LE MATEMATICHE
Vol.XLVI (1991) - Fasc. I, pp. 65-70

SUPERFICI DI SINGOLARITÀ IN CONTINUI CON MICROSTRUTTURA

G. CAPRIZ - E. G. VIRGA

1. Introduzione.

E' ormai generalmente riconosciuto che, per descrivere il comportamento di certi materiali, la teoria classica dei continui è insufficiente. Occorre far intervenire ulteriori "parametri d'ordine" al fine di quantificare proprietà che si rivelano essenziali, sebbene, ad una prima osservazione grossolana, esse sembrino essere troppo fini per influenzare fenomeni dinamici macroscopici. In alcuni casi poi (ad esempio per i cristalli liquidi) l'interesse tecnico si concentra proprio sulle proprietà microstrutturali.

Per passare da questo riconoscimento alla proposta di una teoria che, per solidità e generalità, si avvicini a quella classica, è necessario estrarre, da molte osservazioni particolari, alcuni assiomi aggiuntivi abbastanza semplici così da essere facilmente giudicati, poco restrittivi per comprendere una gran varietà di situazioni, ma tanto significativi da implicare da soli un ampio spettro di conseguenze specifiche.

Un tentativo di questo genere è stato fatto anche in [1]; ma ivi la giustificazione "a priori" degli assiomi risulta, senza dubbio, debole, basata com'è su invocazioni di analogia con il caso classico o, addirittura, con dettagli dalla meccanica analitica. E' vero che una parziale conferma è venuta [2] da una generalizzazione dell'assiomatica delle interazioni tra corpi materiali proposta da Noll per il caso classico; comunque conviene effettuare ulteriori verifiche.

Qui noi partiremo da un assioma di bilancio dell'energia, seguendo il sentiero tracciato da vari Autori, a cominciare da Green e Rivlin [3]. C'è il vantaggio, così facendo, che l'espressione adatta della forza d'inerzia microstrutturale viene derivata, piuttosto che imposta attraverso ipotesi aggiuntive. Si giunge anche facilmente (e qui appare la rilevanza del nostro lavoro per questo convegno) alle relazioni di salto valevoli su superfici di discontinuità, relazioni che erano viceversa sfuggite alle trattazioni alternative. Si apre così la strada ad un esame, parallelo a quello classico e del tutto generale, di fenomeni di propagazione.

In questa presentazione molti dettagli (sui quali si tornerà in un più ampio lavoro successivo) saranno omessi e, per brevità, si eviterà di ripetere definizioni e proprietà introduttive, per le quali si rimanda ai primi paragrafi di [1].

Riassumendo, i risultati principali sono: (1) una conferma delle equazioni di bilancio del momento della quantità di moto e della quantità di moto microstrutturale già proposte in [1], sebbene, per quanto riguarda la seconda, in una forma che, per certe microstrutture, è molto più debole; (2) l'indicazione delle condizioni di salto valevoli su una superficie di discontinuità in moto.

2. Bilancio dell'energia e sua invarianza.

La legge di bilancio dell'energia, legge che sta a fondamento della nostra trattazione come assioma primario e che si intende valida per un qualunque sottocorpo $\mathfrak{b}$ di un corpo $\mathfrak{B}$ con microstruttura, è espressa dall'equazione

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathfrak{b}} := \int_{\mathfrak{b}} \rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \kappa\right)^{\cdot} - \int_{\mathfrak{b}} \rho(f \cdot \dot{x} + \beta \cdot \dot{\nu} + \lambda) \\ - \int_{\partial\mathfrak{b}} (\dot{x} \cdot Tn + \dot{\nu} \cdot \mathfrak{S}n - h \cdot n) = 0.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Qui i termini classici sono indicati con notazione corrente, che non riteniamo di dover richiamare, eccetto forse per λ, il tasso di produzione volumica di calore. In aggiunta appaiono i termini microstrutturali: l'energia cinetica κ per unità di massa; la microforza di massa β ed il microstress $\mathfrak{S}$. Si ritiene che la microstruttura sia misurata da un osservatore privilegiato in termini di ν, elemento di una varietà $\mathfrak{m}$ a dimensione finita; quindi che la velocità microstrutturale $\dot{\nu}$ appartenga allo spazio tangente $\mathcal{T}_\nu\mathfrak{m}$ ad $\mathfrak{m}$ in ν. Invece β è un vettore dello spazio cotangente $\mathcal{T}_\nu^*\mathfrak{m}$, mentre il microstress genera, operando sul versore n della normale esterna a $\partial\mathfrak{b}$, una microforza superficiale $\mathfrak{S}n$, anch'essa elemento di $\mathcal{T}_\nu^*\mathfrak{m}$.

In riguardo a κ si suppone qui che sia quadratica omogenea in $\dot{\nu}$. E' anche del tutto spontaneo ammettere l'invarianza di κ rispetto a cambiamenti d'osservatore che implichino il passaggio da quello privilegiato ad un qualunque altro che si ottenga da esso attraverso una rotazione di vettore q costante nel tempo ma arbitrario. Esplicitata, questa condizione di invarianza fa uso del generatore infinitesimo $\mathcal{A}$ delle rotazioni rigide su $\mathfrak{m}$; se le componenti di $\mathcal{A}$ su una carta particolare di $\mathfrak{m}$ e rispetto ad un certo riferimento cartesiano sono $\mathcal{A}_i^\alpha$, la condizione si esprime così (vedi la (6.11) di [1])

$$\frac{\partial\kappa}{\partial\nu^\beta}\mathcal{A}_i^\beta + \frac{\partial\kappa}{\partial\dot{\nu}^\beta}\frac{\partial\mathcal{A}_i^\beta}{\partial\nu^\gamma}\dot{\nu}^\gamma = 0, \qquad i = 1,2,3. \tag{2.2}$$

E' necessario per il seguito indicare anche come cambiano κ e $\dot{\kappa}$ quando siano misurate da un osservatore istantaneamente coincidente con quello privilegiato ma in moto relativo con velocità di traslazione c e velocità di rotazione $\dot{q}$, entrambe costanti. Se si affigge un asterisco a κ e $\dot{\kappa}$ per indicarne i nuovi valori, si ha che, al primo ordine in $\dot{q}$,

$$\begin{aligned} \kappa^* &:= \kappa(\nu^*, \dot{\nu}^*) = \kappa + \frac{\partial\kappa}{\partial\nu}\cdot\mathcal{A}\dot{q}, \\ \dot{\kappa}^* &:= \dot{\kappa} + \left\{\left(\frac{\partial\kappa}{\partial\dot{\nu}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial\kappa}{\partial\nu}\right\}\cdot\mathcal{A}\dot{q}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

E' bene osservare che in (2.3) per effetto di un assioma proposto in [1], le traslazioni uniformi non alterano lo stato dinamico della microstruttura.

Giungiamo ora all'assioma fondamentale: la (2.1) *vale anche se adottata da un qualunque osservatore istantaneamente coincidente con il privilegiato ma in moto rototraslatorio uniforme* (con velocità di traslazione c e di rotazione $\dot{q}$) *rispetto a quello*. Indicando ancora con un asterisco le quantità variate, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^*_{\mathfrak{b}}(c,\dot{q}) := &\int_{\mathfrak{b}} \rho \left\{ \varepsilon + \frac{1}{2}(\dot{x}^*)^2 + \kappa^* \right\}^{\cdot} - \\ &- \int_{\mathfrak{b}} \{ f \cdot \dot{x}^* + \beta \cdot \dot{\nu}^* + \lambda \} - \int_{\partial \mathfrak{b}} \{ \dot{x}^* \cdot Tn + \dot{\nu}^* \cdot \mathfrak{S} n - h \cdot n \}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

e l'assioma fondamentale si trascrive nelle condizioni

$$\left. \frac{\partial \mathcal{E}^*_{\mathfrak{b}}}{\partial c} \right|_{\substack{c=0 \\ \dot{q}=0}} = 0, \qquad \left. \frac{\partial \mathcal{E}^*_{\mathfrak{b}}}{\partial \dot{q}} \right|_{\substack{c=0 \\ \dot{q}=0}} = 0, \tag{2.5}$$

intese valide identicamente sul fibrato e per tutti i sottocorpi $\mathfrak{b}$.

E' ora un piccolo esercizio di analisi il ricavare dalla prima delle (2.5) la classica equazione di Cauchy, mentre ci vuole un po' più di cura e pazienza (e bisogna anche ricorrere alle (2.2), (2.3)) per trascrivere la seconda delle (2.5) nella forma

$$\mathcal{A}^T \left\{ \rho \left[\left(\frac{\partial \kappa}{\partial \dot{\nu}} \right)^{\cdot} - \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \nu} \right) \right] - \rho \beta - \operatorname{div}_{\mathfrak{m}} \mathfrak{S} \right\} = (\operatorname{grad}_{\mathfrak{m}} \mathcal{A}^T) \mathfrak{S} - \mathfrak{e}^T, \tag{2.6}$$

dove $\mathfrak{e}$ è il tensore di permutazione di Ricci e la sottoscritta $\mathfrak{m}$ sta ad indicare la versione covariante degli operatori.

La (2.6) è equivalente a due condizioni che passiamo ora a scrivere. La prima dichiara l'appartenenza di $(\operatorname{grad}_{\mathfrak{m}} \mathcal{A}^T)\mathfrak{S} - \mathfrak{e}T$ al condominio di $\mathcal{A}^T$; dunque esiste un elemento ζ di $T^*_\nu \mathfrak{m}$ tale che

$$\mathfrak{e}T = \mathcal{A}^T \zeta - (\operatorname{grad} \mathcal{A}^T)\mathfrak{S}. \tag{2.7}$$

Basta interpretare ζ come la densità delle così dette microforze bilanciate per riconoscere nella (2.7) l'equazione di bilancio del momento della quantità di moto (si veda la (9.4) di [1]).

Rimane la condizione che

$$\rho \left[\left(\frac{\partial \kappa}{\partial \dot{\nu}} \right)^{\cdot} - \frac{\partial \kappa}{\partial \dot{\nu}} \right] - \rho \beta - \operatorname{div}_{\mathfrak{m}} \mathfrak{S} + \zeta \tag{2.8}$$

appartenga allo spazio nullo di $\mathcal{A}^T$. Si tratta di una condizione molto meno stringente di quella che esprime il bilancio della quantità di moto microstrutturale in [1] (si veda la (8.3)) dove si richiede l'annullarsi della quantità (2.8).

Ma c'è una ampia classe di corpi per i quali la coincidenza delle due condizioni è assicurata. Infatti lo spazio ortogonale al condominio di $\mathcal{A}$ è proprio lo spazio nullo di $\mathcal{A}^T$; dunque se il condominio di $\mathcal{A}$ esaurisce tutto $\mathcal{T}_\nu^*\mathfrak{m}$, lo spazio nullo di $\mathcal{A}^T$ si riduce al solo elemento nullo. Questo accade per i cristalli liquidi e per i continui di Cosserat.

3. Condizioni di salto

Veniamo infine a considerare le condizioni che devono essere soddisfatte su una superficie Σ su cui si presentano disconitinuità per le derivate prime di ν e x, mentre il campo ν è continuo.

Converremo che Σ sia orientata con versore della normale n; indicheremo poi con v la velocità normale di spostamento. Allora il bilancio dell'energia su Σ è espresso dall'equazione di Kotchine

$$\mathcal{F} := \left[\!\left[\rho v\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \kappa\right)\right]\!\right] + [\![\dot{x}\cdot Tn + \dot{\nu}\cdot \mathfrak{S}n - h\cdot n]\!] = 0, \tag{3.1}$$

ovviamente qui adattata con l'aggiunta di termini microstrutturali alle quantità classiche.

In analogia a quanto fatto nel paragrafo 2, supporremo che un cambio di osservatore non modifichi la condizione. Precisamente, posto

$$\mathcal{F}^*(c,\dot{q}) := \left[\!\left[\rho v\left(\varepsilon + \frac{1}{2}(\dot{x}^*)^2 + \kappa\right)\right]\!\right] + [\![\dot{x}^*\cdot Tn + \dot{\nu}\cdot \mathfrak{S}n - h\cdot n]\!],$$

richiederemo che

$$\left.\frac{\partial\mathcal{F}^*}{\partial c}\right|_{\substack{c=0\\ \dot{q}=0}} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\mathcal{F}^*}{\partial \dot{q}}\right|_{\substack{c=0\\ \dot{q}=0}} = 0.$$

Ne seguono le condizioni di salto

$$
(3.2) \qquad \begin{aligned} &[\![\rho v\dot{x} + Tn]\!] = 0, \\ &\mathcal{A}^T \left[\!\!\left[\rho v \frac{\partial \kappa}{\partial \dot{\nu}} + \mathfrak{S}n\right]\!\!\right] = 0, \end{aligned}
$$

delle quali la prima è ben nota dalla teoria classica. La seconda è più debole di quanto forse si desidererebbe, ma nei casi citati alla fine del paragrafo precedente essa implica la condizione più diretta:

$$
\left[\!\!\left[\rho v \frac{\partial \kappa}{\partial \dot{\nu}} + \mathfrak{S}n\right]\!\!\right] = 0.
$$

Alle (3.2) vanno aggiunte le condizioni di compatibilità cinematica; a quelle classiche

$$
[\![\nabla \dot{x}]\!] = a \otimes n, \qquad \left[\!\!\left[\frac{\partial \dot{x}}{\partial \tau}\right]\!\!\right] = -va
$$

si accompagnano quelle microstrutturali

$$
[\![\nabla \dot{\nu}]\!] = \alpha \otimes n, \qquad \left[\!\!\left[\frac{\partial \dot{\nu}}{\partial \tau}\right]\!\!\right] = -v\alpha
$$

In queste condizioni a è un vettore ed α un covettore.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] G. Capriz, *Continua with Microstructure,* Springer, Berlin, 1989.

[2] G. Capriz, E. G. Virga, *Interactions in Continua with Microstructure,* Arch. Rat. Mech. An., **109** (1990), 323-342.

[3] A. E. Green, R. S. Rivlin, *Simple Force and Stress Multipoles,* Arch. Rat. Mech. An., **16** (1964), 325-353.

Università di Pisa