LE MATEMATICHE
Vol. XLVII (1992) – Fasc. I, pp. 75-81

UNE NOTE SUR L'IDENTITÉ SCALAIRE À DROITE D'UN HYPERGROUPE DE TYPE U À DROITE

DOMENICO FRENI

It is shown that in type U hypergroups on the right of ≤ 5 cardinality, the right scalar identity is egual to the left scalar identity. This property is not true if the cardinality is ≥ 6 where counter-examples are determined.

1. Introduction.

Le referee du travail [2] a proposé à l'auteur d'essayer de démontrer que l'identité scalaire à droite d'un hypergroupe H de type U à droite est également identité à gauche; ou bien, si cela est impossible, d'essayer de déterminer des exemples d'hypergroupes de type U à droite dont l'identité scalaire à droite n'est pas identité à gauche.

Dans ce travail le problème a été complétement résolu et plus précisément il est démontré que si la cardinalité $|H|$ de H est ≤ 5 l'identité scalaire à droite est aussi identité à gauche; et en outre qu'il existent des hypergroupes de type U à droite de cardinalité quelconque ≥ 6 ou ce résultat n'est plus verifié.

2. Notes et definitions.

Tout au long de ce travail H représente un hypergroupe. Un élément ϵ de H est dit *identité à droite* (resp. *à gauche*) si $x \in x\epsilon$ (resp. $x \in \epsilon x$) pour chaque $x \in H$.

Entrato in Redazione il 3 dicembre 1991.

L'élément ϵ est dit *identité scalaire à droite* (resp. *identité scalaire à gauche*) si $x\epsilon = \{x\}$ (resp. $\epsilon x = \{x\}$) pour chaque $x \in H$.

Un hypergroupe H est dit *de type U à droite* s'il répond aux deux axiomes suivants:

U_1) *Il existe dans H une identité scalaire droite;*

U_2) *pour tout x et y de H, $x \in xy$ implique $y = \epsilon$.*

L'abréviation C.H.T.U.D. indique la classe des hypergroupes de type U à droite, alors que le singleton $\{x\}$ s'identifie avec l'élément x et le complementaire en H de $\{x\}$ est indiqué par $H \setminus x$.

On note enfin, que les seuls hypergroupes de type U à droite de cardinalité 1 et 2 sont isomorphes aux groupes de même cardinalité et que pour chaque entier positif $n \geq 3$ il existe des hypergroupes de type U à droite qui ne sont pas isomorphes à des groupes, et qui ont cependant une identité scalaire à droite qui est également une identité à gauche.

En voici un exemple:

Exemple. Soit H un ensemble de cardinalité ≥ 3 et soit ϵ un de ses éléments; on définit sur H l'hyperproduit suivant:

$$\forall\ x \in H,\ x\epsilon = x\ ;$$
$$\forall\ (x, y) \in H \times H,\ y \neq \epsilon,\ xy = H \setminus x\ .$$

L'ensemble H munì de l'hyperproduit cité plus haut est un hypergroupe du type U à droite ayant un'identité scalaire à droite ϵ, qui est aussi identité à gauche; en effet, pour chaque $y \in H \setminus \epsilon$, on obtient $\epsilon y = H \setminus \epsilon$.

Proposition 1. *Soit H appartenant à* C.H.T.U.D., *avec une identité scalaire à droite ϵ; pour chaque $x \in H$ tel que $|\epsilon x| = 1$ on a $\epsilon x = x$.*

Démonstration. Soit $\epsilon x = y$, on a $\epsilon y = \epsilon(\epsilon x) = (\epsilon\epsilon)x = \epsilon x = y$, c'est-à-dire $\epsilon y = y$. Par la reproductivité de H, il existe $w \in H$ tel que $y \in xw$ donc $y = \epsilon y \subset \epsilon(xw) = (\epsilon\ x)w = yw$ par conséquent $y \in yw$ et pour l'axiome U_2 on a $w = \epsilon$.

Mais alors $y \in xw = x\epsilon = x$, c'est-à-dire $y = x$ et par conséquent $\epsilon x = x$.

Lemme 1. *Soit H appartenant à* C.H.T.U.D., *avec une identité scalaire droite ϵ; tout x de H vérifie $\epsilon x \neq H \setminus \{\epsilon, x\}$.*

Démonstration. Le lemme est aisement vrai si $|H| \in \{1, 2\}$, soit alors $|H| \geq 3$. Si $x = \epsilon$ on a $\epsilon x = \epsilon\epsilon = \epsilon$ et donc $\epsilon x \neq H \setminus \epsilon$.

Soit $x \neq \epsilon$ et $\epsilon x = H \setminus \{\epsilon, x\}$, alors on obtient:

$$\begin{aligned} H = \epsilon H &= \epsilon(\{\epsilon\} \cup \{x\} \cup H \setminus \{\epsilon, x\}) \\ &= \epsilon(\{\epsilon\} \cup \{x\} \cup \epsilon x) \\ &= \epsilon\epsilon \cup \epsilon x \cup \epsilon(\epsilon x) \\ &= \{\epsilon\} \cup \epsilon x \cup (\epsilon\epsilon)x \\ &= \{\epsilon\} \cup \epsilon x \cup \epsilon x \\ &= H \setminus x \end{aligned}$$

et cela est impossible.

Lemme 2. *Soit H appartenant à* C.H.T.U.D., *avec une identité scalaire à droite ϵ. Pour tout couple (x, y) d'éléments de $H \setminus \epsilon$, on a $\epsilon x \neq H \setminus \{\epsilon, x, y\}$.*

Démonstration. Si $x = y$ le résultat est vrai par le lemme 1. Alors, soit $x \neq y$ et supposons $\epsilon x = H \setminus \{\epsilon, x, y\}$. Dans cette hypothèse l'on a:

(1) $x \in \epsilon y$;
(2) $y \in \epsilon y$;
(3) $\epsilon x \subset \epsilon y$.

En effet:

(1) Par la reproductibilité, il existe $a \in H$ tel que $x \in \epsilon a$. Si l'on a $a \in H \setminus \{\epsilon, x, y\} = \epsilon x$, alors $x \in \epsilon a \subset \epsilon(\epsilon x) = (\epsilon\epsilon)x = \epsilon x$ et cela est impossible. De façon analogue le résultat est absurde si $a = x$ ou $a = \epsilon$, puisque, dans le premier cas, l'on obtient $x \in \epsilon x$ et dans le second cas l'on trouve $x = \epsilon$. Donc il est clair que $a = y$ et par conséquent $x \in \epsilon y$.

(2) Par la reproductibilité il existe $b \in H$ tel que $y \in \epsilon b$.
Si $b \in H \setminus \{\epsilon, x, y\} = \epsilon x$, alors $y \in \epsilon b \subset \epsilon x$ et cela est impossible.
On arrive à l'absurde, même en supposant $b = x$ ou $b = \epsilon$; en effet, dans le premier cas, on a $y \in \epsilon x$, et dans le second $y = \epsilon$.
Il s'ensuit $b = y$ et $y \in \epsilon y$.

Il est trivial que (1) implique (3).

Alors, par l'axiome U_2 on a $\epsilon \notin \epsilon y$, et en utilisant (1), (2) et (3), on obtient:

$$H \setminus \epsilon = \{x, y\} \cup (H \setminus \{\epsilon, x, y\}) = \{x, y\} \cup \epsilon x \subset \epsilon y \subset H \setminus \epsilon$$

c'est-à-dire $\epsilon y = H \setminus \epsilon$.

En outre on a

$$\begin{aligned} H = yH &= y(\{\epsilon\} \cup (H \setminus \epsilon)) \\ &= y\epsilon \cup y(H \setminus \epsilon) \\ &= \{y\} \cup y(H \setminus \epsilon) \end{aligned}$$

et puisque, par l'axiome U_2, y n'appartient pas à $y\,(H \setminus \epsilon)$, on obtient

$$H \setminus y = y(H \setminus \epsilon) = y(\epsilon y) = (y\epsilon)y = yy.$$

Enfin

$$\begin{aligned} H \setminus y = yy \subset (\epsilon y)y &= \epsilon(yy) = \epsilon(H \setminus y) \\ &= \epsilon(\{\epsilon, x\} \cup \epsilon x) \\ &= \{\epsilon\} \cup \epsilon x \\ &= H \setminus \{x, y\}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $H \setminus y \subset H \setminus \{x, y\}$; c'est impossible puisque $x \neq y$.

Theoreme 1. *Pour tout hypergroupe H du type U à droite, de cardinalité ≤ 5, l'identité scalaire à droite ϵ est également identité à gauche.*

Démonstration. Si $|H| \in \{1,2\}$le résultat est immédiat.
Soit $|H| = 3$. Par l'axiome U_2, pour chaque $x \in H \setminus \epsilon$, on a $\epsilon \notin \epsilon x$, par conséquent on obtient $|\epsilon x| \in \{1, 2\}$.
Si $|\epsilon x| = 1$ par la proposition 1 on a $\epsilon x = x$.
Si $|\epsilon x| = 2$, étant que l'on a $|H| = 3$, alors $\epsilon x = H \setminus \epsilon$, donc on obtient $x \in \epsilon x$.
Soit $|H| = 4$. Pour chaque $x \in H \setminus \epsilon$, on a $|\epsilon x| \in \{1, 2, 3\}$ et, comme dans le cas précédent, si $|\epsilon x| \in \{1, 3\}$ on a $x \in \epsilon x$.
Si l'on suppose $|\epsilon x| = 2$ et $x \notin \epsilon x$, alors $\epsilon x = H \setminus \{\epsilon, x\}$ et par le lemme 1 ceci est impossible; il s'ensuit donc que même dans ce cas $x \in \epsilon x$.
Enfin si $|H| = 5$ et $x \in H \setminus \epsilon$ la cardinalité $|\epsilon x|$ de ϵx appartient à l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$.
Si $|\epsilon x| \in \{1, 3, 4\}$ par une méthode analogue à la précedant, en appliquant la proposition 1 et le lemme 1, on prouve que l'on a $x \in \epsilon x$.
Si $|\epsilon x| = 2$ et $x \notin \epsilon x$, il existe alors $y \in H \setminus \{\epsilon, x\}$ tel que $\epsilon x = H \setminus \{\epsilon, x, y\}$ et ceci est absurde par le lemme 2, par conséquent $x \in \epsilon x$.

Remarque. Il existe des hypergroupes de type U à droite de cardinalité ≥ 6 dont l'identité scalaire droite ϵ n'est pas identité gauche, comme on le démontré dans l'exemple suivant.

Mais on etablit tout d'abord une proposition:

Proposition 2. *Soit H appartenant à la* C.H.T.U.D. *ayant une identité scalaire à droite ϵ, et soit x un élément de H tel que $|\epsilon x| = 2$, alors pour chaque $y \in \epsilon x$ on a $y \in \epsilon y$.*

Démonstration. De $y \in \epsilon x$ on déduit $\epsilon y \subset \epsilon x$ et donc ou bien $\epsilon y = \epsilon x$, ou $\epsilon y \subsetneq \epsilon x$. Dans le premier cas il est clair que $y \in \epsilon y$, dans le second cas, puisque $|\epsilon x| = 2$, on obtient $|\epsilon y| = 1$, ainsi, par la proposition 1 il s'ensuit $\epsilon y = y$.

Exemple. Soit $H = \{\epsilon, x, y, z, t, w\}$ muni de l'hyperproduit representé par la table suivante:

	ϵ	x	y	z	t	w
ϵ	$\{\epsilon\}$	$\{y,z\}$	$\{y,z\}$	$\{y,z\}$	$H \setminus \epsilon$	$H \setminus \epsilon$
x	$\{x\}$	$H \setminus x$	$H \setminus x$	$H \setminus x$	$H \setminus x$	$H \setminus x$
y	$\{y\}$	$H \setminus y$	$H \setminus y$	$H \setminus y$	$H \setminus y$	$H \setminus y$
z	$\{z\}$	$H \setminus z$	$H \setminus z$	$H \setminus z$	$H \setminus z$	$H \setminus z$
t	$\{t\}$	$H \setminus t$	$H \setminus t$	$H \setminus t$	$H \setminus t$	$H \setminus t$
w	$\{w\}$	$H \setminus w$	$H \setminus w$	$H \setminus w$	$H \setminus w$	$H \setminus w$

Il est aisé de prouver que l'ensemble H munì de cet hyperproduit est un hypergroupe de type U à droite, avec identité scalaire à droite ϵ, qui n'est pas identité à gauche puisque $x \notin \epsilon x$.
On note en outre que $h = \{\epsilon\}$ est un sous-hypergroupe ultra-clos à droite de H (voir [2]) qui n'est pas inversible à gauche puisque $\epsilon x \cap \epsilon w \neq \emptyset$ et $\epsilon x \neq \epsilon w$.

Il est clair que l'exemple ci-dessus peut être étendu à un ensemble de cardinalité quelconque ≥ 6. En effet, si H représent un tel ensemble, et ϵ, x, y, z sont quatre de ses éléments distincts, on peut prendre pour hyperproduit:
$a\epsilon = \{a\}$, pour chaque $a \in H$;
$\epsilon x = \epsilon y = \epsilon z = \{y, z\}$;
$\epsilon w = H \setminus \epsilon$, pour chaque $w \in H \setminus \{\epsilon, x, y, z\}$;
$ab = H \setminus a$, pour chaque couple (a, b) d'éléments de $H \setminus \epsilon$.

Theoreme 2. *Soit K un hypergroupe de cardinalité finie > 1 avec un élément "e" tel que $ee = e$, il existe alors au moins un couple (x, y) d'éléments de $K \setminus e$ tel que $x \in ex$ et $y \in ye$.*

Démonstration. Puisque K est formé d'un nombre fini d'élément, la famille des sous-ensemble $\{ez\}_{z \in K}$ à une cardinalité finie et pour chaque $z \in K$, ez est aussi un sous-ensemble fini di K, tel que $1 = |ee| \leq |ez|$. Il existe alors un élément x de $K \setminus e$ tel que la cardinalité de ex soit maximale parmi la cardinalité des ensembles de la famille $\{ez\}_{z \in K}$.

Par la reproductibilité de K, il existe $w \in K$ tel que $x \in ew$; alors $ex \subset e(ew) = ew$, il s'ensuit $|ex| \leq |ew|$ et par la maximalité de $|ex|$ on obtient $|ex| = |ew|$. Mais alors $ex = ew$ et par conséquent $x \in ex$.

De façon analogue on prouve qu'il existe $y \in K \setminus e$ tel que $y \in ye$.

Le théoréme 2 permet d'affirmer qu'il n'existent pas d'hypergroupe de type U à droite de cardinalité finie, et d'identité scalaire à droite ϵ tel que, pour chaque $x \in H$ l'on a $x \notin \epsilon x$; cela n'est plus vrai si la cardinalité de l'hypergroupe est infinie; voici un exemple:

Exemple. Soit $(T, \leq)$ un ensemble totalment ordonné et dense (c'est-à-dire que pour chaque couple (x, y) d'éléments de T, avec $x < y$ il existe $z \in T$ tel que $x < z < y$), ayant un minimum m et sans élément maximal.
Pour chaque $x \in T \setminus m$ soit $I(x) = \{y \in T \mid m < y < x\}$.
L'on définit sur T l'hyperproduit suivant:

$xm = x$, pour chaque $x \in T$;
$mx = I(x)$, pour chaque $x \in T \setminus m$;
$xy = T \setminus x$, pour chaque couple (x, y) d'éléments de $T \setminus m$.

On démontre alors les proprietés suivantes:

1) Pour chaque $x \in T \setminus m$, on a $m(mx) = mx$ et $m(T \setminus x) = T$;
2) Pour chaque couple (x, y) d'éléments de $T \setminus m$ on a:
 i) $(mx)y = T = (my)x$;
 ii) $y(mx) = T \setminus y$ et $x(my) = T \setminus x$;
 iii) $(T \setminus x)y = (T \setminus y)x = T = x(T \setminus y) = y(T \setminus x)$;
3) Pour chaque triplet (a, b, c) d'éléments distincts de $T \setminus m$ l'on obtient $(ab)c = T = a(bc)$.

1) Pour chaque élément $y \in mx = I(x)$, on a $y < x$ et donc $my = I(y) \subset I(x) = mx$, et par conséquent

$$m(mx) = \bigcup_{y \in mx} my \subset mx .$$

En outre, en prenant $z \in T$ tel que $y < z < x$, on a $y \in mz$ et $z \in mx$, donc $y \in m(mx)$, on obtient aussi l'inclusion $mx \subset m(mx)$, et l'égalité $mx = m(mx)$ est ainsi démontrée.

De plus, T étant sans élément maximal, pour chaque $a \in T \setminus m$ il existe b' tel que $a < b'$ et aussi b tel que $x < b$.

Si $b' \leq x$, on a $a < b' \leq x < b$ et donc $a \in mb \subset m(T \setminus x)$, et si $x < b'$, puisque $a < b'$, on obtient $a \in mb' \subset m(T \setminus x)$. Il résulte que $T \setminus m \subset m(T \setminus x)$ et puisque l'on a $m \in mm \subset m(T \setminus x)$ on obtient l'égalité $T = m(T \setminus x)$.

2) En prenant deux éléments distincts z et w de mx, on a $(mx)y \supset zy \cup wy = (T \setminus z) \cup (T \setminus w) = T$, il s'ensuit donc $(mx)y = T$.

De la même façon on prouve $(my)x = T$. Donc i) est démontré.

Par définition on a $m \notin mx$ et $ya = T \setminus y$, pour chaque $a \in mx$. On obtient donc

$$y(mx) = \bigcup_{a \in mx} ya = T \setminus y$$

et par conséquent l'on trouve ii).

Enfin, pour démontrer iii) il faut considerer deux éléments distincts a et b de $T \setminus \{m, x, y\}$, on obtient:

$y(T \setminus x) \supset yb \cup ym = (T \setminus y) \cup \{y\} = T$;

$(T \setminus x)y \supset ay \cup by = (T \setminus a) \cup (T \setminus b) = T$;

donc $y(T \setminus x) = T = (T \setminus x)y$.

De même façon on prouve $x(T \setminus y) = T = (T \setminus y)x$.

3) Par la propriété 2.iii on a

$$(ab)c = (T \setminus a)c = T = a(T \setminus b) = a(bc)\,.$$

En utilisant les propriétés 1.2.3. on peut prouver aisement que l'hyperproduit défini précédemment est associatif et reproductible. L'hypergroupe T est en outre de type U à droite, et, par définition, l'élément m est identité scalaire à droite et pour chaque $x \in T \setminus m$ on a $x \notin mx$.

D'autres exemples d'hypergroupes du type U à droite tels que $x \notin \epsilon x$, pour chaque $x \in H \setminus \epsilon$, sont obtenus comme produit TXH, avec H appartenant à la C.H.T.U.D. et en particulier ceux du type $TX(G_{/g})$ avec g sous-groupe (non nécessairement normal) d'un groupe G.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Corsini, *Prolegomeni alla teoria degli ipergruppi*, Quaderni dell'istituto di Matematica Informatica e Sistemistica di Udine, (1986).

[2] D. Freni, *Structure des hypergroupes quotiens et des hypergroupes de type U*, Ann. Sci. Univ. Clermont-Ferrand II, Sér. Math. Fasc. 22 (1984), pp. 51-77.

[3] D. Freni, *Sur les hypergroupes de type U et sous-hypergroupes engendrés par un sous-ensemble*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 13 (1987), pp. 29-41.

[4] Y. Sureau, *Contribution à la théorie des hypergroupes et hypergroupes opérant transitivement sur un ensemble- Thése de doctorat d'etat*, Univ. de Clermont Ferrand II, (1980).

Dipartimento di Matematica e Informatica
dell'Università di Udine
Via Zanon 6
33100 Udine