

APPLICAZIONI ALLE VARIETÀ DI DIMENSIONE TRE DELLA TEORIA DEI DIFETTI NEI MEZZI ORDINATI

CORRADO TANASI

We study obstructions to surgery in dimension 3 and 4 coming from Sullivan's theory of minimal models. We also give applications of this obstruction theory to the theory of defects in ordered media (appearing in condensed matter physics).

1. Introduzione. Si raddoppi in modo standard una 3-varietà X chiusa con un numero finito di buchi (3-sfere). Sotto quali condizioni X si può ottenere per chirurgia di un link situato sopra una 3-sfera? Tale chirurgia dipenderà certamente sia dal tipo di link che dalle proprietà della varietà di partenza. A questo è legato il seguente fatto: ad una 4-palla con un link sulla frontiera si aggiungono (canonicamente) componente per componente, manici di indice due e dimensione quattro. La questione è: questa varietà si può ottenere da una sfera di omotopia con buchi moltiplicata per $[0, 1]$? In un articolo precedente [10] abbiamo provato che le prime ostruzioni per costruire questa varietà sono legate al linking number e al framing del link. Il processo costruttivo è stato in [10] successivamente raffinato annullando le prime ostruzioni e passando alla nozione di triplo linking. Tuttavia tale lavoro non copre tutte le situazioni. Un caso tipico non coperto è quando il link è quello di Whitehead.

Entrato in Redazione il 4 marzo 1992.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi nazionali del CNR e con il contributo 60% MURST.

In questo lavoro mostreremo che per realizzare la costruzione sopra detta per una 3-varietà *chiusa* con gruppo fondamentale finito, l'ostruzione è di tipo completamente diverso. Essa proviene difatti dalla teoria dell'omotopia razionale di Sullivan.

La teoria di Sullivan [8] consiste in un progetto generale volto a dedurre la teoria dell'omotopia (tensorizzata con R) direttamente dalle forme differenziali. L'idea è che la consueta operazione nella teoria di de Rham, che consiste nel passaggio al quoziente tra forme chiuse e forme esatte, produce una perdita di "informazione". L'idea di Sullivan è che le forme differenziali contengono di per sè molta più informazione geometrica. Una citazione classica dovuta a Chern, contribuisce a dare forza a questo punto di vista. Secondo Chern la maniera in cui una forma chiusa diviene bordo di una forma con una dimensione in meno, è ricca di informazioni geometriche che si perdono nel passaggio al quoziente. D. Sullivan realizza (in [8]) un dispositivo algebrico, detto *modello minimale*, che opera in due contesti diversi: su uno spazio semplicemente connesso, o su uno spazio non semplicemente connesso. Nel primo caso il suo dispositivo è capace di ricostruire, per mezzo delle forme differenziali, i gruppi di omotopia π_2, π_3, \dots . Nel secondo caso, partendo da uno spazio non semplicemente connesso (che è il contesto in cui ci muoveremo in questo lavoro), il modello minimale resta entro l'ambito del gruppo fondamentale e anche se non va oltre i gruppi di omotopia di dimensione superiore, esso ci dá informazioni ricche ed interessanti perchè (come si vedrà) tale dispositivo si aggancia ai "gradini" della cosiddetta serie centrale discendente. Premesso che nel caso di un nodo questa teoria non dá alcuna informazione, il dispositivo algebrico di Sullivan permette, nell'ambito in cui ci muoveremo (un link con almeno due componenti), di costruire una algebra differenziale graduata (DGA) che è duale della super-algebra di Lie costruita a partire dalla serie centrale discendente. I termini graduati di questa algebra, si possono pensare come termini formali di uno "sviluppo in serie di Taylor", nel senso che spingendosi in avanti, acquisendo altri termini graduati di questa algebra, è come spingersi in avanti in uno *sviluppo in serie di Taylor* guadagnando sempre più informazioni. Considereremo un link con due componenti $C_1 \cup C_2 \subset S^3 (= \partial D^4)$ tale che il linking number tra le due componenti distinte del link, sia nullo ($Lk(C_1, C_2) = 0$) e da questo punto iniziamo la costruzione induttiva dei termini (dello "sviluppo in serie di Taylor") dell'algebra differenziale graduata. Il primo termine con informazione non nulla, sarà del tipo " $v \wedge x + u \wedge y$ " che è una "frontiera" se il link è banale. Se non è una frontiera ($\neq d(\dots)$) il primo termine " $v \wedge x + u \wedge y$ " sarà un'invariante (non banale) che denoteremo con c . A ciascuna componente del link associeremo (come in [10]) un intorno tubolare con framing nullo, mediante il quale costruiremo una varietà 4-dimensionale W^4 con frontiera. Tale varietà

è data da un disco con manici di indice 2, piú la sua frontiera. L'interesse di considerare l'invariante c è che se c è non nullo otterremo informazioni topologiche su questa varietà. Ad esempio W^4 con c non nullo non è una sfera di omotopia con "buchi", moltiplicata con $[0, 1]$. Il caso tipico trattato in questo lavoro è quando il link è quello di Whitehead. Il link di Whitehead era già conosciuto dai fisici del secolo scorso. Maxwell aveva osservato che se attraverso una componente del link di Whitehead, passa una corrente elettrica, allora si può muovere una carica elettrica lungo l'altra componente senza alcuna spesa energetica. L'ambito fisico su cui ci muoviamo è quello di un mezzo ordinato che ha come linea di difetti un link e vogliamo trovare un'ostruzione alla banalizzazione del link (cioè al suo scioglimento). Per la definizione di mezzo ordinato, linee di difetti, ecc.. vedi (ad esempio) [9]. Ora sappiamo che, qualunque sia il link, un punto di vista classico è quello di calcolare il gruppo fondamentale del complementare del link ma questo calcolo è, eccetto in alcuni casi, molto complesso e quindi inefficiente dal punto di vista pratico. Ora un gruppo libero è un gruppo con crescita massima (esponenziale), ad esempio il gruppo fondamentale del complementare di un link banale è libero (teorema di Papakyriakopoulos) in questo caso non vi è alcuna ostruzione allo scioglimento del link. Piú relazioni si aggiungono al gruppo, minore è la crescita e maggiori sono le ostruzioni per distaccare il link. Il caso estremo è un link con due componenti a cui si aggiungono tutte le relazioni possibili, il gruppo fondamentale è abeliano e si ha la massima ostruzione allo scioglimento del link.

Il caso (duale) della DGA è piú calcolabile, ci si può fermare dopo un numero finito di passi dello "sviluppo in serie di Taylor" e si può sperare che (come avverrà nel nostro caso) già dopo un numero finito di termini, lo "sviluppo" inizierà a dare informazioni interessanti. Il caso duale della DGA (modello minimale) è completamente diverso dal caso in cui si considera il gruppo fondamentale. Infatti un gruppo fondamentale libero corrisponde alla DGA la piú ricca, perchè tutte le volte che nello "sviluppo in serie di Taylor" si giunge ad un termine critico, questo termine è sempre una frontiera di una forma differenziale con la quale è possibile continuare lo sviluppo. Nel caso in cui si aggiungono relazioni al gruppo, si perviene ad un termine che non è una frontiera (l'algebra è meno ricca). Questo termine è un'invariante che costituisce un'ostruzione allo scioglimento del link. Piú si avanza nello sviluppo in serie di Taylor, piú si trovano invarianti (piú fini).

Alcune osservazioni:

- a) Sappiamo che l'entropia topologica è una nozione legata alla crescita di un gruppo. Un gruppo libero ha crescita massima e quindi entropia massima, ed entropia topologica massima vuol dire minima ostruzione allo scioglimento del link. Piú l'entropia topologica è piccola, piú relazioni si

hanno nel gruppo, piú la DGA è povera, piú la crescita è piccola, piú è grande l'ostruzione allo scoglimento del link.

- b) Sul punto di vista di Sullivan, sviluppatosi prima della nascita dei polinomi di V.Jones, non si sono fatti molti lavori. I polinomi di V.Jones affrontano problemi simili a quelli affrontati da Sullivan, ma fino ad ora sulla relazione tra la teoria di Sullivan e i polinomi di V. Jones, regna il buio totale.

2.- Un modello minimale di una varietà M^n è, per definizione, un modello minimale (cf. appendice) dell'algebra delle sue forme differenziali $\Omega^*(M^n)$. Il metodo di Sullivan si sviluppa secondo due vie distinte:

Caso A. *La varietà M^n è semplicemente connessa ($\pi_1 M^n = 0$).*

In questo caso (che non sarà ripreso qui), il modello minimale di tutta la DGA contiene i gruppi di omotopia di $\pi_{i \geq 2} \dot{M}^n \otimes R$ (algebra di Lie graduata di omotopia), o piú generalmente la torre di Postnikov tensorizzata con R .

Caso B. *La varietà M^n non è semplicemente connessa ($\pi_1 M^n \neq 0$).*

Qui la costruzione del modello minimale dà luogo all'algebra duale dell'algebra di Lie di $\pi_{i \geq 2} M^n \otimes R$.

Per lo sviluppo di questo lavoro, presentiamo una parte di questa teoria (primi termini dello "sviluppo di Taylor" (cf. appendice)). Si consideri una 3-sfera S^3 contenente un link con due componenti C_1 e C_2 . Iniziamo la costruzione di una parte del modello minimale sulla 3-varietà $M^3 = S^3 - C_1 - C_2$. Il gruppo di coomologia alla De Rham di M^3 a coefficienti in R è $H^1(M^3, R) = R \otimes R$. Scegliamo due 1-forme (chiuse) $x, y \in M^3$, corrispondenti ai generatori canonici associati alle componenti C_1 e C_2 . Vedremo nel paragrafo seguente, che le forme x ed y corrisponderanno alle superficie di Seifert delle componenti C_1 e C_2 del link.

I casi che si possono avere sono:

- (i) (Caso banale) il *linking-number* $Lk(x, y)$ è diverso da zero.

Qui la costruzione del modello minimale si ferma. Infatti il cup-product $x \wedge y$ è una 2-forma chiusa e se il linking number è diverso da zero, $x \wedge y$ non è "frontiera", ossia non esiste una 1-forma z tale che $dz = x \wedge y$.

- (ii) (Caso non banale) il *linking-number* $Lk(x, y)$ è zero.

Allora esisterà una 1-forma z tale che $dz = x \wedge y$, il cup-product $x \wedge y$ (che è una 2-forma chiusa) è una frontiera per cui la costruzione del modello minimale continua. Poichè si verifica che $d(z \wedge x) = 0 = d(z \wedge y)$, Sullivan dimostra che esistono due 1-forme u e $v \in \Omega^1 M^3$ tali che $du = z \wedge x$ e $dv = z \wedge y$. Costruiamo le 2-forme: $u \wedge x, v \wedge y$ e $u \wedge x + v \wedge y$, differenziando

otteniamo

$$d(u \wedge x) = z \wedge x \wedge x - u \wedge dx = 0,$$

$$d(v \wedge y) = z \wedge y \wedge y - v \wedge dy = 0.$$

Anche in questo caso, Sullivan mostra che esistono altre due 1-forme $a, b \in \Omega^1 M^3$ tale che $da = u \wedge x$ e $db = v \wedge y$.

Si verifica, a questo punto, il primo caso non banale.

	z	u		a	b	c
$x \wedge y$	1	0		0		
$z \wedge x$		1		0		
$z \wedge y$			1			
$u \wedge x$	0			1		
$u \wedge y$					1	
$v \wedge x$						1
$v \wedge y$						1

Tab. A (Matrice)

Su tutta una colonna della matrice (tab.A) si leggono le frontiere dell' elemento scelto sulla prima riga; 0 equivarrà ad assenza, 1 a presenza di frontiera.

Infatti differenziando la 2-forma $v \wedge x + u \wedge y$, si trova che

$$d(v \wedge x + u \wedge y) = z \wedge y \wedge x - v \wedge dx + z \wedge x \wedge y - u \wedge dy = 0$$

è nullo. Sullivan osserva che se, in questo caso, il gruppo fondamentale $\pi_1 M^3$ è libero (il teorema di Papakyriakopoulos [4] ci dice che, in questo caso, il link è banale) allora esiste una 1-forma c tale che $dc = v \wedge x + u \wedge y$. Quanto detto fin qui è illustrato nella tabella A (o matrice) che arrestiamo fino ai termini che a noi interessano.

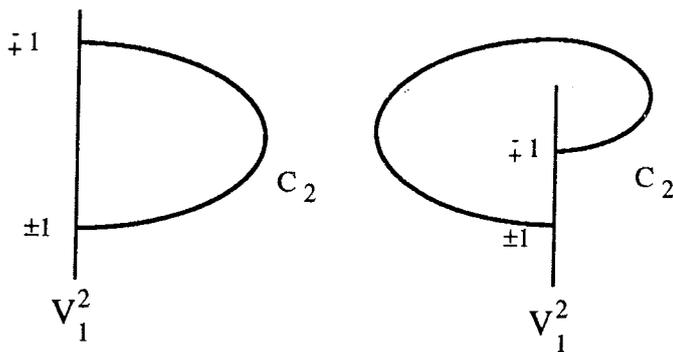
3.- Consideriamo ora la componente C_1 (e/o la componente C_2) del link. Richiamiamo alcuni fatti [5]:

Esiste (sempre) una varietà orientabile (non unica) $V_1^3 \hookrightarrow S^3$ la cui frontiera ∂V_1^2 è C_1 .

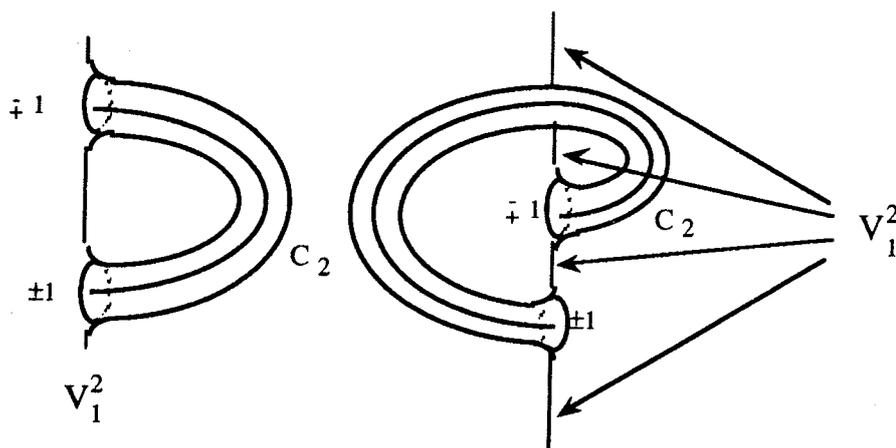
Nel seguito denoteremo con V_1^2 e V_2^2 le superfici di Seifert relative rispettivamente alle componenti C_1 e C_2 del link. Si voglia "migliorare" (nel senso che tra poco chiariremo) la superficie di Seifert. È sempre possibile (per il teorema di trasversalità [7]) assumere che il nodo C_1 sia trasversale alla superficie V_2^2 . Fissiamo un orientamento della sfera S^3 . Sia p un punto di $V_1^2 \cap C_2$. L'orientamento della componente del link C_1 insieme all'orientamento indotto su un piccolo disco di V_1^2 di centro p , induce un orientamento su S^3 che può essere concorde o discorde all'orientamento di S^3 . In tal modo a ciascun punto di $V_1^2 \cap C_2$ si può dare un segno che sarà positivo, se vi è concordanza tra i due orientamenti, negativo in caso contrario.

Definizione 1. *Il linking number $Lk(C_1, C_2)$ tra le componenti del link C_1 e C_2 è la somma algebrica che si ottiene sommando i segni (\pm) associati a tutti i punti comuni tra la superficie di Seifert V_1^2 della componente C_1 e la componente C_2 del link.*

Poichè il link ha solo due componenti, il linking number *non* dipende dall'ordine con cui esse sono scelte. Supponiamo ora che il linking number $Lk(C_1, C_2)$ sia nullo. In tal caso i punti di intersezione (tra la componente C_2 e la superficie V_1^2) con segno positivo, sono tanti quanti i punti con segno negativo. Scegliamo un accoppiamento tra un punto con segno positivo con uno avente segno opposto. Due punti consecutivi sulla curva C_2 a segni alterni, formeranno una coppia detta *minimale*. Una coppia minimale esisterà sempre nel caso nostro. Consideriamo allora un arco su C_2 su cui si succedono punti di segno opposto. Le due situazioni che si potrebbero (a priori) verificare, sono astrattamente rappresentate dalla figura che segue



Per ogni punto comune tra la componente C_2 e la superficie V_1^2 , si tolga un disco di piccolo raggio, centrato su tale punto. Su una coppia di buchi corrispondenti ad una coppia minimale, si incollino (in modo standard), un manico di indice uno e si rendano lisci i contatti. Operando allo stesso modo per tutti i punti comuni, otteniamo una nuova superficie di Seifert orientabile. La seguente figura illustra il miglioramento di una superficie di Seifert, quando i punti si succedono a coppie minimali.



Continuando a cancellare tutte le coppie minimali di $V_1^2 \cap C_2$ e di $V_2^2 \cap C_2$, si ottengono due superfici orientabili dette di Seifert "migliorate". In ciascuna delle quali i punti di contatto tra V_1^2 e C_2 e tra V_2^2 e C_1 sono scomparsi. Quanto detto permette di affermare che

Teorema 1. *Se il linking-number tra le componenti del link C_1 e C_2 è nullo, esiste una superficie di Seifert "migliorata" \tilde{V}_1^2 (\tilde{V}_1^2) tale che $\tilde{V}_1^2 \cap C_2 = \emptyset$ ($\tilde{V}_2^2 \cap C_1 = \emptyset$). Le superfici migliorate \tilde{V}_i^2 , ($i = 1, 2$) si incontrano trasversalmente formando una famiglia finita Γ di curve (orientabili) chiuse, differenziabili, a due a due disgiunte (un link) che non incontra il link iniziale.*

4.- Il disco D^4 , con frontiera S^3 si supponrà dotato della sua struttura differenziabile standard. Decomponiamo il disco D^4 (standard) nel prodotto di due 2-dischi D^2 e d^2 . La frontiera $\partial D^4 = \partial (D^2 \times d^2) = \partial D^2 \times d^2 \cup D^2 \times \partial d^2$ si decompone in due anelli solidi allacciati e incollati lungo i bordi rispettivi. A ciascuna componente parametrizzata C_1 e C_2 del link, associamo un manico di

dimensione quattro e indice due $D_i^2 \times d_i^2$ ($i = 1, 2$). Sia $C_i \times D_i^2$ ($i = 1, 2$) la zona di incollamento; ove $\partial d_i^2 = C_i$ e ($i = 1, 2$). Incolliamo (mediante l'applicazione identica) la zona $C_i \times D_i^2$ ($i = 1, 2$) (contenuta nel bordo del manico) con $C_i \times D_i^2$, ($i = 1, 2$) considerata sulla frontiera S^3 del disco D^4 e si rendono lisci i contatti. Con questi dati definiamo la 4-varietà

$$W^4 = S^3 + \bigcup_{i=1}^2 (D_i^2 \times d_i^2, C_i \times D_i^2),$$

e sia V^3 la frontiera (orientabile) di W^4 .

Osservazione 1. Fermiamo la costruzione del modello minimale al quinto termine della tabella A che identifica la 2-forma $u \wedge x + v \wedge y$. Occorre rilevare che la 2-forma

$$d(u \wedge x + v \wedge y) = z \wedge x \wedge x - u \wedge dx + z \wedge y \wedge y - v \wedge dy = 0.$$

è chiusa.

Ciò posto dimostriamo il seguente

Teorema 2. *Supponiamo che il linking number $Lk(C_1, C_2)$ tra le due componenti del link C_1 e C_2 sia nullo, allora*

- (1) *è possibile costruire (cf. paragrafo precedente) un modello minimale per la varietà V^3 mediante le 1-forme x ed $y \in \Omega^1 M^3$ chiuse, pensate come generatori del gruppo di coomologia $H^1(M^3, R)[= R \otimes R]$.*
- (2) *Fermiamo la costruzione del modello minimale al quinto termine della tab. A che identifica la 2-forma $u \wedge x + v \wedge y$ (cf. osservazione 1). Siano H^3 una varietà chiusa con $\pi_1 H^3$ finito e D_i^3 ($i = 1, \dots, N$) N 3-dischi differenziabili, a due a due disgiunti. Poniamo*

$$X^3 = H^3 - \bigcup_{i=1}^N (\text{int} D_i^3).$$

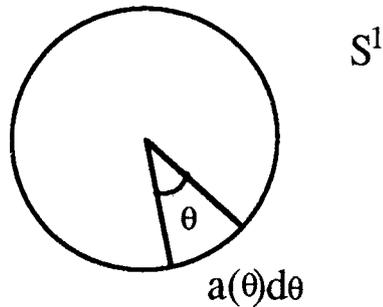
Se non esiste una 1-forma $c \in \Omega^1 M^3$ tale che $dc = u \wedge x + v \wedge y$, allora $V^3 (= \partial W^4)$ non può essere della forma

$$X^3 \bigcup_{id} X^3.$$

Dal teorema risulta immediatamente il

Corollario. *Se la condizione 2) del teorema vale, allora W^4 non può essere della forma $X^3 \times [0, 1]$.*

Dimostrazione. Per dimostrare il punto 1) del teorema seguiremo un modo geometrico (secondo D. Sullivan) di interpretare le forme differenziali e la costruzione del modello minimale. Fissiamo l'attenzione, per prima, sulla varietà aperta $M^3 (= S^3 - C_1 - C_2)$, poi passeremo alla varietà chiusa V^3 . Una forma differenziale di grado 1, chiusa, sarà rappresentata come una superficie senza frontiera. Nel caso della varietà M^3 , questa sarà aperta e orientata trasversalmente e avrà un embedding proprio (cioè $f^{-1}(\text{compatto}) = \text{compatto}$). "L'intersezione" di due 1-forme (ovvero una 2-forma) sarà interpretata geometricamente come una collezione di curve orientate aventi un embedding proprio. Tuttociò si realizza mediante i seguenti passi: nel caso semplice del cerchio S^1 , la coomologia è $H^1(S^1) = R$



In un intorno $[-\varepsilon, \varepsilon]$ in S^1 si consideri una 1-forma ω , a supporto in $[-\varepsilon, \varepsilon]$ tale che $\int_{S^1} \omega = 1$. La forma ω è chiusa ed è un generatore di $H^1(S^1)$. Nel caso $S^1 - C$, passiamo da S^3 a $S^3 - C \times D^2 (= \widetilde{W}^3)$. Sia S' la superficie di Seifert aperta, relativa al nodo C e consideriamo una banalizzazione del suo fibrato normale $S' \rightarrow S' \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Sia ω la nostra 1-forma a supporto in un intorno di $(-\varepsilon, \varepsilon)$, ed esaminiamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} S' \times (-\varepsilon, \varepsilon) & \pi^* \omega = x \in \Omega^1 \widetilde{W}^3 & \\ \downarrow \pi & & \\ (-\varepsilon, \varepsilon) & \omega \in \Omega^1(-\varepsilon, \varepsilon) & \end{array}$$

la 1-forma x possiede le seguenti proprietà

(a) $dx = 0$,

- (b) se γ è un ciclo di \widetilde{W}^3 allora $\int_{\gamma} x = Lk(\gamma, C)$,
 (c) il supporto della 1-forma è contenuto in un intorno, sufficientemente piccolo, della superficie di Seifert.

Passiamo ora al link con due componenti C_1 e C_2 e sia $M^3 = S^3 - C_1 - C_2$ lo spazio complementare. Costruiamo due superficie di Seifert *migliorate* relative alle componenti del link C_1 e C_2 . Indichiamo con x ed y le due superficie di Seifert migliorate rispettive. Poichè il linking number $Lk(C_1, C_2)$ è zero possiamo prendere la superficie aperta x in modo tale che $x \cap C_2 = \emptyset$. Sia $a(q) dq$ una 1-forma, a supporto in un intorno di $(-\varepsilon, \varepsilon)$ di S^1 e soggetta alla condizione $\int_{S^1} a(q) dq = 1$. Supponiamo che le superficie x ed y siano trasversalmente orientate e dotate ciascuna di un intorno tubolare normale. Sia (p, θ) un punto qualunque dell'intorno tubolare di x e siano (p_1, p_2) le coordinate locali di p sulla superficie x . In modo analogo, sia (q, ψ) un punto generico dell'intorno tubolare della superficie y . Indichiamo con (q_1, q_2) le coordinate locali di q su y . Definiamo le 1-forme

$$\omega_x(p_1, p_2, \theta) = a(\theta) d\theta,$$

e

$$\omega_y(q_1, q_2, \psi) = a(\psi) d\psi.$$

Sappiamo che le superficie di Seifert x ed y si incontrano secondo un insieme di curve Γ chiuse, orientate, differenziabili a due a due disgiunte. Osserviamo che anche nel caso in cui $Lk(C_1, C_2) \neq 0$ quanto si dirà più avanti continuerà ad essere vero, a meno che le superfici di Seifert si incontrano secondo segmenti aperti. Fissiamo l'attenzione su una piccola porzione γ di una curva Γ' del sistema di curve Γ ed ivi compatibilizziamo le coordinate dei punti degli intorni tubolari di x e di y ponendo $p_2 = q_2, q_1 = \theta, p_1 = \psi$. La 2-forma

$$\omega_{xy} = \omega_x \wedge \omega_y = a(\theta) a(\psi) d\theta \wedge d\psi$$

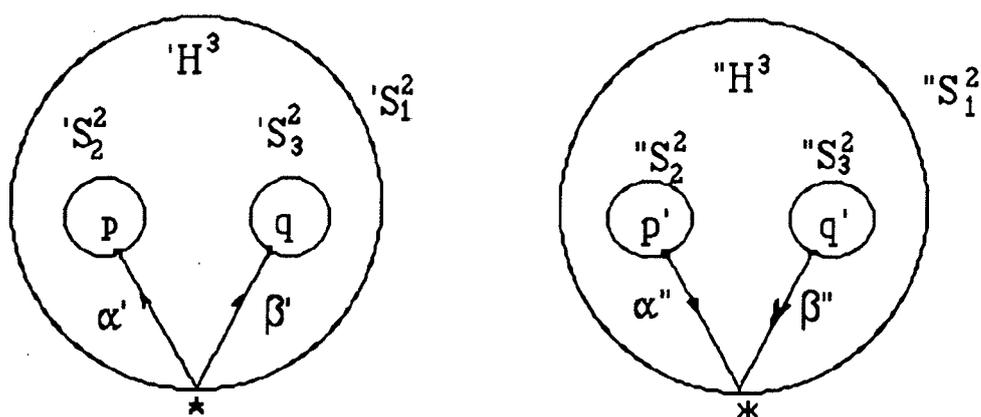
che gode della proprietà $\int_{S^2} \omega_x \wedge \omega_y = 1$, è chiusa. Da cui segue che

$$\begin{array}{ccc} \Gamma' \times [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon] & \pi^* \omega_{xy} \in \Omega^2 M^3 \\ \downarrow \pi & \\ S^2 \hookrightarrow [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon] & \omega_{xy} \in \Omega^2 S^2. \end{array}$$

Per comodità di notazione, poniamo $x \wedge y = \pi^* \omega_{xy}$. La 2-forma $x \wedge y$ è chiusa perchè ω_{xy} è una forma chiusa. Aggiungendo le "anime" dei rispettivi manici, le superfici di Seifert V_i^2 ($i = 1, 2$) si trasformano nelle superfici *chiuse* rispettive \widetilde{V}_i^2 ($i = 1, 2$). Poichè l'anima dei rispettivi manici *non si*

incontrano (sono infatti disgiunte da tutto il resto della costruzione) si ha che $\tilde{V}_1^2 \cap \tilde{V}_2^2 = V_1^2 \cap V_2^2$ e tutta la costruzione resta la stessa per V^3 . Dunque si passa da $S^3 - C_1 - C_2$ alla superficie chiusa V^3 aggiungendo le anime dei manici che "chiudono" le superficie di Seifert senza toccare il resto della costruzione.

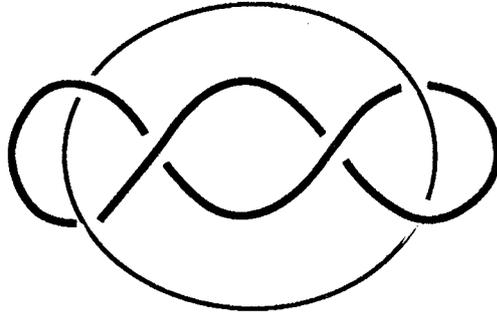
Dimostrazione del punto 2. Supponiamo che V^3 sia della forma $X^3 \cup_{id} X^3$. Operiamo gli incollamenti suggeriti dalla seguente figura



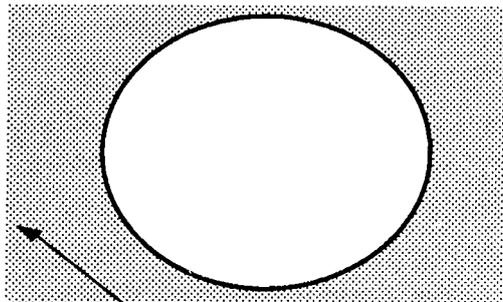
L'operazione di incollamento identifica \star con \star , p con p' , q con q' , $'S_2^2$ con $''S_2^2$; $'S_3^2$ con $''S_3^2$.

Il cammino α , parte dal punto base \star (sul bordo di $'S_1^2$) segue il cammino α' , giunge in p , segue il bordo di $'S_2^2$ torna al punto \star seguendo il cammino α'' in $''S_1^2$. Il cammino β inizia dal punto base \star (sul bordo di $'S_1^2$) segue il cammino β' , giunge in q , segue il bordo di $'S_3^2$ poi torna al punto \star seguendo il cammino β'' in $''S_1^2$. Allora $\pi_1 V^3 \otimes R = Z * Z$ è un gruppo libero con i due generatori α e β . Ma, seguendo Sullivan, per una varietà M^n con $\pi_1 M^n \neq 0$ (in generale) il modello minimale è una DGA il cui duale è l'algebra di Lie graduata di $\pi_1 M^n \otimes R$, per cui la costruzione del modello minimale dipende solo da π_1 . Due varietà con lo stesso gruppo fondamentale hanno lo stesso modello minimale (difatti la tabella A è uguale per le due varietà). Ora per quanto detto nel paragrafo 2 (per una varietà con gruppo fondamentale libero) esiste un c tale che $dc = v \wedge x + u \wedge y$, da cui segue il punto 2 del teorema.

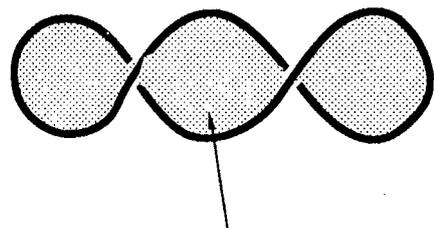
Osservazione 2. Per dimostrare come questo teorema sia coperto da un caso concreto, considereremo il link di Whitehead



Vedremo che la varietà ottenuta dal un link di Whitehead non è della forma $X^3 \cup_{id} X^3$. In altre parole proveremo che non esiste una 1-forma $c \in \Omega^1 M^3$ tale che $dc = u \wedge x + v \wedge y$. Indicheremo con x ed y le componenti del link e, per semplificare le notazioni, denoteremo con le stesse lettere le superficie di Seifert e le 1-forme corrispondenti e con x_{migl} ed y_{migl} le superfici di Seifert migliorate. Le superficie di Seifert delle componenti x e y del link sono mostrate nella seguente figura



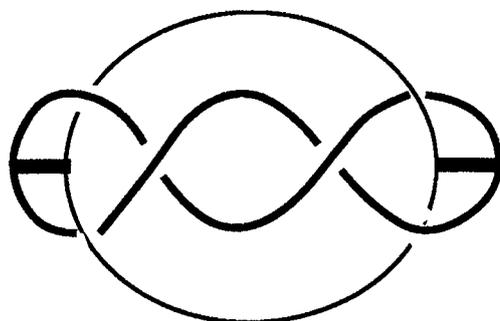
superficie di Seifert (non limitata) x
relativa alla componente C_1 del link



superficie di Seifert y relativa
alla componente C_2

Fig. 2

Le due superficie (non sono adatte perchè) si incontrano lungo due segmenti



— = segmenti lungo i quali si incontrano le due superficie di Seifert x ed y .

Fig. 3

Il miglioramento delle due superficie x ed y è evidenziato dai due intorni tubolari illustrati nella figura 4. La curva z si ottiene dall'incontro delle due superficie migliorate x_{migl} ed y_{migl}

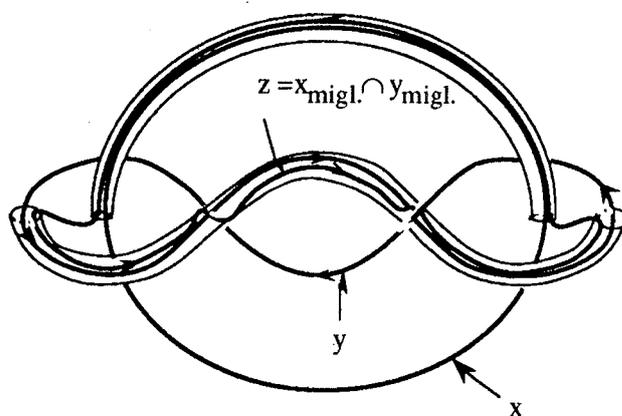
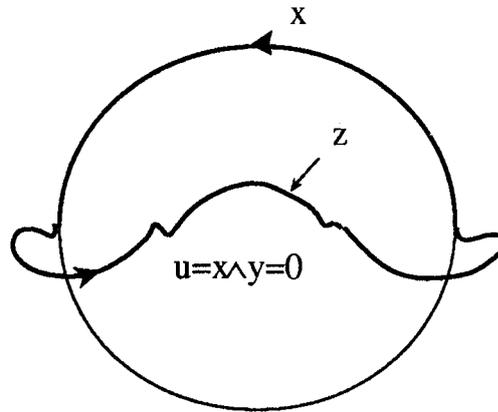


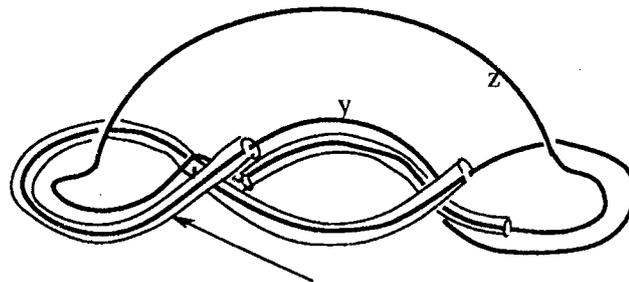
Fig. 4

Ma le superficie di Seifert z ed x si possono distaccare, per cui [cf. Tabella A]

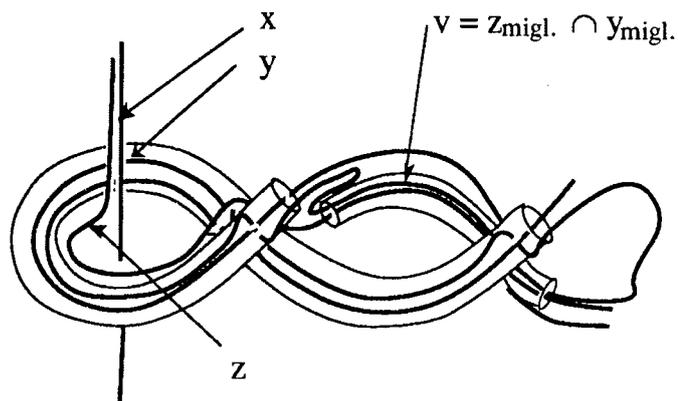
$$u = 0.$$



Per avere la 1-forma v [cf. Tabella A] occorrerà esaminare le intersezioni tra le superfici di Seifert migliorate z_{migl} e y_{migl} . Ora v deve essere chiusa per cui la superficie corrispondente deve essere migliorata, come (in parte) si vede nella seguente figura



intorno tubolare per "migliorare" z



abbiamo così costruito v . Il problema è sapere se esiste o no un c con la proprietà $dc = x \wedge v$. Ma l'esistenza di questa 1-forma c equivale a sapere se il linking number $Lk(x, v)$ è diverso da zero. Dalla figura che segue

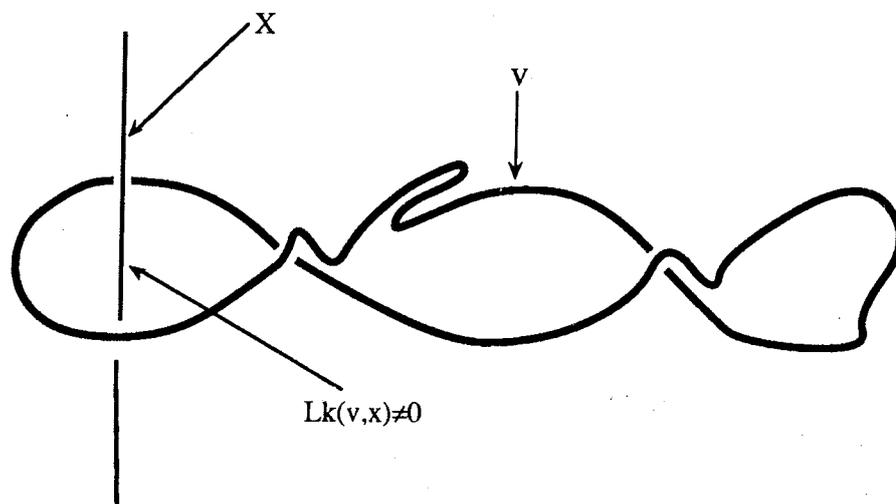


Fig. 5

risulta che è questo il caso che capita nel nostro esempio.

4. Costruzione di un modello (vedi anche [10]). Lo spazio fisico M^3 sia una 3-varietà liscia, compatta, orientabile e connessa. Indichiamo con Σ un sottoinsieme di M^3 . Nei punti non appartenenti a Σ è data un'applicazione continua Φ da M^3 in uno spazio topologico V . L'applicazione $M^3 - \Sigma \xrightarrow{\Phi} V$ si chiama *parametro d'ordine*, lo spazio topologico V dicesi *spazio del parametro d'ordine* o *varietà degli stati interni*, il sottoinsieme Σ chiamasi *insieme dei difetti*.

La varietà degli stati interni sia una 3-varietà V^3 e supponiamo che

- (a) $\pi_1 V^3$ sia abeliano e non nullo.
- (b) $\pi_2 V^3 = 0$ (non esistono punti di difetto stabili).

Supponiamo che le linee di difetto Σ siano, per rimanere nel caso di questo lavoro, un link con due componenti C_1 e C_2 . Per ciascuna componente C_i ($i = 1, 2$) costruiamo in M^3 un intorno tubolare. La figura 6 considera solo la componente C_1 del link

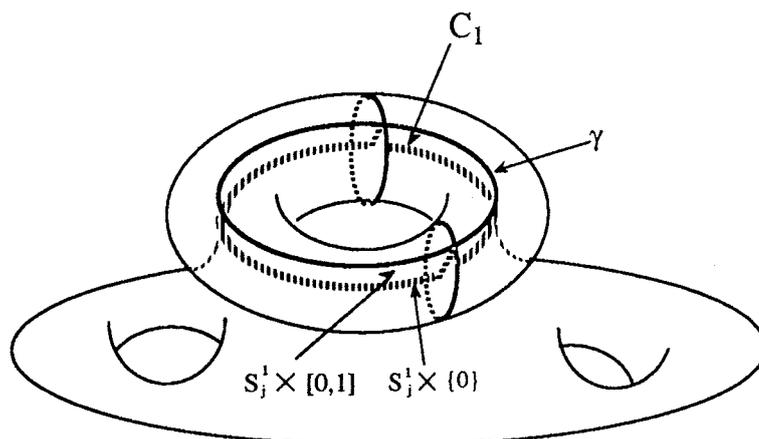


Fig. 6

la curva γ_1 proviene dalla frontiera della superficie di Seifert relativa alla componente C_1 del link. Questa curva γ_1 , disgiunta dal resto, è situata sulla superficie di un intorno tubolare della componente C_1 del link, per cui su di essa è definito il parametro d'ordine $M^3 - \Sigma \xrightarrow{\Phi} V^3$. Ma $\Phi(\gamma_1)$ è omologa a zero in $M^3 - \Sigma$ per cui essa è omologa a zero anche in V^3 , ma il gruppo fondamentale $\pi_1 V^3$ è abeliano [condizione (a)], dunque $\Phi(\gamma_1)$ è anche *omotopa* a zero. Denotiamo con $N(C_i)$ ($i = 1, 2$) un'intorno tubolare normale della componente C_i ($i = 1, 2$) del link. Si consideri la 3-varietà, compatta, $M^3 - \text{int}N(C_1)$. Indichiamo con $X_1 = (M^3 - \text{int}N(C_1)) \cup D_1^2$ lo spazio ottenuto appoggiando un disco sul cammino chiuso γ_1 . Il parametro d'ordine Φ si estende su X_1 ($\Phi(\gamma_1)$ è omotopa "a zero"). Operiamo la stessa costruzione per componente C_2 del link. Si ottiene uno spazio $X_{1,2}$ su cui il parametro d'ordine Φ si estende. Sia Y lo spazio $M^3 - \text{int}N(\Sigma)$ e su Y (che è una varietà) si appoggi un manico $D^2 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ di indice 2 e di dimensione 3. Per ciascuna componente, la frontiera ∂Y è un toro tagliato lungo le curve γ_i ($i = 1, 2$). Su ciascuna γ_i incolliamo due dischi $D^2 \times \{-\varepsilon\}$ e $D^2 \times \{\varepsilon\}$. Il risultato di questa chirurgia è una sfera per ogni componente (2 sfere in totale). Tappando questi buchi sferici otteniamo $M_{chirurgia}^3$ ($\equiv N^3$) chiusa e senza frontiera. Poichè è $\pi_2 V^3 = 0$ il parametro d'ordine Φ si estende su N^3 . Associamo ad N^3 il parametro d'ordine esteso $N^3 \xrightarrow{\tilde{\Phi}} V^3$.

Abbiamo mostrato allora

Teorema 3. *Nello spazio fisico M^3 supponiamo che l'insieme dei difetti Σ sia un link con due componenti con linking number nullo. Se la varietà degli stati interni V^3 verifica le condizioni a), b) e se non esiste per $\tilde{\Phi}(N^3)$ una 1-forma c tale che $dc = v \wedge x + u \wedge y$ allora un sistema fisico qualsiasi non può staccare*

il link Σ senza creare nello stesso tempo una nuova varietà che ammette una 1-forma dello stesso tipo.

Appendice

Notizie particolareggiate su quanto sarà detto in questa appendice, si trovano nei lavori [1], [2], [5] (e in modo particolare in) [3], e [6] citati in bibliografia. Ad un gruppo discreto G è possibile associare un'algebra di Lie graduata (una super-algebra di Lie). Il commutatore degli elementi x ed y di un gruppo G è l'operazione $G \times G \xrightarrow{[\dots]} G$ che associa alla coppia (x, y) l'elemento $x^{-1}y^{-1}xy$ di G . Se A e B sono sottogruppi di G , la parentesi $[A, B]$ indicherà il sottogruppo di G generato da $[x, y]$, quando gli elementi x ed y percorrono rispettivamente A e B . Siano A, B e C sottogruppi normali di G , allora

$$(1) \quad [A, [B, C]] \subset [B, [C, A]][C, [A, B]].$$

È facile verificare che

$$(2) \quad [xy, [y, z]][yz, [z, x]][zx, [x, y]] = 1.$$

La costruzione che segue, permette di passare da un gruppo astratto, attraverso la serie centrale discendente, ad un'algebra di Lie graduata. Il gruppo astratto sarà, nel nostro caso, il gruppo fondamentale $\pi_1 M^n$ scritto moltiplicativamente. Su di esso costruiamo un'algebra di Lie graduata. Si sa che il gruppo π_1 è in molti casi difficile da calcolare, l'algebra di Lie graduata associata al gruppo π_1 , ha elementi di grado zero, di grado uno, di grado due etc.. come nello sviluppo in serie di Taylor di una funzione. Il modello minimale di Sullivan è il duale di quest'algebra. Anche se il modello minimale di Sullivan e l'algebra di Lie associata al gruppo π_1 sono strutture algebriche diverse, è possibile dall'una ricostruire l'altra.

Per costruire l'algebra di Lie graduata del gruppo π_1 , supponiamo che esso sia non abeliano e scritto moltiplicativamente. Con π_1 abeliano la costruzione si ferma subito. Definiamo

$$G_1 = \pi_1, G_2 = [G_1, G_1], G_3 = [G_1, G_2]$$

e per induzione poniamo $G_h = [G_1, G_{h-1}] \dots$

Per la successione di gruppi $\{G_i\}_{i>0}$, detta la *serie centrale discendente* del gruppo G_1 , vale la relazione di inclusione

$$(4) \quad [G_n, G_m] \subset G_{n+m}.$$

Per $n = 1$ la (4) è, dalla definizione, ovvia. Supponiamo $n > 1$, allora per l'ipotesi induttiva e per la (1) segue

$$\begin{aligned} [G_n, G_m] &\subset [G_n, [G_{m-1}, G_1]] \subset [G_{m-1}, [G_1, G_n]][G_1, [G_n, G_m - 1]] \subset \\ &\subset [G_{m-1}G_{n+1}][G_1, G_{n+m-1}] \subset G_{n+m}G_{n+m} \subset G_n + m. \end{aligned}$$

I sottogruppi G_i ($i > 1$) sono normali in G_1 , il gruppo quoziente $A_i = G_i/G_{i+1}$ si dice l' i -ma abelianizzazione del gruppo G_1 . Supponiamo che $[x]$ ed $[y]$ siano classi di A_i e di A_j rispettivamente. Esse possono essere rialzate agli elementi x ed y di G_i e G_j rispettivamente. Si consideri il commutatore $[[x], [y]]$ e la classe $[[x, y]]$ della $i+j$ -ma abelianizzazione A_{i+j} del gruppo G_1 (ove $[x, y] \in G_{i+j}$). La classe $[[x, y]]$ non dipende dalla scelta degli elementi x ed y di G_i e G_j , ma dalle classi $[x]$ ed $[y]$ di A_i e di A_j . Esiste così un'operazione

$$A_i \times A_j \xrightarrow{[\dots]} A_{i+j}$$

(una parentesi), che rispetta le graduazioni e verifica tutti gli assiomi dell'algebra di Lie. Questa parentesi munisce

$$L(G_1) = A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_k \otimes \dots$$

di una struttura di algebra graduata che, per le relazioni (1) e (2) è un'algebra di Lie, detta algebra di Lie graduata del gruppo G_1 . Ma all'algebra di Lie graduata si può associare un'algebra differenziale e precisamente

Definizione 1. Un'algebra commutativa differenziale graduata (D.G.A.) A^* è uno spazio vettoriale su R graduato $A^* = \bigotimes_{i \geq 0} A^i$ su cui è definito

- i) un operatore differenziale $A_i \xrightarrow{d} A_{i+1}$ con $d^2 = 0$,
- ii) un prodotto $A^p \otimes A^q \rightarrow A^{p+q}$ soddisfacente la condizione $a_p b_q = (-1)^{p+q} b_q a_p$,
- iii) l'operatore differenziale d agisce su $A^p \otimes A^q$ nel modo seguente:

$$d(a_p b_q) = (da_p) b_q + (-1)^p a_p (db_q).$$

Quest'algebra è libera se essa soddisfa a nessun'altra relazione oltre l'associatività e la commutatività graduata.

Definizione 2. (D.Sullivan) - Un'algebra differenziale graduata M si dice un modello minimale per A se:

- a) M è un'algebra libera.

- b) Esiste un'applicazione tra catene $M \xrightarrow{\rho} A$ che induce un'isomorfismo in coomologia.
- c) Il differenziale di un generatore o è zero o è decomponibile.

La condizione a) vuol dire che quest'algebra è il prodotto tensoriale dell'algebra polinomiale sopra i generatori di dimensione pari ("bosoni") e dell'algebra esterna sopra i generatori dispari ("fermioni"). Nell'algebra di Lie è definita la parentesi $\Lambda^2 L(G_1) \xrightarrow{[\cdot, \cdot]} L(G_1)$ mentre nella DGA è definita la freccia $A \xrightarrow{d} \Lambda^2 A$ che è l'operazione duale della parentesi di Lie. Più precisamente il differenziale $A^1 \xrightarrow{d} \Lambda^2 A^1$ espresso in termini di una base x_k di A^1 ha la forma $dx_k = \sum_{ij} a_{ij}^k x_i \wedge x_j$. La dualizzazione di d fornisce un'algebra di Lie con le costanti di struttura a_{ij}^k , $[y_i, y_j] = \sum_k a_{ij}^k y_k$. L'identità di Jacobi segue dalla condizione $d \circ d = 0$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, Paris, Hermann..
- [2] Y. Chow, *General Theory of Lie Algebras, vol. 1*, Gord. Breach (1978).
- [3] P.A. Griffiths - J.W. Morgan, *Rational Homotopy Theory and Differential Forms*, Birkhauser (Progress in Mathematics) 1981.
- [4] C.D. Papakyriakopoulos, *On Dehn's lemma and the asphericity of knots*, Ann. of Math. 68 (1957), pp. 1-26.
- [5] D. Rolfsen, *Knots and links*, Math. lect. series 7, Publish or Perish, Inc.(1976).
- [6] J.P. Serre, *Lie Algebras and Lie Groups*, Lectures Given at Harvard University W.A. Benjamin, inc. 1965.
- [7] V. Poènaru, *Lectures on the singularities of C^∞ mappings*, C.I.M.E 1975.
- [8] D. Sullivan, *Infinitesimal Calculations in Topology*, Publ. I.H.E.S. vol. 47 (1978), pp. 269-331.
- [9] C. Tanasi, *Cohomology in the theory of defects in ordered media*, Boll. U.M.I. (7) 4-B (1990).
- [10] C. Tanasi, *Il Triplo linking ed applicazioni nella teoria dei mezzi ordinati*, Rend. dell'Ist. di Mat. Univ. Trieste, vol.XXI fasc.II (1989).

*Dipartimento di Matematica ed Applicazioni
Università di Palermo
via Archirafi, 34
I-90123 Palermo*