce che

$$u \in L^{q+\eta_i}\Big(-a, 0, H^{1+\vartheta_{i+1}, q+\eta_i}(B(3^{-2i}\rho), \mathbb{R}^N)\Big)$$

([10]) $q(1+\vartheta_0) = q + \frac{2\eta_1}{2-q}$.

e

$$\int_{-a}^{0} |Du|^{q+\eta_i}_{\vartheta_{i+1}, q+\eta_i, B(3^{-2i}\rho)} dt \leq$$

$$\leq c(\nu, K, U, \vartheta, \lambda, r, \rho, a, b, n, q) \int_{-b}^{0} dt \int_{B(3\rho)} \left(1 + \|Du\|\right)^q dx.$$

Infine, facendo uso del Lemma 2.III di [3] segue che, $\forall B(\sigma) \subset\subset B(\sigma_0) \subset\subset \Omega$

$$\int_{-a}^{0} |Du|^{q+\eta_i}_{\vartheta_{i+1}, q+\eta_i, B(\sigma)} dt \leq \tag{4.17}$$

$$\leq c(\nu, K, U, \vartheta, \lambda, r, \sigma, \sigma_0, a, b, n, q) \int_{-b}^{0} dt \int_{B(\sigma_0)} \left(1 + \|Du\|\right)^q dx$$

e quindi la tesi, essendo $q + \eta_i > r$ e $\vartheta_{i+1} > \vartheta$.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Campanato, *Differentiability of the Solutions of Nonlinear Elliptic Systems with Natural Growth,* Ann. Mat. Pura Appl., 131 (1982), pp. 75–106.

[2] L. Fattorusso, *Sulla differenziabilità delle soluzioni di sistemi parabolici non lineari del secondo ordine ad andamento quadratico,* Boll. Un. Mat. Ital., (7) 1-B (1987), pp. 741–764.

[3] L. Fattorusso - M. Marino, *Differenziabilità locale per sistemi parabolici non lineari del secondo ordine con non linearità $q \geq 2$,* Ricerche di Matematica, 41 (1992), pp. 89–112.

Dipartimento di Ingegneria Elettronica e Matematica Applicata,
Università di Reggio Calabria,
Via E. Cuzzocrea 48,
89100 Reggio Calabria (Italy)