LE MATEMATICHE
Vol. XLVII (1992) – Fasc. I, pp. 63-74

SULLA RAZIONALITÀ DELLE 3-VARIETÀ DI FANO CON $B_2 \geq 2$

ALBERTO ALZATI - MARINA BERTOLINI

Complex, smooth, projective Fano varieties were classified by Iskovskih when $B_2 = 1$ (B_2 is the second Betti number) and by Mori and Mukai when $B_2 \geq 2$. When $B_2 = 1$ it is known if such varieties are rational (unirational) or not; in this paper we solve this problem when $B_2 \geq 2$.

1. Introduzione.

Chiameremo 3-varietà di Fano una varietà X, algebrica, proiettiva, liscia, definita sul campo complesso, di dimensione 3, tale che il suo divisore anticanonico $-K_X$ sia ampio. Tali 3-varietà, assai note anche classicamente (si veda [10]) sono state recentemente classificate da Iskovskih ([3], [4]), nel caso in cui $B_2(X) = 1$, (B_2 indica il secondo numero di Betti), e da Mori e Mukai ([8], [9]) nel caso in cui $B_2(X) \geq 2$.

Il problema della razionalità e della unirazionalità, per queste 3-varietà, in generale tutt'altro che facile, è stato ampiamente trattato quando $B_2(X) = 1$, si veda ad esempio [2] p. 91.

In questo lavoro noi ci proponiamo invece di stabilire, per tutte le 3-varietà di Fano classificate da Mori e Mukai, quali di esse siano razionali. A tal fine utilizzeremo un semplice criterio di Shokurov (si veda [13] p. 145) che si adatta esattamente alle varietà della suddetta classificazione. Per quanto riguarda invece la unirazionalità, risolveremo la questione utilizzando le proprietà del gruppo di

Entrato in Redazione il 3 dicembre 1991.

Picard dei fibrati in coniche (si veda [5] p. 739) e sfruttando un ben noto criterio di Enriques (si veda [1] p. 353 e [6] p. 97).

Desideriamo ringraziare F. Bardelli per averci segnalato questo interessante problema e il referee per la sua attenta rilettura del manoscritto e per i suoi utili suggerimenti.

2. Notazioni e convenzioni.

varietà : con tale termine intenderemo sempre una *varietà algebrica, proiettiva, liscia, irriducibile,* su $\mathbb{C}$

superficie: varietà di dimensione 2

curva : varietà di dimensione 1

$Pic(Y)$: gruppo di Picard della varietà Y

$|D|$: serie lineare completa individuata dal divisore D

f_* : se $f : X \to Y$ è un morfismo di varietà, con tale simbolo indicheremo l'omomorfismo indotto tra $H_*(X, \mathbb{C})$ ed $H_*(Y, \mathbb{C})$

$f_\#(V)$: se V è un fibrato vettoriale su X, con tale simbolo indicheremo il fascio indotto su Y

f^* : omomorfismo indotto tra $H^*(Y, \mathbb{C})$ ed $H^*(X, \mathbb{C})$ oppure tra $Pic(X)$ e $Pic(Y)$, il contesto chiarirà ogni possibile equivoco.

Per la semplicità confonderemo spesso un divisore effettivo di una varietà Y con la classe che esso individua in $Pic(Y)$ o un cociclo di Y con la classe che esso individua in $H^*(Y)$.

Definizione (2,1). Una 3-varietà X si dirà *fibrato in coniche* se esiste un morfismo suriettivo $f : X \to S$ tale che: S è una superficie, ogni fibra di f è isomorfa ad una conica (cioè allo schema degli zeri di una forma non nulla di grado 2 su $\mathbb{P}^2$).

Definizione (2,2). (Si veda [11] p. 358, [6] p. 83) sia X un fibrato in coniche, l'insieme dei punti s di S tali che $f^{-1}(s)$ è una conica riducibile costituisce un divisore di S, detto divisore *discriminante*, nel seguito sempre indicato con la lettera C. Può essere $C = \emptyset$.

In molti casi (si veda [11] p. 357 e anche [6] p. 88) si preferisce chiamare fibrato in coniche una 3-varietà X', che ammette un morfismo piatto e suriettivo f' su una superficie S', la cui fibra generica è una curva razionale irriducibile, riservando il nome di "fibrati in coniche immersi" per le 3-varietà che abbiamo definito in (2,1).

Tuttavia si può dimostrare (si veda [11] p. 357, [6] p. 89) che, per ogni fibrato in coniche di questo secondo tipo, esiste un fibrato in coniche $f : X \to S$, secondo la definizione (2,1), e due applicazioni birazionali $\tau : X' \to X$ e $\sigma : S' \to S$ tali che $\sigma \circ f' = f \circ \tau$. In particolare ogni fibrato proiettivo di rango 1 su una superficie S è un fibrato in coniche secondo questa seconda definizione; in questo caso $S' = S$, f' è la proiezione naturale, $C = \emptyset$ e se S è razionale anche la 3-varietà X lo è in quanto birazionale a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$.

Definizione (2,3). (Si veda [11] p. 357) un fibrato in coniche si dice *standard* se per ogni curva irriducibile $\mathbf{\Gamma}$ di S, $f^{-1}(\mathbf{\Gamma})$ è un divisore irriducibile di X.

Osservazione (2,4). Per ogni fibrato in coniche definito come sopra, (def. (2,1)), si ha che il divisore discriminante è ridotto (si veda [11] p. 360), ma può essere riducibile.

3. La classificazione di Mori e Mukai.

È necessario ora richiamare rapidamente alcuni risultati dei citati lavori di Mori e Mukai.

Definizione (3,1). Una 3-varietà di Fano X si dice *non primitiva* se essa è isomorfa allo scoppiamento di un'altra 3-varietà di Fano lungo una curva liscia ed irriducibile. X si dice *primitiva* in caso contrario.

Ovviamente il problema della razionalità e della unirazionalità per le 3-varietà che stiamo esaminando si pone soltanto per quelle primitive; d'ora in poi quindi considereremo solo X primitive. A tal riguardo sussiste il

Teorema (3,2). *(Si veda [8] p. 148, [9] p. 104). Sia X una 3-varietà di Fano primitiva, allora:*
- $B_2(X) \leq 3$
- *se* $B_2(X) = 2$ *X è un fibrato in coniche su* $\mathbb{P}^2$
- *se* $B_2(X) = 3$ *X è un fibrato in coniche su* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

In [9] non sono però descritte esplicitamente le strutture di fibrato in coniche di ciascuna X primitiva, vedremo infatti che può essercene più d'una. E' invece necessario conoscerle dettagliatamente per potere applicare i criteri di razionalità e di unirazionalità che intendiamo usare. Per poter descrivere tali strutture ci occorrono alcuni rudimenti di teoria di Mori, (si veda [7]).

Consideriamo il gruppo abeliano libero degli 1-cicli Z di una 3-varietà X, generato dalle curve (necessariamente irriducibili in base alle nostre convenzioni) di X. In tale gruppo si può introdurre la seguente relazione di equivalenza:

Definizione (3,3). Due 1-cicli Z_1 e Z_2 di una 3-varietà X si dicono *numericamente equivalenti* se $(Z_1 - Z_2)H = 0$ per ogni divisore effettivo H di X.

Il gruppo degli 1-cicli di X, modulo l'equivalenza numerica, tensorizzato con $\mathbb{R}$ si indica col simbolo $N_1(X)$ e risulta uno spazio vettoriale reale di dimensione finita ρ. Si indica invece col simbolo $\overline{NE(X)}$ la chiusura, rispetto alla topologia euclidea di $\mathbb{R}^\rho$, del cono generato in $N_1(X)$ dalle classi di equivalenza dei cicli effettivi.

Definizione (3,4). Sia $R = \mathbb{R}_+[Z]$ una semiretta di $\overline{NE(X)}$, generata dalla classe di equivalenza $[Z]$ di un 1-ciclo effettivo Z di X. R si dice *raggio estremale* se:

i) $ZK_X < 0$

ii) per ogni coppia di vettori v, w di $\overline{NE(X)}$ tali che $v + w \in R$ si ha che sia v che w appartengono ad R.

Teorema (3,5). *Ad ogni raggio estremale R corrisponde un morfismo*

$$\varphi : X \to Y$$

tra X ed un'altra varietà Y, detto contrazione del raggio R, tale che:

i) $\varphi_\# \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$

ii) per ogni curva irriducibile Z di X, $[Z] \in R$ *se e solo se* $dim[\varphi(Z)] = 0$.

Un raggio estremale R si dice di tipo C_1 (si veda [9] p. 108) se la contrazione relativa esibisce X come un fibrato in coniche su una superficie Y e la contrazione ha fibre singolari; in tal caso Y risulta necessariamente razionale, il minimo degli interi $-K_X Z$ al variare di Z in $R = \mathbb{R}_+[Z]$ è 1 e tale minimo è raggiunto quando Z è una componente irriducibile di una fibra riducibile o non ridotta. Un raggio estremale si dice invece di tipo C_2 se la contrazione relativa esibisce X come un fibrato in coniche su una superficie Y il quale sia un fibrato proiettivo di rango 1 su Y (si veda par. 2); in tal caso Y risulta necessariamente razionale, il minimo degli interi $-K_X Z$ al variare di Z in $R = \mathbb{R}_+[Z]$ è 2 e tale minimo è raggiunto quando Z è una fibra.

Nel caso delle 3-varietà di Fano, come corollario del celebre teorema di Mori che descrive $\overline{NE(X)}$, si ha il seguente:

Teorema (3,6). *Sia X una 3-varietà di Fano,* $\overline{NE(X)}$ *è un cono poliedrale generato da un numero finito di raggi estremali* $R_1, R_2, \dots, R_t$ *tali che per ogni* $i = 1, 2, \dots, t$ $R_i = \mathbb{R}_+[Z_i]$ *dove* Z_i *è una curva (irriducibile) razionale di X,* $(e\ -K_X Z_i \leq 4)$.

In [9] Mori e Mukai dimostrano che se X è una 3-varietà di Fano primitiva allora $B_2(X) \leq 3$ ed X contiene un raggio estremale di tipo C_1 o C_2 (o entrambi), le relative contrazioni esibiscono pertanto X come un fibrato in coniche su una superficie S; se $B_2(X) = 2$ allora $S = \mathbb{P}^2$, se $B_2(X) = 3$

allora $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Inoltre i fibrati in coniche in questione risultano standard (si veda [9] p. 124).

In forza di quanto appena detto e della classificazione delle 3-varietà di Fano primitive che Mori e Mukai fanno in [8], possiamo ora elencare tutti i tipi di tali varietà e per ciascuna di esse descrivere le strutture di fibrato in coniche relative alla teoria di Mori.

Nel successivo elenco X indicherà sempre una 3-varietà di Fano primitiva; fra i morfismi che rendono X fibrato in coniche, caso per caso, ne sceglieremo uno $f : X \to S$ (S sarà $\mathbb{P}^2$ oppure $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$) che sarà quello al quale, in seguito, applicheremo i criteri di razionalità ed unirazionalità che intendiamo usare.

Per indicare le varie X usiamo la stessa numerazione di [9].

Si noti che quando $B_2(X)$ vale 2 o 3 si ha che $\rho(X)$ vale rispettivamente 2 o 3 (si veda [9] p. 124); se $B_2(X) = 2$ vi sono solo due raggi estremali in forza di (3,6).

Il caso $B_2(X) = 2$

1) Esiste una sola struttura di fibrato in coniche dovuta alla contrazione di un raggio estremale di tipo C_1. X è un rivestimento doppio di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ diramato su un divisore di bigrado (2,4); chiamiamo $\varphi : X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ il rivestimento doppio e sia π_2 la proiezione naturale $\pi_2 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, allora f sarà la composizione di φ con π_2.

2a) Esistono due strutture di fibrato in coniche corrispondenti ciascuna alla contrazione di uno dei due raggi estremali di tipo C_1 esistenti, (tali strutture risultano equivalenti secondo la definizione di Sarkisov, si veda [11] p. 357). X è un divisore di bigrado (2,2) di $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$; otteniamo le due fibrazioni proiettando X sui due fattori, nel seguito chiameremo f la restrizione della proiezione naturale π_2 ad X.

2b) È un caso del tutto analogo al precedente. Sia W un divisore liscio di bigrado (1,1) di $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, X è un rivestimento doppio di W diramato su un elemento di $|-K_W|$; chiamiamo $\varphi : X \to W$ il rivestimento doppio e sia $\pi_2 : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ la proiezione naturale, allora f sarà la composizione di φ con la ${\pi_2}_{|W}$, (l'altra struttura si ottiene usando π_1).

3) Esiste una sola struttura di fibrato in coniche dovuta alla contrazione di un raggio estremale di tipo C_1. Sia Y il fibrato proiettivo $\mathbb{P}(V)$ dove $V = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$, ($Y$ è lo scoppiamento di $\mathbb{P}^3$ in un punto), X è un rivestimento doppio di Y diramato su un elemento di $|-K_Y|$; chiamiamo $\varphi : X \to Y$ il rivestimento doppio. Esiste un morfismo naturale $\pi : Y \to \mathbb{P}^2$, allora f sarà la composizione di φ con π.

4) Esiste una sola struttura di fibrato in coniche dovuta alla contrazione di un raggio estremale di tipo C_1. X è un rivestimento doppio di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ diramato su un divisore di bigrado (2,2); chiamiamo $\varphi : X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ il rivestimento doppio e sia π_2 la proiezione naturale $\pi_2 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, allora f sarà la composizione di φ con π_2.

5) È il caso più interessante: esistono due strutture di fibrato in coniche non equivalenti corrispondenti alle contrazioni rispettivamente di un raggio estremale di tipo C_1 e di tipo C_2. X è un divisore di bigrado (1,2) di $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, la prima struttura si ottiene usando la proiezione naturale π_1 di X su $\mathbb{P}^2$, la seconda si ottiene usando π_2; nel seguito f sarà π_2.

6) Esistono due strutture di fibrato in coniche corrispondenti ciascuna alla contrazione di uno dei due raggi estremali di tipo C_2 esistenti, (tali strutture risultano equivalenti). X è un divisore liscio di bigrado (1,1) in $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$; le due strutture si ottengono usando π_1 e π_2, nel seguito f sarà π_2.

9) Esiste una sola struttura di fibrato in coniche dovuta alla contrazione di un raggio estremale di tipo C_2. X è il fibrato proiettivo $\mathbb{P}(V)$ dove $V = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$; f sarà la proiezione naturale su $\mathbb{P}^2$.

A questo elenco mancano due 3-varietà di Fano primitive con $B_2 = 2$ ossia la numero 7) e la numero 8) che sono rispettivamente $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ e lo scoppiamento di $\mathbb{P}^3$ in un punto, ossia il fibrato proiettivo $\mathbb{P}(V)$ dove $V = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$. Tali varietà sono state escluse in quanto ovviamente entrambe razionali; segnaliamo in ogni caso che esse ammettono un'unica struttura di fibrato in coniche, ottenuta per contrazione di un raggio di tipo C_2, e corrispondente alla proiezione naturale su $\mathbb{P}^2$.

Il caso $B_2(X) = 3$

Se $B_2(X) = 3$ vi possono essere più di due raggi estremali, ma solo nei casi 1) e 3) abbiamo più di una struttura di fibrato in coniche, (si veda [8] p. 148).

1) X è un rivestimento doppio di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ diramato su un divisore D di trigrado $(2,2,2)$; chiamiamo $\varphi : X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ il rivestimento doppio allora f sarà la composizione di φ con la proiezione naturale $\pi_{23} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Si ottengono altre due strutture di fibrato in coniche, equivalenti a questa, corrispondenti a contrazioni di raggi di tipo C_1, usando le altre due proiezioni naturali.

2) Sia V il fibrato $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-1,-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-1,-1)$ e sia Y la 4-verità $\mathbb{P}(V)$ e sia $\pi : Y \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ la proiezione naturale. Sia T il divisore $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ di Y e siano H_1 e H_2 i due generatori di $Pic(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$. X è un elemento liscio del sistema lineare $|2T + 2\pi^* H_1 + 3\pi^* H_2|$; f sarà la restrizione

di π ad X. Questa appena descritta è l'unica struttura di fibrato in coniche presente, corrispondente alla contrazione di un raggio di tipo C_1.

4) Sia V il fibrato $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1,1)$. X è $\mathbb{P}(V)$; f sarà la proiezione naturale su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Questa appena descritta è l'unica struttura di fibrato in coniche presente, corrispondente alla contrazione di un raggio di tipo C_2.

A questo elenco manca la numero 3) ossia $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ovviamente razionale; in essa sono presenti tre strutture equivalenti di fibrato in coniche ottenute mediante le tre proiezioni naturali e corrispondenti a contrazioni di raggi di tipo C_2.

4. Il problema della razionalità.

In primo luogo osserviamo che tutte le 3-varietà di Fano in esame che abbiano un raggio estremale di tipo C_2, la cui contrazione le esibisca quindi come fibrati proiettivi di rango 1 su superfici razionali, fibrati in coniche con $C = \emptyset$, sono razionali (si veda par. 2). A tale insieme corrispondono le 3-varietà con $B_2 = 2$ dal numero 5) al 9) e quelle con $B_2 = 3$ numeri 3), 4).

In questo paragrafo discutiamo la razionalità o meno delle rimanenti usando il seguente criterio (si veda [13] pag. 145):

Teorema (4,1). *Sia $f : X \to S$ un fibrato in coniche standard su una superficie razionale minimale S tale che f sia la contrazione di un raggio estremale di X. Se $|2K_S + C|$ non è vuoto allora X non è razionale. Se $|2K_S + C|$ è vuoto e C non è una quintica piana X è razionale.*

Si noti che il precedente criterio si applica immmediatamente a tutte le 3-varietà X della precedente tabella poichè i fibrati in coniche così ottenuti sono tutti standard (si veda [9] pag. 124).

Per poter esprimere C in $Pic(S)$ si può usare il

Teorema (4,2). *(Si veda [9] p. 117). Sia $f : X \to S$ un fibrato in coniche, allora il divisore discriminante C è numericamente equivalente al divisore:*

$$-f_*(K_X^2) - 4K_S.$$

Tenendo conto che nei casi elencati nella precedente tabella si può applicare il criterio di Shokurov e che per $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ e per $\mathbb{P}^2$ l'equivalenza numerica e lineare coincidono possiamo concludere che per stabilire la razionalità o meno di tutte le 3-varietà in questione sarà sufficiente, per ognuna di esse, stabilire se $|-f_*(K_X^2) - 2K_S|$ è vuoto oppure no.

Esaminiamo ora i vari casi cominciando da quelli per cui $B_2(X) = 2$. Nel caso 2a) la non razionalità e la unirazionalità del fibrato sono note, (si veda [2] pag. 42 e pag. 54), tuttavia tratteremo anche questo caso per ragioni di completezza.

L nel seguito indicherà sempre la classe di equivalenza lineare di una retta in $\mathbb{P}^2$.

1) Su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ scegliamo i cocicli $H_1 = \mathbb{P}^1 \times \{\text{un punto di } \mathbb{P}^2\}$, $H_2 = \{\text{un punto di } \mathbb{P}^1\} \times \mathbb{P}^2$, $H_3 = \mathbb{P}^1 \times \{\text{ una retta di } \mathbb{P}^2\}$; il divisore di diramazione di φ è allora $2B = 2H_2 + 4H_3 = 2(H_2 + 2H_3)$ nell'anello di coomologia di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$.
$K_X = \varphi^*(K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2}) + \varphi^*(H_2 + 2H_3) = \varphi^*(-2H_2 - 3H_3 + H_2 + 2H_3) = -\varphi^*(H_2 + H_3)$.
Si ha: $f_*[(K_X)^2] = f_*[\varphi^*(H_2^2 + 2H_2H_3 + H_3^2)] = 2\pi_{2_*}[2H_2H_3 + H_1] = 4L$.
Di conseguenza $\left|-f_*(K_X^2) - 2K_S\right| = |-4L + 6L| = |2L| \neq \emptyset$ e X non è razionale.

2a) In questo caso il grado del divisore discriminante si può calcolare direttamente: scegliamo le coordinate proiettive $(x\colon y\colon u)$ sulla prime copia di $\mathbb{P}^2$ e le coordinate $(t\colon v\colon z)$ sulla seconda copia di $\mathbb{P}^2$; l'equazione di X è allora: $a_{11}t^2 + 2a_{12}tv + a_{22}v^2 + 2a_{13}tz + 2a_{23}vz + a_{33}z^2 = 0$ dove ogni a_{ij} è un polinomio omogeneo di secondo grado nelle variabili $x\colon y\colon u$. L'equazione del divisore discriminante C su $\mathbb{P}^2$ è allora $det(A) = 0$ dove A è la matrice (a_{ij}); pertanto C è linearmente equivalente a $6L$ e si ha che: $|-6L + 6L| = |0| \neq \emptyset$ e X non è razionale.

2b) Consideriamo i seguenti generatori dell'anello $H^*(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$:
$H_0 = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$
$H_1 = \mathbb{P}^2 \times \{\text{un punto di } \mathbb{P}^2\}$
$H_2 = \mathbb{P}^2 \times \{\text{una retta di } \mathbb{P}^2\}$
$H_3 = \{\text{una retta di } \mathbb{P}^2\} \times \{\text{un punto di } \mathbb{P}^2\}$
$H_4 = \{\text{una retta di } \mathbb{P}^2\} \times \{\text{una retta di } \mathbb{P}^2\}$
$H_5 = \{\text{una retta di } \mathbb{P}^2\} \times \mathbb{P}^2$
$H_6 = \{\text{un punto di } \mathbb{P}^2\} \times \{\text{una retta di } \mathbb{P}^2\}$
$H_7 = \{\text{un punto di } \mathbb{P}^2\} \times \mathbb{P}^2$
$H_8 = \{\text{un punto di } \mathbb{P}^2\} \times \{\text{un punto di } \mathbb{P}^2\}$.

In tale anello $W = H_2 + H_5$ e $K_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2} = -3(H_2 + H_5)$; per la formula di aggiunzione si ha che K_W si può esprimere come $-2(H_2 + H_5)W$. Allora il divisore di diramazione di φ è $2B = 2(H_2 + H_5)W$ e quindi $K_X = \varphi^*(K_W + B) = \varphi^*[-(H_2 + H_5)W]$ dove $-(H_2 + H_5)W$ è da intendersi come un divisore di W. Indichiamo con "$\circ$" il prodotto in $H^*(W)$.
$K_X^2 = \{\varphi^*[-(H_2 + H_5)W]\}^2 = \varphi^*[(H_2 + H_5)W \circ (H_2 + H_5)W]$; si

rammenti che il prodotto di $(H_2+H_5)W$ per $(H_2+H_5)W$ in $H^*(W)$ è $(H_2+H_5)^2W$. $\varphi_*(K_X^2)=2[(H_2+H_5)^2W]=2(H_2^2+2H_2H_5+H_5^2)W=2(H_1+2H_4+H_7)W$.
$f_*(K_X^2)=\pi_{2_{|W}*}[\varphi_*(K_X^2)]=\pi_{2_{|W}*}[2(H_1+2H_4+H_7)W]=\pi_{2_{|W}*}[2(H_3+2H_3+2H_6+H_6)]=\pi_{2_{|W}*}[6(H_3+H_6)]=6L$, pertanto C è linearmente equivalente a $6L$ e si ha che: $|-6L+6L|=|0|\neq\emptyset$ e X non è razionale.

3) Poichè $c_1(V)=L$ e $c_2(V)=0$, posto $T=\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ è noto che $H^*(Y)$ è isomorfo a $H^*(\mathbb{P}^2)[T]/(T^2-(\pi^*L)T)$. Inoltre: $K_Y=\pi^*(-3L+L)-2T=-2\pi^*L-2T$.
Dunque il divisore di diramazione di φ è : $2B=2(\pi^*L+T)$; $K_X=\varphi^*(K_Y+B)=\varphi^*[-(\pi^*L+T)]$; $K_X^2=\varphi^*[(\pi^*L+T)^2]=\varphi^*[(\pi^*L)^2+2(\pi^*L)T+T^2]=\varphi^*[(\pi^*L)^2+3(\pi^*L)T]$. $f_*(K_X^2)=2\pi_*[(\pi^*L)^2+3(\pi^*L)T]=6L$. Ragionando come nel caso precedente si ha che X non è razionale.

4) Usiamo le stesse notazioni del caso 1); il divisore di diramazione è $2B=2(H_2+H_3)$, $K_X=\varphi^*(-H_2-2H_3)$, $K_X^2=\varphi^*[(H_2+2H_3)^2]$. Dunque $f_*(K_X^2)=2\pi_{2*}(4H_2H_3+4H_1)=8L$ e $|-f_*(K_X^2)-2K_S|=|-2L|$ che è vuoto e X è razionale.

Osservazione (4,3). Come abbiamo già detto le rimanenti varietà con $B_2=2$ sono razionali in quanto birazionali a $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2$, fra esse l'unica che ammetta una struttura di fibrato in coniche mediante contrazione di un raggio estremale di tipo C_1 è la 5): usando le stesse notazioni del caso 2a) l'equazione di X in questo caso è: $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xu+2a_{23}yu+a_{33}u^2=0$ dove gli a_{ij} sono polinomi omogenei di primo grado nelle variabili t: v: z. L'equazione del divisore discriminante C su $\mathbb{P}^2$ è allora $det(A)=0$ dove A è la matrice (a_{ij}); pertanto C è linearmente equivalente a $3L$ e, usando ancora il teorema (4,1) si ha che $|-6L+3L|=|-3L|=\emptyset$ e si riottiene che X è razionale.

Passiamo ora a considerare i due ultimi casi, in cui $B_2(X)=3$.

1) Poniamo: $\mathbf{H}_1=\{\text{punto di }\mathbb{P}^1\}\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, $\mathbf{H}_2=\mathbb{P}^1\times\{\text{punto di }\mathbb{P}^1\}\times\mathbb{P}^1$, $\mathbf{H}_3=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\{\text{punto di }\mathbb{P}^1\}$; in tal caso il divisore di diramazione di φ è $2B=2(\mathbf{H}_1+\mathbf{H}_2+\mathbf{H}_3)$ mentre $K_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}=-2(\mathbf{H}_1+\mathbf{H}_2+\mathbf{H}_3)$.

Indichiamo con "$\circ$" il prodotto in $H^*(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)$.
$K_X=\varphi^*[-(\mathbf{H}_1+\mathbf{H}_2+\mathbf{H}_3)]$, $K_X^2=\varphi^*[(\mathbf{H}_1+\mathbf{H}_2+\mathbf{H}_3)\circ(\mathbf{H}_1+\mathbf{H}_2+\mathbf{H}_3)]$.
$f_*(K_X^2)=2\pi_{23_*}[(\mathbf{H}_1+\mathbf{H}_2+\mathbf{H}_3)\circ(\mathbf{H}_1+\mathbf{H}_2+\mathbf{H}_3)]=4\pi_{23_*}(\mathbf{H}_1\circ\mathbf{H}_2+\mathbf{H}_1\circ\mathbf{H}_2+\mathbf{H}_2\circ\mathbf{H}_3)=4(H_1+H_2)$ dove H_1 e H_2 sono i due generatori di $Pic(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)$.

Poichè $K_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}=-2(H_1+H_2)$ si ha che $|-f_*(K_X{}^2)-2K_S|=|-4(H_1+H_2)+4(H_1+H_2)|=|0|\neq\emptyset$ e dunque X non è razionale.

2) Sia P la classe di coomologia di un punto di $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$.

Poichè $c_1(V) = -2(H_1 + H_2)$ e $c_2(V) = 2P$, si ha che $H^*(Y) = H^*(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)[T]/(T^2 + 2(\pi^*H_1 + \pi^*H_2)T + 2\mathbf{F})$, dove con $\mathbf{F}$ indichiamo la classe di coomologia della fibra di π in $H^*(Y)$. Si noti che la classe di coomologia della fibra di f nell'anello $H^*(X)$ è individuata dal cociclo $F = \mathbf{F}X$. Indichiamo con "$\circ$" il prodotto in $H^*(X)$.

$K_Y = -4(\pi^*H_1 + \pi^*H_2) - 3T$; poichè X è linearmente equivalente a $2T + 2\pi^*H_1 + 3\pi^*H_2$ per la formula di aggiunzione si ha che $K_X = (K_Y + X)X = -(T+2\pi^*H_1+\pi^*H_2)X$; $K_X \circ K_X = (T+2\pi^*H_1+\pi^*H_2)^2X$ come cociclo di X. $f_*(K_X \circ K_X) = \pi_{|X_*}(K_X \circ K_X) = \pi_*[(T+2\pi^*H_1+\pi^*H_2)^2X]$. Considerando $(T + 2\pi^*H_1 + \pi^*H_2)^2X$ come cociclo di Y, allora abbiamo $f_*(K_X \circ K_X) = \pi_*[(T + 2\pi^*H_1 + \pi^*H_2)^2X] = \pi_*\{[T^2 + 4T(\pi^*H_1) + 2T(\pi^*H_2) + 4\mathbf{F}](2T + 2\pi^*H_1 + 3\pi^*H_2)\} = \pi_*[2T^3 + 10T^2(\pi^*H_1) + 7T^2(\pi^*H_2)+24T\mathbf{F}] = \pi_*[6T^2(\pi^*H_1)+3T^2(\pi^*H_2)+20T\mathbf{F}] = 6H_1+3H_2$. Dunque $|-f_*(K_X^2) - 2K_S| = |-6H_1 - 3H_2 + 4H_1 + 4H_2| = |-2H_1 + H_2|$; dal teorema di Riemann-Roch si ha che $h^0(-2H_1+H_2) = h^1(-2H_1+H_2)-2$, ossia $h^1(-3H_2) - 2$, per dualità di Serre. Tenendo conto che $H_2 \cong \mathbb{P}^1$ e usando: $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}((k-1)H_2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(kH_2) \to \mathcal{O}_{H_2}(kH_2) \to 0$ con $k = -2, -1, 0$ si ha che $h^1(-3H_2) = 2$ e quindi $h^0(-2H_1 + H_2) = 0$; dunque $|-2H_1 + H_2|$ è vuoto e X è razionale.

5. Il problema della unirazionalità.

Per decidere quali, fra le precedenti 3-varietà di Fano non razionali, sono unirazionali possiamo utilizzare il seguente criterio, si veda [1] p. 353 e [6] p. 97.

Teorema (5,1). *Sia $f: X \to S$ un fibrato in coniche, S una superficie razionale. Se esiste una superficie razionale Y in X tale che $f_{|Y} : Y \to S$ sia un morfismo suriettivo di grado d allora X è unirazionale.*

Si noti che, poichè tutti i nostri fibrati in coniche sono standard si ha che $Pic\,(X)$ è isomorfo a $f^*[Pic\,(S)] \oplus < K_X >$ (si veda [5] p. 739).

Esaminiamo ora tutti i casi cominciando da quelli per cui $B_2(X) = 2$ (compreso il 2a) e quindi $S = \mathbb{P}^2$, $Pic\,(S) = < L >$, $f^*[Pic\,(S)] = < f^*L >$.

Per quanto concerne le proprietà dei rivestimenti doppi di $\mathbb{P}^2$ che ora utilizzeremo, si veda [12]. Nel seguito, col termine "curva di $\mathbb{P}^2$" intenderemo un divisore effettivo di $\mathbb{P}^2$.

1) $f^*L = \varphi^*\pi_2^*L = \varphi^*H_3$, $K_X = -\varphi^*H_2 - \varphi^*H_3$, $Pic(X) = < \varphi^*H_2, \varphi^*H_3 >$.

Sia Y una superficie appartenente a $|\varphi^*H_2|$, Y risulta un rivestimento doppio di $\mathbb{P}^2 \cong H_2$ diramato su una curva del quarto ordine perchè $H_2(2H_2 + 4H_3) =$

$4H_2H_3$. Y è dunque una superficie razionale e taglia la fibra di f, φ^*H_1, in due punti; per (5,1) X è unirazionale.

2a) Usiamo le notazioni introdotte per trattare il caso 2b) nel par. 4: X è linearmente equivalente a $2H_2 + 2H_5$ in $Pic(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$, per la formula di aggiunzione si ha $K_X = -(H_2+H_5)X$. $f^*L = \pi^*_{2|X}L = H_2X$ e $Pic(X) =< H_2X, H_5X >$. Sia Y una superficie di $|H_5X|$, poichè $H_5(2H_2 + 2H_5) = 2H_2H_5 + 2H_5^2$, Y risulta un divisore di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \cong H_5$ di bigrado (2,2); usando la proiezione naturale su $\mathbb{P}^2$ e ragionando come quando abbiamo discusso la razionalità del caso 2a), è facile vedere che Y è ancora un rivestimento doppio di $\mathbb{P}^2$ diramato su una curva del quarto ordine. Y è dunque una superficie razionale e taglia la fibra di f, H_1X, in due punti; per (5,1) X è unirazionale.

2b) In tal caso $K_X = -\varphi^*(H_2W) - \varphi^*(H_5W)$ e $f^*L = \varphi^*\pi^*_{2|W}L = \varphi^*(H_2W)$ $Pic(X) =< \varphi^*(H_2W), \varphi^*(H_5W) >$. Sia Y una superficie di $|\varphi^*(H_5W)|$; H_5W è un divisore di bigrado (1,1) in $H_5 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ e quindi è isomorfo allo scoppiamento Z di $\mathbb{P}^2$ in un punto. Y risulta dunque un rivestimento doppio di Z diramato su $2(H_5 + H_2)W \circ H_5W$. Se poniamo $Pic(Z) =< C_0, F >$ ove C_0 ed F sono rispettivamente le classi della sezione fondamentale e della fibra della rigata razionale Z, allora è facile vedere che il divisore di diramazione è linearmente equivalente a $2(2F + C_0)$. Y è dunque una superficie razionale (per esempio perchè ha tutti i plurigeneri nulli, si veda [12]), e taglia la fibra di f, $\varphi^*(H_1W)$, in due punti; per (5,1) X è unirazionale.

3) In tal caso $K_X = -\varphi^*\pi^*L - \varphi^*T$ e $f^*L = \varphi^*\pi^*L$, $Pic(X) = < \varphi^*\pi^*L, \varphi^*T >$.
Sia Y una superficie di $|\varphi^*T|$, $T \cong \mathbb{P}^2$ quindi Y è un rivestimento doppio di $\mathbb{P}^2$ diramato su $(2\pi^*L + 2T)T = 4(\pi^*L)T$ ossia ancora una curva del quarto ordine. Y è dunque una superficie razionale e taglia la fibra di f, $\varphi^*[(\pi^*L)^2]$, in due punti; per (5,1) X è unirazionale.

Passiamo ora all'ultimo caso rimasto in cui $B_2(X) = 3$; usiamo le stesse notazioni del caso 1) del par. 4: abbiamo $Pic(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) =< H_1, H_2 >$ e $f^*[Pic(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)] =< \varphi^*\mathbf{H}_2, \varphi^*\mathbf{H}_3 >$ e $K_X = -\varphi^*\mathbf{H}_1 - \varphi^*\mathbf{H}_2 - \varphi^*\mathbf{H}_3$. Si ha $Pic(X) =< \varphi^*\mathbf{H}_1, \varphi^*\mathbf{H}_2, \varphi^*\mathbf{H}_3 >$. Sia Y una superficie liscia di $|\varphi^*\mathbf{H}_1|$, Y è un rivestimento doppio di $\mathbf{H}_1 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ diramato su $2(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3) \circ \mathbf{H}_1 = 2(H_1 + H_2)$. Usando il criterio di Castelnuovo è facile stabilire che Y è razionale, essa taglia la fibra di f, $\varphi^*(\mathbf{H}_2\mathbf{H}_3)$, in due punti e per (5,1) X è unirazionale.

In conclusione tutte le 3-varietà di Fano non razionali da noi considerate sono unirazionali.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Beauville, *Variété de Prym et Jacobiennes intermédiaires,* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 10 (1977), pp. 304-392.

[2] A. Conte, *Introduzione alle varietà algebriche a tre dimensioni,* Quaderno U.M.I. N. 22 ed. Pitagora Bologna 1982.

[3] V.A. Iskovskih, *Fano 3-folds I,* Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. 41 (1977), pp. 512-562.

[4] V.A. Iskovskih , *Fano 3-folds II,* Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. 42 (1977), pp. 469-506.

[5] V.A. Iskovskih, *Algebraic Threefolds with Special Regard to the problem of Rationality,* Proc. Int. Cong. Math. 1983 Warszawa.

[6] M. Miyanishi, *Algebraic Methods in the Theory of Algebraic Threefolds,* Adv. Studies in Pure Math. 1 "Alg. Var. and Anal. Var." (1983), pp. 69-99.

[7] S. Mori, *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective,* Ann. of Math. 116 (1982), pp. 133-176.

[8] S. Mori - S. Mukai, *Classification of Fano 3-folds with* $B_2 \geq 2$, Manuscr. Math. 36 (1981), pp. 147-162.

[9] S. Mori - S. Mukai, *On Fano 3-folds with* $B_2 \geq 2$, Adv. Studies in Pure Math. 1 "Alg. Var. and Anal. Var." (1983), pp. 101-129.

[10] L. Roth, *Algebraic threefolds,* Springer Berlin-Heidelberg-New York 1955.

[11] V.G. Sarkisov, *On conic bundle structures,* Math. USSR Izv. 20 N. 2 (1982), pp. 355-390.

[12] E. Sernesi, *Introduzione ai piani doppi,* Sem. di Geo. 1977-1978 a cura del Centro di Analisi Globale del C.N.R. ed. Pitagora Bologna.

[13] V.V. Shokurov, *Prym varieties: theory and application,* Math. USSR Izv. 23 N. 1 (1984), pp. 83-147.

Dipartimento di Matematica
via C. Saldini 50
20133 Milano