

## PUNTI DISTINTI IN $\mathbb{P}^2$ CON FUNZIONE DI HILBERT GENERICA

LUCIA DORETTI (Siena)(\*)

Let  $X$  be a set of distinct points in "generic position" in  $\mathbb{P}_k^2$ ,  $k$  algebraically closed field of characteristic zero. We describe the base locus for the system of curves of minimal degree passing through  $X$ , provided that the homogeneous ideal  $I(X)$  has a minimal set of generators containing "many" elements.

### Introduzione.

In [8] sono studiati insiemi finiti  $X$  di punti distinti in  $\mathbb{P}_k^2$ , con  $k$  campo algebricamente chiuso di caratteristica zero, e  $HF(X) = HF_{CI}(a, b)$ , cioè aventi funzioni di Hilbert uguale a quella di una completa intersezione di due curve in  $\mathbb{P}_k^2$  di gradi  $a$  e  $b$  ( $a \leq b$ ). Dopo aver provato che un insieme minimale di generatori per l'ideale  $I(X)$ , oltre a possedere sempre due elementi di gradi  $a$  e  $b$ , può avere anche elementi con gradi  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ , essendo  $\varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_r$  un qualunque sottoinsieme di  $\{b+1, \dots, a+b-1\}$ , è descritta la geometria di  $X$  quando in  $I(X)$  sono presenti più generatori oltre ai due di gradi  $a$  e  $b$ .

---

(\*) Entrato in Redazione il 2 dicembre 1990.

Nel presente lavoro si affronta una problematica analoga per insiemi  $X$  di  $n$  punti distinti in  $\mathbb{P}_k^2$  in *posizione generica* (cfr. [5]), ovvero con funzione di Hilbert  $\{b_i\}_{i \geq 0}$  tale che:

$$b_i = \min \left\{ \binom{i+2}{2}, n \right\} \quad \text{per ogni } i \geq 0;$$

precisamente, dopo aver osservato che un insieme minimale di generatori per l'ideale  $I(X)$  può avere elementi di due soli gradi, alcuni dei quali, in numero e grado fissato, devono necessariamente essere presenti mentre altri possono esserlo o no, si esamina il caso in cui  $I(X)$  abbia più generatori oltre quelli obbligati; sotto tale ipotesi, si ottengono informazioni sul luogo base delle curve di grado minimo per  $X$ .

In particolare, se il numero dei generatori di  $I(X)$  è il massimo consentito (dal Teorema di Dubreil) si dimostra che il luogo base delle curve di grado minimo per  $X$  ha dimensione positiva, si determina il grado della curva ed il numero di punti di  $X$  che su essa si trovano (Cor. 2).

Quando il numero dei generatori di  $I(X)$  è inferiore di una unità al numero massimo possibile, si fa vedere con un esempio che il luogo base studiato può avere sia dimensione zero che maggiore di zero. Nel primo caso, si prova che tale luogo è costituito dal massimo numero dei punti consentiti dalle limitazioni trovate in [7] (Teor. 5); nel secondo caso, si determina una limitazione superiore al grado della curva fissa e il numero dei punti di  $X$  che su tale curva si trovano (Teor. 6).

Infine, se il numero dei generatori di  $I(X)$  è inferiore al massimo consentito meno uno, si possono avere insiemi  $X$  di punti in posizione generica in cui il luogo base delle curve di grado minimo per  $X$  contiene esattamente  $i$  punti di  $X$ .

Ringrazio vivamente A. Ragusa per gli utili suggerimenti.

### **Preliminari e notazioni.**

Sia  $X$  un insieme di  $n$  punti distinti di  $\mathbb{P}_k^2$ , con  $k$  algebricamente chiuso di caratteristica zero. Se  $S = k[x_0, x_1, x_2]$  e  $I(X)$

e l'ideale omogeneo di  $S$  che definisce la varietà  $X$ , denoteremo con  $HF(X) = \{HF(X, i)\}_{i \geq 0}$  la funzione di Hilbert di  $X$ , ovvero  $HF(X, i) = \dim_k(S/I(X))_i$ , dove  $(S/I(X))_i$  è la  $i$ -esima componente graduata di  $S/I(X)$ .

Se  $X$  ha la funzione di Hilbert di una completa intersezione di tipo  $(a_1, a_2)$ , scriveremo  $HFCI(a_1, a_2)$  in luogo di  $HF(X)$ .

Nel seguito faremo uso della seguente terminologia:

$$\begin{aligned} h_i &= HF(X, i) \\ c_i &= \Delta HF(X, i) = h_i - h_{i-1} \\ d_i &= \Delta^2 HF(X, i) = c_i - c_{i-1} \\ e_i &= \Delta^3 HF(X, i) = d_i - d_{i-1} \quad \text{per } i \geq 1, \end{aligned}$$

e  $h_0 = c_0 = d_0 = e_0 = 1$ .

E' ben noto (cfr. [4]) che se  $HF(X) = \{h_i\}_{i \geq 0}$  è la funzione di Hilbert di un insieme di punti  $X \subseteq \mathbb{P}_k^2$ , si ha  $h_1 \leq 3$  ed esistono interi  $a_1 \leq a_2 \leq t$  tali che

$$c_i = \begin{cases} i+1 & \text{per } i = 0, \dots, a_1 - 1 \\ a_1 & \text{" } i = a_1, \dots, a_2 - 1 \\ \text{minore di } a_1 & \text{" } i = a_2 \\ \text{non crescente} & \text{" } i = a_2, \dots, t \\ 0 & \text{" } i > t \end{cases}$$

Notiamo che  $a_1, a_2, t$  sono definiti da

$$a_1 = \inf \left\{ i \in \mathbb{N} / h_i < \binom{i+2}{2} \right\} = \inf \{ i \in \mathbb{N} / d_i \leq 0 \}$$

$$a_2 = \begin{cases} a_1 \text{ se } h_{a_1} < \binom{a_1+2}{2} - 1 \\ \inf \{ i > a_1 / c_i < a_1 \}, \text{ altrimenti} \end{cases} = \inf \{ i \in \mathbb{N} / d_i < 0 \}$$

$$t = \inf \{ i \in \mathbb{N} / h_i = h_{i+1} \} = \inf \{ i \in \mathbb{N} / c_{i+1} = 0 \}.$$

E' inoltre  $\sum_{i=0}^{t+1} d_i = 0$  e  $d_i = 1$  per  $0 \leq i < a_1$ .

Se  $X \subseteq \mathbb{P}_k^2$  è una completa intersezione di tipo  $(a_1, a_2)$  (brevemente  $CI(a_1, a_2)$ ) allora è:

$$c_i = \begin{cases} i+1 & \text{per } i = 0, \dots, a_1 - 1 \\ a_1 & \text{" } i = a_1, \dots, a_2 - 1 \\ a_1 + a_2 - i - 1 & \text{" } i = a_2, \dots, a_1 + a_2 - 2 = t \\ 0 & \text{" } i > t \end{cases}$$

Rappresenteremo con  $\mathfrak{S}(X)$  il fascio di ideali di  $X$ , con  $B_l(X)$  il  $k$ -spazio vettoriale delle forme di grado  $l$  che si annullano su  $X$  e con  $Z_l(X)$  il luogo base di  $B_l(X)$ ; quando  $\dim Z_l(X) > 0$ , indicheremo con  $\Gamma_l(X)$  la parte di dimensione positiva di  $Z_l(X)$  e ci riferiremo ad essa con l'espressione "curva fissa"; la scrittura  $\deg \Gamma_l(X)$  denoterà il grado di tale curva.

Dal Teor. 1-2 di [8], se  $X \subseteq \mathbb{P}_k^2$  è un insieme finito di punti distinti e:

$$0 \rightarrow \sum_{i=1}^{m-1} \Theta_{\mathbb{P}_k^2}(-b_i) \rightarrow \sum_{i=1}^m \Theta_{\mathbb{P}_k^2}(-a_i) \rightarrow \mathfrak{S}(X) \rightarrow 0$$

è una risoluzione libera minimale del fascio di ideali  $\mathfrak{S}(X)$  di  $X$ , dove  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m$  sono i gradi di un insieme minimale di generatori di  $I(X)$  e  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{m-1}$  sono i gradi di un insieme minimale di generatori per il modulo delle sizigie, posto  $\alpha_j$ , rispettivamente  $\beta_j$ , il numero di interi  $a_i$ , rispettivamente  $b_i$ , uguale a  $j$  è:

$$\begin{cases} \alpha_{a_1} = -e_{a_1} \\ \alpha_{a_2} = -e_{a_2} \\ \max\{0, -e_i\} \leq \alpha_i \leq -d_i, \quad \text{per } i > a_2 \end{cases}$$

e

$$\max\{0, e_i\} \leq \beta_i \leq e_i - d_i, \quad \text{per } i > a_2.$$

Per ogni insieme finito  $Y$  di punti distinti di  $\mathbb{P}_k^2$ ,  $|Y|$  indicherà la cardinalità di  $Y$ .

*Punti distinti di  $\mathbb{P}_k^2$  in posizione generica.*

Ricordiamo (cfr. [5]) che un insieme finito  $X$  di  $n$  punti distinti di  $\mathbb{P}_k^2$  con funzione di Hilbert  $\{h_i\}_{i \geq 0}$  è in *posizione generica* (o anche in  *$n$ -generica posizione*) se  $h_i = \min \left\{ \binom{i+2}{2}, n \right\}$ , per ogni  $i \geq 0$ .

Per opportuni interi  $d, h$ , con  $d \geq 1$  e  $0 \leq h \leq d+1$ , è allora  $n = \binom{d+2}{2} + h$  e, con le notazioni introdotte, si ha:

$$c_i = \begin{cases} i+1 & \text{per } i = 0, \dots, d \\ h & \text{" } i = d+1 \\ 0 & \text{" } i > d+1 \end{cases}$$

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{per } i = 0, \dots, d \\ h - (d+1) & \text{" } i = d+1 \\ -h & \text{" } i = d+2 \\ 0 & \text{" } i > d+2 \end{cases}$$

$$e_i = \begin{cases} 1 & \text{per } i = 0 \\ 0 & \text{" } i = 1, \dots, d \\ h - d - 2 & \text{" } i = d+1 \\ d+1 - 2h & \text{" } i = d+2 \\ h & \text{" } i = d+3 \\ 0 & \text{" } i > d+3 \end{cases}$$

In particolare, se  $\nu(I(X))$  indica il numero di elementi di un insieme minimale di generatori per  $I(X)$ , dal Teor. 1.2 di [8], si ha che

$$d+2 - h + \max\{0, 2h - d - 1\} \leq \nu(I(X)) \leq d+2$$

e che ogni insieme minimale di generatori di  $I(X)$  ha sempre  $d+2-h$  generatori di grado  $d+1$  e, per  $h > (d+1)/2$ , di sicuro anche  $2h-d-1$  generatori di grado  $d+2$ , ma può avere, in generale, generatori di grado  $d+2$  fino ad un massimo di  $h$ ; mentre dal Rem. 1.3 di [8] si ottiene che ogni insieme minimale di generatori per il modulo delle sizigie di  $I(X)$  ha sempre  $h$  elementi di grado  $d+3$  e, per  $h < (d+1)/2$ , di sicuro anche  $d+1-2h$  generatori di grado  $d+2$ , ma può avere, in generale, generatori di grado  $d+2$  fino ad un massimo di  $d+1-h$ .

*Osservazione 1.* Gli unici casi in cui  $I(X)$  non ha altri generatori oltre quelli che è obbligato ad avere si hanno per  $h=0$  e  $h=d+1$ . Nel primo caso,  $I(X)$  è generato da  $d+2$  elementi di grado  $d+1$ ; nel secondo caso,  $I(X)$  ha esattamente un generatore di grado  $d+1$  e  $d+1$  generatori di grado  $d+2$ .

Notiamo (cfr. ad esempio, Prop. 2.15 di [1]) che il generico insieme di punti distinti del piano ha un insieme minimale di generatori per il proprio ideale costituito da quei soli elementi che, nel dato numero e nel determinato grado, devono sicuramente essere presenti secondo quanto sopra osservato; è evidente, allora, che, imponendo l'ipotesi che nell'ideale siano presenti anche altri generatori tra quelli consentiti, ha senso andare a studiare quali particolarità di tipo geometrico possieda l'insieme di punti preso in considerazione.

Cominciamo ad esaminare la situazione più semplice, ovvero il caso in cui  $I(X)$ , avendo più generatori di quelli obbligati, ne ha il numero massimo consentito (secondo il Teorema di Dubreil).

Il risultato che segue riguarda, più in generale, un insieme finito  $X$  di punti distinti la cui funzione di Hilbert ha differenza prima strettamente decrescente a partire dall'indice corrispondente al grado della prima curva passante per  $X$ .

**TEOREMA 1.** *Sia  $X \subseteq \mathbb{P}_k^2$  un insieme finito di punti distinti la cui funzione di Hilbert abbia differenza prima data dalla sequenza:*

$$1 \ 2 \ 3 \ \dots \ d+1 \ s_1 s_2 \dots s_r 0 \rightarrow$$

con  $d+1 \geq s_1 > \dots > s_r \geq 1$  e quindi  $|X| = \binom{d+2}{2} + s_1 + \dots + s_r$ .  
Supponiamo inoltre che  $I(X)$  abbia un insieme minimale di generatori con più elementi di quelli obbligati e sia  $\nu(I(X)) = d+2$ . Allora, per ogni  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , si ha:

a)  $\dim Z_{d+i}(X) > 0$ ;

b) la curva fissa  $\Gamma_{d+i}(X)$  ha grado  $s_i$ ;

c)  $|X \cap \Gamma_{d+i}(X)| = s_1(d+2) - \binom{s_1}{2} + \sum_{k=2}^i s_k$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\{F_1, \dots, F_{d+2}\}$ , con  $F_i$  forme non nulle in  $S = k[x_0, x_1, x_2]$ , un insieme minimale di generatori per  $I(X)$ . Consideriamo la risoluzione libera minimale di  $I(X)$ :

$$(*) \quad 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{d+1} S(-b_i) \xrightarrow{x} \sum_{i=1}^{d+2} S(-a_i) \xrightarrow{\phi} I(X) \rightarrow 0$$



Sia  $i$  un intero,  $1 \leq i \leq r$ . Se per ogni  $k$ ,  $d+2-s_{i-1}+1 \leq k \leq d+2-s_i$  (dove si intende  $s_0 = d+2$ ), cancelliamo da  $\mathcal{A}$  la colonna  $k$ -esima, otteniamo una matrice quadrata  $\mathcal{A}_k$ , di ordine  $d+1$ , tale che:

$$\mathcal{A}_k = \left( \begin{array}{c|c} A_k & 0 \\ \hline B_k & M \end{array} \right)$$

dove  $A_k$  è una matrice quadrata di ordine  $d+1-s_i$  che varia con  $k$  e  $M$  è una matrice quadrata di ordine  $s_i$  che resta invariata per ogni  $k$ . Si ha pertanto:

$$\pm cF_k = \det \mathcal{A}_k = \det A_k \cdot \det M, \text{ con } c \in S.$$

Poichè  $\det M$  è una forma di grado  $s_i$ , indipendente da  $k$ , ogni curva di grado  $d+1$  per  $X$  ha una componente fissa di grado  $s_i$ .

E' quindi  $\dim Z_{d+i}(X) > 0$  e  $\deg \Gamma_{d+i}(X) = s_i$ ; ciò prova a) e b)

La c) segue dal Remark 2-7 di [7], essendo  $s_i = c_{d+1}$ .

#### COROLLARIO 2.

Se  $X \subseteq \mathbb{P}_k^2$  è un insieme finito di punti distinti in posizione generica con  $|X| = \binom{d+2}{2} + h$  per opportuni interi  $d, h$  con  $d \geq 1$  e  $1 \leq h \leq d$  e  $\nu(I(X)) = d+2$ , allora:

- a)  $\dim Z_{d+1}(X) > 0$ ;
- b) la curva fissa  $\Gamma_{d+1}(X)$  ha grado  $h$ ;
- c)  $|X \cap \Gamma_{d+1}(X)| = h(d+2) - \binom{h}{2}$ .

#### COROLLARIO 3.

Nelle ipotesi del Cor. 2, se  $h = 1$  [risp.  $h = d$ ] si ha:

$$\dim Z_{d+1}(X) > 0, \quad \deg \Gamma_{d+1}(X) = 1 \text{ e } |X \cap \Gamma_{d+1}(X)| = d+2$$

$$[\text{risp.}: \dim Z_{d+1}(X) > 0, \deg \Gamma_{d+1}(X) = d \text{ e } |X \cap \Gamma_{d+1}(X)| = \frac{d(d+5)}{2}].$$

#### COROLLARIO 4.

Se i punti di  $X$ , in posizione generica sono su una curva irriducibile di grado  $d+1$ , allora  $\nu(I(X)) \leq d+1$ , cioè  $I(X)$  non può avere il numero massimo di generatori.



In particolare questo accade se  $X$  è un insieme di  $n = \binom{d+2}{2} + h$  punti in "posizione uniforme" (cfr. [GO]), ovvero comunque scelti  $m$  degli  $n$  punti,  $3 \leq m \leq n$ , essi sono in posizione generica.

*Dimostrazione.* Dal lemma 1-16 di [6], esiste una curva irriducibile di grado  $d+1$  per  $X$ .

*Osservazione 2.* E' un fatto ben noto (cfr. ad es. [9], Teor. 3.8) che se  $n$  è un intero, posto esso nella forma:

$$n = \binom{d+2}{2} + h \text{ con } d \geq 1, 0 \leq h \leq d+1, \text{ per ogni intero } s,$$

$d+2 - h + \max\{0, 2h - d - 1\} \leq s \leq d+2$ , esiste un insieme  $X \subseteq \mathbb{P}_k^2$  di  $n$  punti in posizione generica con  $\nu(I(X)) = s$ .

In particolare, se  $s = d+2$  un tale insieme si ottiene considerando  $n$  punti distribuiti su  $d+1$  rette secondo la configurazione rappresentata nel diagramma della funzione  $\Delta HF(X)$ .

Se l'ideale  $I(X)$  ha più generatori di quelli che necessariamente devono esserci, ma non nel numero massimo consentito, il luogo base  $Z_{d+1}(X)$  delle curve di grado minimo per  $X$  può avere sia dimensione zero che maggiore di zero.

Gli esempi che seguono mostrano come sia possibile ottenere insieme di punti in posizione generica che soddisfano all'una o all'altra delle condizioni precedenti già nel caso in cui  $\nu(I(X)) = d+1$ .

*Esempio 1.* Costruzione di un insieme  $X$  di punti in posizione generica con  $\nu(I(X)) = d+1$  e per cui  $\dim Z_{d+1}(X) = 0$ .

Su una quintica irriducibile  $C$  si considerino 4 punti allineati e ulteriori 3 punti generici. Sia  $Y$  l'insieme costituito dai 7 punti; si prenda poi un'ulteriore quintica  $C'$  per i 7 punti dati e sia  $\bar{Y} = C \cap C'$ . Posto allora  $X = \bar{Y} - Y$ , si ha:

$$|X| = 18, \quad HF(X) : 1 \ 3 \ 6 \ 10 \ 15 \ 18 \ \rightarrow$$

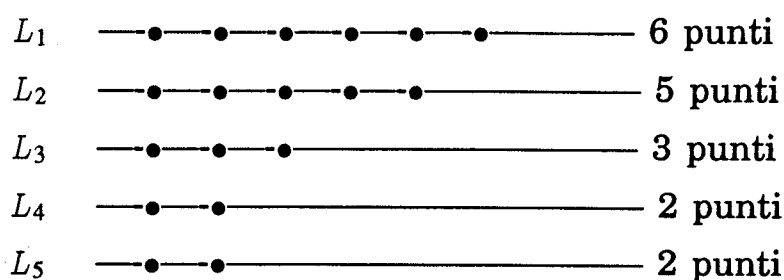
e l'ideale  $I(X)$  ha cinque generatori di gradi rispettivamente 5 5 5 6 6, ovvero, accanto a tre generatori di grado 5 e ad un generatore di

grado 6 che devono sempre essere presenti, esiste, in questo caso, un ulteriore generatore di grado 6.

Per la costruzione fatta è  $\dim Z_5(X) = 0$ .

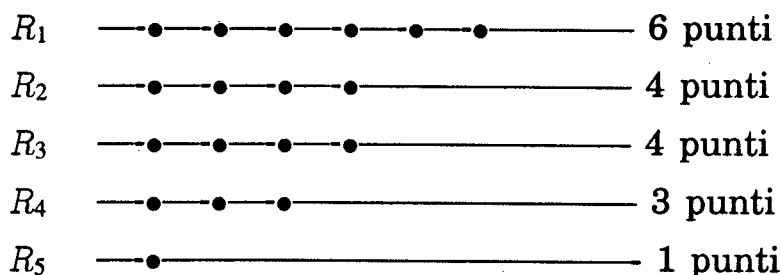
*Esempio 2.* Costruzione di un insieme di punti in posizione generica, soddisfacente alle stesse ipotesi su  $I(X)$  e per il quale  $\dim Z_{d+1}(X) > 0$ .

Si consideri un insieme  $X$  di 18 punti distribuiti su 5 rette secondo lo schema seguente:



Si ha  $HF(X) : 1 \ 3 \ 6 \ 10 \ 15 \ 18 \rightarrow$ , inoltre  $I(X)$  ha generatori di gradi 5 5 5 6 6 rispettivamente, ovvero, come nell'esempio 1, un generatore in più di grado 6. Per tale insieme di punti  $\dim Z_5(X) > 0$  e  $\deg \Gamma_5(X) = 2$  poichè tutte le quintiche per  $X$  contengono la conica spezzata nelle due rette  $L_1$  ed  $L_2$ .

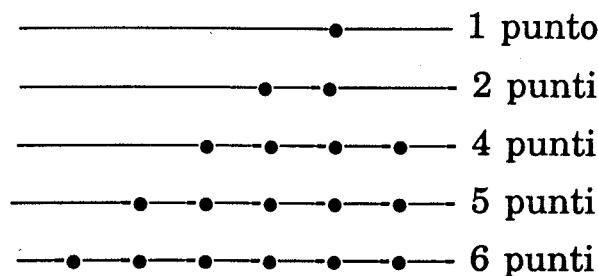
Se invece si considera un insieme  $X$  di 18 punti distribuiti su 5 rette nel modo seguente:



la funzione di Hilbert di  $X$  e i gradi dei generatori di  $I(X)$  restano invariati, mentre tutte le quintiche per  $X$  contengono la retta per 6 punti. Pertanto  $\dim Z_5(X) > 0$  e  $\deg \Gamma_5(X) = 1$ .

*Osservazione 3.* Dalla Prop. 2-4 di [7], posto  $r = \deg \Gamma_{d+1}(X)$  è  $r \leq c_{d+1}(X)$ . Se l'insieme  $X$  è costituito da 18 punti in posizione generica,  $c_{d+1}(X) = c_5(X) = 3$ , quindi  $r \leq 3$ . Il caso  $r = 3$  si ha quando i

punti di  $X$  sono disposti su 5 rette secondo lo schema rappresentato nel diagramma di  $\Delta HF(X)$  (cfr. Oss. 2):



L'ideale  $I(X)$  di tale insieme di punti ha sei generatori (caso massimale) di gradi 5 5 5 6 6 6, rispettivamente.

Le considerazioni sopra svolte portano ad esaminare il caso in cui  $I(X)$  ha più generatori di quelli che necessariamente devono esserci, ma uno in meno rispetto al numero massimo consentito.

Cominciamo lo studio dal caso in cui  $\dim Z_{d+1}(X) = 0$ .

**TEOREMA 5.**

Sia  $X \subseteq \mathbb{P}_k^2$  un insieme di  $n = \binom{d+2}{2} + h$  punti distinti in posizione generica, con  $2 \leq h \leq d - 1$ . Se  $\nu(I(X)) = d + 1$  e  $\dim Z_{d+1}(X) = 0$ , allora:

$$|Z_{d+1}(X)| = \binom{d+2}{2} + \binom{h+1}{2},$$

ovvero il luogo base  $Z_{d+1}(X)$  contiene il numero massimo di punti consentiti (cfr. Prop. 2-1 di [7]).

*Dimostrazione.* Per ipotesi  $I(X)$  ha un insieme minimale di generatori con  $d + 2 - h$  elementi di grado  $d + 1$  e  $h - 1$  elementi di grado  $d + 2$ . Poiché  $\dim Z_{d+1}(X) = 0$ ,  $X \subseteq Y$ , dove  $Y$  è la completa intersezione di due curve di grado  $d + 1$  per  $X$ , cioè  $Y = CI(d + 1, d + 1)$ .

Sia  $X' \subseteq \mathbb{P}_k^2$  l'insieme legato di  $X$  in  $Y$ ; da [3] si ha:

$$(*) \quad \Delta HF(X', i) = c'_i = \begin{cases} i + 1 & \text{per } i = 0 \dots, d - 2 \\ d - h & \text{'' } i = d - 1 \\ 0 & \text{'' } i > d - 1 \end{cases}$$

pertanto  $X'$  è un insieme di punti in posizione generica e  $|X'| = \binom{(d-2)+2}{2} + (d-h)$ , con  $1 \leq d - h \leq d - 2$ .

Da [10] §3, l'ideale  $I(X')$  ha  $d$  generatori,  $h$  dei quali di grado  $d-1$  e i rimanenti  $d-h$  di grado  $d$ . Poichè  $I(X')$  è generato dal numero massimo di elementi consentiti, dalla Prop. 1 è  $\dim Z_{d-1}(X') > 0$ , la curva fissa  $\Gamma_{d-1}(X)$  ha grado  $d-h$  e, posto  $X'' = X' \cap \Gamma_{d-1}(X)$ , è:

$$|X''| = (d-h)d - \binom{d-h}{2} = \binom{d+1}{2} - \binom{h+1}{2}.$$

Il teorema è provato se dimostriamo che  $Z_{d+1}(X) = Y - X''$ . A tale scopo è sufficiente far vedere che  $Z_{d+1}(X) \supseteq Y - X''$ , poichè

$$|Y - X''| = (d+1)^2 - \left[ \binom{d+1}{2} - \binom{h+1}{2} \right] = \binom{d+2}{2} + \binom{h+1}{2}$$

che è proprio il numero massimo di elementi permessi per l'insieme  $Z_{d+1}(X)$  (Prop. 2-1 di [7]).

Cominciamo con il far vedere che:

$$HF(X'', i) = h''_i = \begin{cases} \binom{i+2}{2} & \text{per } i = 0, \dots, d-h-1 \\ \binom{i+2}{2} - \binom{i-d+h+2}{2} & \text{" } i = d-h, \dots, d-2 \\ \binom{d+1}{2} - \binom{h+1}{2} & \text{" } i \geq d-1. \end{cases}$$

Proviamo che, se  $k$  è il numero di curve indipendenti di grado  $d-1$  per  $X''$ , è  $k = \binom{h+1}{2}$ . Poichè tali curve sono almeno quante quelle degeneri spezzate nella curva fissa  $\Gamma_{d-1}(X)$ , ovvero almeno quante le curve di grado  $h-1$ , è  $k \geq \binom{h+1}{2}$ ; se fosse  $k > \binom{h+1}{2}$ , essendo  $|X' - X''| = \binom{h}{2}$ , esisterebbe  $k'$  curve indipendenti di grado  $d-1$  per  $X'$  con  $k' \geq k - \binom{h}{2} > \binom{h+1}{2} - \binom{h}{2} = h$ , assurdo per (\*).

$$\text{Segue } h''_{d-1} = \binom{d+1}{2} - \binom{h+1}{2}.$$

In modo analogo si prova che le curve indipendenti di grado  $d-2$  per  $X''$  sono  $\binom{h}{2}$  e quindi  $h''_{d-2} = \binom{d}{2} - \binom{h}{2}$ . Per le proprietà della funzione di Hilbert di un insieme di punti in  $\mathbb{P}_k^2$ , essendo  $c''_{d-1} = d-h$

deve necessariamente essere  $c_i'' = d - h$  per ogni  $i$ ,  $i = d - h, \dots, d - 1$  (ricordiamo che i punti di  $X''$  si trovano su una curva di grado  $d - h$ ).

La funzione di Hilbert di  $X''$  è quindi quella cercata.

Dal calcolo delle successive differenze di  $HF(X'')$  si ha in particolare:

$$e_i'' = \begin{cases} 1 & \text{per } i = 0 \\ 0 & \text{'' } i = 1, \dots, d - h - 1 \\ -1 & \text{'' } i = d - h \\ 0 & \text{'' } i = d - h + 1, \dots, d - 1 \\ -(d - h) & \text{'' } i = d \\ d - h & \text{'' } i = d + 1 \\ 0 & \text{'' } i > d + 1 \end{cases}$$

e quindi i gradi  $a_i$  e  $b_i$  dei genitori e delle sizigie di  $I(X'')$  sono dati da:

$$\begin{aligned} a_1 &= d - h, & a_i &= d & \text{per } i &= 2, \dots, d - h + 1 \\ b_i &= d + 1, & & & \text{per } i &= 1, \dots, d - h. \end{aligned}$$

Se consideriamo l'insieme  $Y - X''$  come il legato di  $X''$  in  $Y = CI(d + 1, d + 1)$ , da [10] si ottiene che un sistema minimale di generatori per  $I(Y - X'')$  è costituito da  $d + 2 - h$  elementi di grado  $d + 1$ . Poichè  $Y - X'' \supseteq X$  e  $\dim Z_{d+1}(X) = 0$ , le  $d + 2 - h$  curve indipendenti di grado  $d + 1$  per  $Y - X''$  sono esattamente quelle che contengono  $X$ , da cui la tesi.

Esaminiamo ora il caso in cui  $\dim Z_{d+1}(X) > 0$ .

#### TEOREMA 6.

Sia  $X \subseteq \mathbb{P}_k^2$  un insieme di  $n = \binom{d+2}{2} + h$  punti distinti in posizione generica, con  $2 \leq h \leq d - 1$ . Se  $\nu(I(X)) = d + 1$  e  $\dim Z_{d+1}(X) > 0$ , allora posto  $r = \deg \Gamma_{d+1}(X)$ , si ha:

a)  $r \leq h - 1$ ;

b)  $|X \cap \Gamma_{d+1}(X)| = r(d + 2) - \binom{r}{2}$ .

*Dimostrazione.* a) E' noto che  $r \leq h$ . Supponiamo  $r = h$ , allora

ogni curva di grado  $d+1$  per  $X$  ha per componente la curva  $\Gamma_{d+1}(X)$  di grado  $h$  e, dal Rem. 2-7 di [7],  $|X \cap \Gamma_{d+1}(X)| = h(d+2) - \binom{h}{2}$ .

Procediamo per induzione su  $h$ .

*Passo 0:*  $h = 2$ .

In tal caso, l'ideale  $I(X)$  è generato da  $d$  elementi di grado  $d+1$  e da un elemento di grado  $d+2$ , mentre la curva fissa  $\Gamma_{d+1}(X)$  è una conica contenente  $2(d+2) - 1$  punti di  $X$ . Poichè ogni curva di grado  $d+2$  per  $X$  interseca  $\Gamma_{d+1}(X)$  in  $2(d+2)$  punti, occorrono almeno due generatori di grado  $d+2$  per ottenere  $X$ , assurdo.

*Passo induttivo:*  $h > 2$ .

Ogni curva di grado  $d+1$  per  $X$  è spezzata nella  $\Gamma_{d+1}(X)$  e in un'altra curva di grado  $d+1-h$ , inoltre l'ideale  $I(X)$  ha  $d+2-h$  generatori di grado  $d+1$  e  $h-1$  generatori di grado  $d+2$ . Posto  $\Gamma = \Gamma_{d+1}(X)$ , sia  $X'$  il legato di  $X$  in  $Y$ , completa intersezione delle curve  $\Gamma \cup \Gamma_1$  e  $C_1$  per  $X$  di gradi  $d+1$  e  $d+2$ , rispettivamente. Da [3], si ha:

$$(**) \quad \Delta HF(X', i) = c'_i = \begin{cases} i+1 & \text{per } i = 0, \dots, d-1 \\ d+1-h & \text{" } i = d \\ 0 & \text{" } i > d \end{cases}$$

$X'$  è quindi costituito da  $n'$  punti in posizione generica, con  $n' = \binom{d+1}{2} + (d+1-h)$ ,  $2 \leq d+1-h \leq d-1$ . Da [10] si ricava che  $I(X')$  ha  $h$  generatori di grado  $d$  e  $d-h$  generatori di grado  $d+1$ , ed ha inoltre  $d+1-h$  sizigie di grado  $d+2$  e  $h-2$  sizigie di grado  $d+1$ .

Dimostriamo che le curve di grado  $d$  per  $X'$  hanno la curva  $\Gamma_1$  (di grado  $d+1-h$ ) come componente

Fra le curve di grado  $d$  per  $X'$  ci sono quelle spezzate nella  $\Gamma_1$  e nelle curve di grado  $h-1$  per  $Z$ , essendo  $Z = X' - [(\Gamma_1 \cap C_1) - X]$ . Poichè

$$|Z| = \left[ (d+1)(d+2) - \binom{d+2}{2} - h \right] - \left[ \left( \binom{d+2}{2} - \binom{h+1}{2} \right) \right] = \binom{h+1}{2} - h,$$

detto  $k$  il numero di curve indipendenti di grado  $h-1$  per  $Z$ , è

$$k \geq \binom{(h-1)+2}{2} - \left[ \binom{h+2}{2} - h \right] = h,$$

ma, per (\*\*),  $h$  sono proprio le curve indipendenti di grado  $d$  per  $X'$ , da cui il risultato.

Se  $d+1-h=2$ , si ricade nel caso a).

Altrimenti, a partire da  $X'$  si ripete il procedimento sopra descritto considerando il legato  $X_1$  di  $X'$  in  $Y_1$ , completa intersezione delle curve  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  e  $C_2$  per  $X'$ , di gradi  $d$  e  $d+1$ , rispettivamente. Si trova che:

- 1)  $X_1$  è un insieme di  $n_1$  punti in posizione generica, con  $n_1 = \binom{d}{2} + (h-1)$ ,  $1 \leq h-1 \leq d-2$ , e:

$$\Delta HF(X_1, i) = c_i^1 = \begin{cases} i+1 & \text{per } i=0, \dots, d-2 \\ h-1 & \text{" } i=d-1 \\ 0 & \text{" } i > d-1 \end{cases}$$

- 2) l'ideale  $I(X_1)$  ha  $d+1-h$  generatori di grado  $d-1$  e  $h-2$  generatori di grado  $d$ ;
- 3) le curve indipendenti di grado  $d-1$  per  $X_1$  hanno la curva  $\Gamma_2$ , di grado  $h-1$ , come componente.

Si perviene allora ad un assurdo perchè, per ipotesi induttiva, la curva fissa di  $Z_{d-1}(X_1)$  deve avere grado  $\leq h-2$ .

b) Se  $r = h-1$ , il risultato segue dal Rem. 2-7 di [7].

Sia  $r < h-1$ . Ogni curva di grado  $d+1$  per  $X$  è allora spezzata nella curva  $\Gamma_{d+1}(X)$  di grado  $r$  ed in una curva di grado  $d+1-r$ , e quindi le curve indipendenti di grado  $d+1$  per  $X$  sono tante quante le curve indipendenti di grado  $d+1-r$  per  $X' = X - |X \cap \Gamma_{d+1}(X)|$ . Dalla Prop. 2-6 di [7], è:

$$r(d+2) - \binom{r}{2} - \binom{h-r}{2} \leq |X \cap \Gamma_{d+1}(X)| \leq r(d+2) - \binom{r}{2}.$$

Sia  $|X \cap \Gamma_{d+1}(X)| = p < r(d+2) - \binom{r}{2}$ . Posto  $|X'| = s$ , sarà  $s = \binom{d+2}{2} + h - p$ ; inoltre i punti di  $X'$  devono imporre il massimo numero, cioè  $s$ , di condizioni alle curve di grado  $d+1-r$  per essi (altrimenti i punti di  $X$  imporrebbero alle curve di grado  $d+1$  meno di  $s+p = \binom{d+2}{2} + h$  condizioni, in contrasto con l'ipotesi che  $X$  sia un insieme di punti in posizione generica).

Le curve indipendenti di grado  $d+1$  per  $X$  sono allora:

$$\begin{aligned} & \binom{(d+1-r)+2}{2} - s = \binom{d+3-r}{2} - \binom{d+2}{2} - h + p < \\ & < \binom{d+3-r}{2} - \binom{d+2}{2} - h + r(d+2) - \binom{r}{2} = d+2 - h, \text{ assurdo.} \end{aligned}$$

Segue che  $|X \cap \Gamma_{d+1}(X)| = r(d+2) - \binom{r}{2}$ .

*Osservazione 4.* L'esempio 2 mostra che esistono insiemi  $X$  di punti in posizione generica soddisfacenti alle ipotesi del Teor. 6, in cui il grado  $r$  della curva fissa  $\Gamma_{d+1}(X)$  assume tutti i valori possibili, cioè  $\leq h-1$ .

Rimane da studiare la situazione  $\nu(I(X)) < d+1$ .

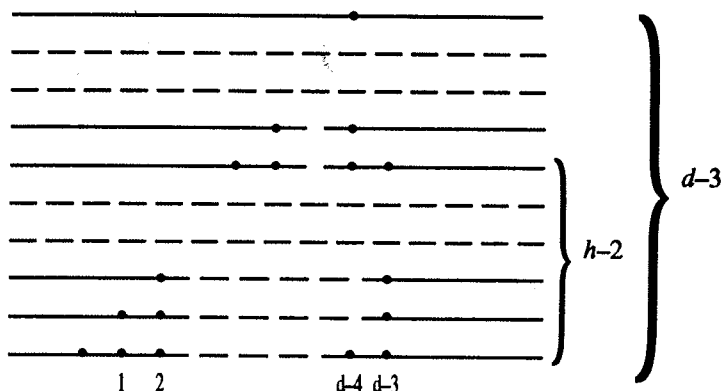
In ciò che segue facciamo vedere che, già quando  $I(X)$  ha un insieme minimale di generatori costituito da  $d$  elemento (due in meno rispetto al caso massimale), può accadere che le curve di grado  $d+1$  si intersechino esattamente nei punti di  $X$ , cioè:

$$|Z_{d+1}(X)| = \binom{d+2}{2} + h = |X|.$$

Consideriamo a tale scopo un insieme  $X''$  di punti distinti di  $\mathbb{P}_k^2$ , con

$$|X''| = \binom{d-2}{2} + (h-2), \quad 1 \leq h-2 < d-3,$$

distribuiti su  $d-3$  rette secondo lo schema seguente, rappresentazione grafica di  $\Delta HF(X'')$ :





$X''$  è quindi costituito da punti distinti in posizione generica e l'ideale  $I(X'')$  è generato da  $d-2$  elementi,  $d-h$  dei quali di grado  $d-3$  e i restanti  $h-2$  di grado  $d-2$  (notiamo che, per l'ipotesi fatta,  $I(X'')$  ha più generatori oltre quelli obbligati poichè questi ultimi sono  $d-h+\max\{0, 2h+1-d\}$ ). Prendendo il legato di  $X''$  in  $Y'$  completa intersezione di due curve di grado  $d-1$  per  $X''$ , si ottiene un insieme  $X'$  di punti in posizione generica con  $|X'| = \binom{d}{2} + (d-h)$  ed avente l'ideale  $I(X')$  generato da  $d-1$  elementi (più di quelli che sicuramente devono essere presenti),  $h$  dei quali di grado  $d-1$  e i restanti  $d-h-1$  di grado  $d$ . Considerando di nuovo il legato di  $X'$  in  $Y$ , completa intersezione di due curve di grado  $d+1$  per  $X'$ , si perviene ad un insieme  $X$  di punti distinti in posizione generica con  $|X| = \binom{d+2}{2} + h$ ,  $3 \leq h < d-1$ , il cui ideale  $I(X)$  ha  $d$  generatori (di nuovo, più di quelli che sicuramente devono essere presente),  $d+2-h$  dei quali di grado  $d+1$  e gli altri  $h-2$  di grado  $d+2$ .

Per tale insieme  $X$  di punti facciamo vedere che  $\dim Z_{d+1}(X) = 0$  e  $|Z_{d+1}(X)| = |X|$ .

Osserviamo che  $X''$  si può ottenere come intersezione di una curva di grado  $d-3$  e di due curve di grado  $d-1$  (basta, ad esempio, considerare la curva di grado  $d-3$  costituita dalle  $d-3$  rette dello schema precedente e le due curve di grado  $d-1$  costituite prendendo ogni volta, in modo opportuno,  $d-2$  rette per i punti di  $X''$  e un'altra retta); si ha pertanto la seguente risoluzione localmente libera di  $\mathfrak{S}(X'')$ :

$$0 \rightarrow E \rightarrow \Theta_{\mathbb{P}_k^2}(-(d-3)) \oplus \Theta_{\mathbb{P}_k^2}^2(-(d-1)) \rightarrow \mathfrak{S}(X'') \rightarrow 0,$$

con  $E$  fibrato di rango 2.

Considerato  $X'$ , legato di  $X''$  in  $Y' = CI(d-1, d-1)$ , da [10] si ha

$$0 \rightarrow \Theta_{\mathbb{P}_k^2}(-(d+1)) \rightarrow E^\nu(-2(d-1)) \rightarrow \mathfrak{S}(X') \rightarrow 0$$

e quindi, passando al legato  $X$  di  $X'$  in  $Y = CI(d+1, d+1)$  si ottiene la seguente risoluzione localmente libera di  $\mathfrak{S}(X)$ :

$$0 \rightarrow E^{\nu\nu}(-4) \rightarrow \Theta_{\mathbb{P}_k^2}^3(-(d+1)) \rightarrow \mathfrak{S}(X) \rightarrow 0.$$

Risulta pertanto che  $X$  è intersezione di tre curve di grado  $d+1$  e quindi  $|Z_{d+1}(X)| = |X|$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Boratynski M., Greco S., *Hilbert functions and Betti Numbers in a flat family*, Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol. CXLII (1985), 277-292.
- [2] Ciliberto C., Geramita A. V., Orecchia F., *Remarks on a theorem of Hilbert-Burk*, Queen's University, Preprint 23 - 1986.
- [3] Davis E., Geramita A. V., Orecchia F., *Gorenstein Algebras and the Cayley-Bacharach Theorem*, Proc. A.M.S. **93** (1985), 593-597.
- [4] Geramita A. V., Maroscia P., Roberts L. G., *The Hilbert function of a reduced  $k$ -algebra*, J. London Math. Soc. (2), **28** (1983), 443-452.
- [5] Geramita A. V., Orecchia F., *On the Cohen-Macaulay type of  $s$ -lines in  $\mathbb{A}^{n+1}$* , J. of Algebra **70** (1981), 116-140.
- [6] Maggioni R., Ragusa A., *Nonsingular curves passing through points of  $\mathbb{P}^2$  in General Position (II)*, J. of Algebra **92** (1985), 194-207.
- [7] Maggioni R., Ragusa A., *Connections between Hilbert function and geometric properties for a finite set of points in  $\mathbb{P}^2$* , Le Matematiche, Vol. XXXIX, fasc I-II, 1984, 153-170.
- [8] Maggioni R., Ragusa A., *Construction of smooth curves of  $\mathbb{P}^3$  with assigned Hilbert function and generators degrees*, Le Matematiche, Vol. XLII, fasc I-II, 1987, 195-210.
- [9] Maroscia P., *Some problems and results on finite sets of points in  $\mathbb{P}^n$* , Springer LNM, v. 997 (1983), 290-314.
- [10] Peskine C., Szpiro L., *Liaison des variete algebriques*, Inv. Math. **26** (1974), 271-302.

---

Dipartimento di Matematica  
Via del Capitano, 15  
53100 Siena (Italy)