LE MATEMATICHE
Vol. XLVI (1991) - Fasc. II, pp. 681-696

SULLE SERIE IL CUI TERMINE GENERALE È DEFINITO PER RICORRENZA

GIOVANNI FIORITO - ROSARIO MUSMECI
MARIO STRANO (Catania)(*)

In this paper we prove some theorems that emphasize properties of the series whose terms are defined recursively. Suitable examples and counter-examples complete the theory.

Introduzione.

Di recente alcuni autori (cfr. [1], [2], [3], [4], [5]) hanno preso in considerazione serie numeriche il cui termine generale è definito per ricorrenza, fornendo per esse interessanti criteri di convergenza e di divergenza. In particolare in [1], [3], [4], e [5] viene dimostrato un *integral test* con ipotesi più o meno restrittive sulla funzione generatrice. Fort e Schuster deducono da questo criterio due utili teoremi (corollario 1 e teorema 2 di [4]). Questi due teoremi si possono anche dedurre dai teoremi 2.1, 2.2, e 3.1 di [6].

Nel presente lavoro riprendiamo la teoria delle serie definite per ricorrenza con l'obiettivo di fornire criteri di facile applicabilità. In questo contesto viene data, con risparmio di ipotesi, una semplice

(*) Entrato in Redazione il 3 dicembre 1991.

dimostrazione (teoremi 1.3 e 1.5) del corollario 1 e del teorema 2 di [4] indipendente da altri risultati e viene generalizzato un classico teorema sull'approssimazione di un punto fisso (teorema 1.6). Inoltre dimostriamo nuovi criteri di convergenza e di divergenza per le serie $\Sigma_{\lambda,f}$ e $\Sigma_{\lambda,f,g}$ (per le notazioni si veda più oltre) facendo opportune ipotesi sulla funzione generatrice f e sulla funzione g. Alla fine del n. 1 illustriamo con opportuni esempi e controesempi i teoremi dimostrati. Nel n. 2, infine, dimostriamo alcuni teoremi riguardanti le serie di funzioni definite per ricorrenza.

Le funzioni prese in considerazione nella presente nota sono reali di variabile reale; le notazioni adoperate sono quelle più diffuse ad eccezione delle seguenti, introdotte allo scopo di rendere più breve l'esposizione.

Assegnate due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ consideriamo $\forall \lambda \in E$ la successione (definita per ricorrenza dalla funzione generatrice $f(x)$)

$$(*) \qquad \begin{cases} a_1 = \lambda \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

e le serie

$$(**) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

e

$$(***) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} g(a_n).$$

Nel seguito denoteremo la successione $(*)$ col simbolo $\{a_n\}_{\lambda,f}$ e le serie $(**)$ e $(***)$ coi simboli $\Sigma_{\lambda,f}$ e $\Sigma_{\lambda,f,g}$ rispettivamente.

Inoltre, assegnate due funzioni $\psi(x)$ e $f(x)$ consideriamo la successione di funzioni (definita per ricorrenza)

$$\begin{cases} \phi_1(x) = \psi(x) \\ \phi_{n+1}(x) = f(\phi_n(x)) \end{cases}$$

e la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \qquad (+).$$

Nel seguito denoteremo la serie (+) col simbolo $\Sigma_{\psi(x),f}$.

Ringraziamento. Gli autori sono grati al prof. F. Guglielmino per gli utili consigli dati durante la stesura del presente lavoro.

1. Serie numeriche.

Sussistono i seguenti teoremi.

TEOREMA 1.1. *Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo* $[0,+\infty[$*; si ha:*

1) se $0 \leq f(x) \leq kx$ $\forall\, x \in [0,+\infty[$ con $k \in [0,1[$ ed $E = [0,+\infty[$, allora la serie $\Sigma_{\lambda,f}$ è convergente e per il suo resto R_n sussiste la maggiorazione

$$R_n \leq \frac{\lambda k^n}{1-k};$$

2) se $f(x) \geq x$ $\forall\, x \in [0,+\infty[$ ed $E =]0,+\infty[$, allora la serie $\Sigma_{\lambda,f}$ è divergente.

Dimostrazione. Basta osservare che nel caso 1) si ha

$$a_{n+1} \leq \lambda k^n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e nel caso 2)

$$a_{n+1} \geq \lambda \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

TEOREMA 1.2. *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite nell'intervallo* $[0,+\infty[$ *e verificanti le seguenti condizioni:*

1) $0 \leq f(x) \leq g(x) \qquad \forall\, x \in [0,+\infty[;$

2) almeno una delle due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sia non decrescente.

Allora, posto $E = [0,+\infty[$ e $\lambda \leq \mu$, si ha che:

– se la serie $\Sigma_{\mu,g}$ è convergente allora la serie $\Sigma_{\lambda,f}$ è convergente;

– se la serie $\Sigma_{\lambda,f}$ è divergente allora la serie $\Sigma_{\mu,g}$ è divergente.

Dimostrazione. Indichiamo con a_n e b_n i termini generali delle serie $\Sigma_{\lambda,f}$ e $\Sigma_{\mu,g}$ rispettivamente. Supposto $a_n \leq b_n$, si ha:

$$a_{n+1} = f(a_n) \leq f(b_n) \leq g(b_n) = b_{n+1}$$

se $f(x)$ è non decrescente;

$$a_{n+1} = f(a_n) \leq g(a_n) \leq g(b_n) = b_{n+1}$$

se $g(x)$ è non decrescente.

Da queste relazioni in virtù del principio di induzione segue ovviamente la tesi.

TEOREMA 1.3. *Sia $f(x) \in C^0([0,a])$ e verificante le condizioni:*

1) $0 \leq f(x) < x \qquad \forall\, x \in]0,a]$;

2) $\exists\, f'(0)$ *e risulta* $f'(0) < 1$.

Allora, posto $E = [0,a]$, la serie $\Sigma_{\lambda,f}$ è convergente.

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che dalla condizione 1) segue subito che $f(0) = 0$ e inoltre la successione $\{a_n\}_{\lambda,f}$ è non crescente ed infinitesima. Proviamo ora che la serie $\Sigma_{\lambda,f}$ è convergente. A questo scopo, notiamo che se esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\bar{n}} = 0$ allora risulta $a_n = 0\ \forall\, n > \bar{n}$, e la tesi è ovvia. Se invece è $a_n > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ allora si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)}{a_n} = f'(0),$$

e quindi la tesi.

TEOREMA 1.4. *Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo $[0,+\infty[$ e verificante le seguenti condizioni:*

1) $f(x) > 0\ \ \forall\, x \in]0,+\infty[,\ \ f(0) = 0$;

2) $\exists\, f'(0)$ *e risulta* $f'(0) > 1$.

Allora, posto $E =]0,+\infty[$, la serie $\Sigma_{\lambda,f}$ è divergente a $+\infty$.

Dimostrazione. Basta osservare che la successione $\{a_n\}_{\lambda,f}$ non è infinitesima come si prova subito procedendo per assurdo e tenendo conto che esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > x$ se $0 < x < \delta$.

TEOREMA 1.5. *Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo $[0,a]$, ivi derivabile e verificante le seguenti condizioni:*

1) $0 < f(x) < x \quad \forall\, x \in]0, a]$;

2) $f'(0) = 1$;

3) $\exists\, f''(0)$.

Allora, posto $E =]0, a]$, *la serie* $\Sigma_{\lambda,f}$ *è divergente a* $+\infty$.

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che dalla condizione 1) segue subito che $f(0) = 0$ e inoltre la successione $\{a_n\}_{\lambda,f}$ è decrescente ed infinitesima.

Utilizzando la formula di Taylor col termine complementare di Peano si ha:

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2}(f''(0) + \omega(x)) \qquad \forall\, x \in [0, a]. \tag{1}$$

Pertanto, essendo

$$\min_{[0,a]} \frac{f''(0) + \omega(x)}{2} < 0,$$

posto

$$k = -\min_{[0,a]} \frac{f''(0) + \omega(x)}{2},$$

dalla 1) segue

$$f(x) \geq x - kx^2 \qquad \forall\, x \in [0, a]. \tag{2}$$

Poichè la successione $\{a_n\}_{\lambda,f}$ è infinitesima esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < \dfrac{1}{2k}$ $\forall\, n \geq \nu$. Introduciamo a questo punto la funzione

$$g(x) = x - kx^2 \qquad x \in \left[0, \frac{1}{2k}\right]$$

e consideriamo la successione $\{b_n\}_{a_\nu,g}$. È facile provare che la serie $\Sigma_{a_\nu,g}$ è divergente a $+\infty$. Infatti se m è un numero naturale tale che

$$\frac{1}{mk} < b_1 < \frac{1}{2k},$$

risulta, procedendo per induzione e tenendo conto della crescenza di $g(x)$,

$$b_n > \frac{1}{[m + 2(n-1)]k} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

e ciò prova, ovviamente, che la serie $\Sigma_{a_\nu,g}$ diverge.

Pertanto tenendo conto della (2) e procedendo come nella dimostrazione del teorema 1.2 segue la tesi.

TEOREMA 1.6. *Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo I e verificante le seguenti condizioni:*

1) $x_0 \in \mathring{I}$ è soluzione dell'equazione $f(x) = x$;

2) $\exists\, f'(x_0)$ e risulta $|f'(x_0)| < 1$.

Allora esiste un numero $\delta = \mathbb{R}^+$ tale che, posto $E = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, risulta $f(E) \subseteq E$ e la successione $\{a_n\}_{\lambda,f}$ è convergente ad x_0. Inoltre se è $0 < f'(x_0) < 1$ la successione $\{a_n\}_{\lambda,f}$ risulta crescente o decrescente a secondo che sia $\lambda \in [x_0 - \delta, x_0[$ o $\lambda \in]x_0, x_0 + \delta]$, mentre se è $-1 < f'(x_0) < 0$ la successione $\{a_n - x_0\}$ risulta a segni alterni purchè sia $\lambda \neq x_0$.

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che dalla condizione 2) segue che esistono $k \in]0, 1[$ e $\delta \in \mathbb{R}^+$ tali che $\forall\, x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $x \neq x_0$, risulta

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| < k \tag{1}$$

e inoltre

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \text{ se } f'(x_0) > 0, \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \text{ se } f'(x_0) < 0. \tag{2}$$

Proviamo ora che $f(E) \subseteq E$ e che la successione $\{a_n\}_{\lambda,f}$ è convergente ad x_0. Infatti dalla (1) si ottiene

$$|f(x) - x_0| < \delta \qquad \forall\, x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta],$$

e ciò prova che $f(E) \subseteq E$. Inoltre dalla (1) si ottiene pure

$$|a_{n+1} - x_0| \leq k^n |\lambda - x_0| \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

e questa relazione implica, ovviamente, che la successione $\{a_n\}_{\lambda,f}$ è convergente ad x_0.

Dimostriamo a questo punto la seconda parte della tesi distinguendo due casi.

1°) caso. Sia $0 < f'(x_0) < 1$. In questa circostanza da (1) e (2) segue

$$0 < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 1 \qquad \forall\, x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta],\, x \neq x_0,$$

da cui

$$x < f(x) < x_0 \qquad \forall\, x \in [x_0 - \delta, x_0[\tag{3}$$

e

$$x_0 < f(x) < x \qquad \forall\, x \in]x_0, x_0 + \delta]. \tag{4}$$

Dalle relazioni (3) e (4) si ottiene rispettivamente

$$a_n < a_{n+1} < x_0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ se } \lambda \in [x_0 - \delta, x_0[$$

e

$$x_0 < a_{n+1} < a_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ se } \lambda \in]x_0, x_0 + \delta].$$

Ciò prova che la successione $\{a_n\}_{\lambda,f}$ è monotona come indicato nella tesi.

2°) caso. Sia $-1 < f'(x_0) < 0$. In questa circostanza da (1) e (2) segue

$$-1 < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \qquad \forall\, x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta],\, x \neq x_0,$$

da cui

$$x_0 < f(x) < -x + 2x_0 \qquad \forall\, x \in [x_0 - \delta, x_0[\tag{5}$$

e

$$-x + 2x_0 < f(x) < x_0 \qquad \forall\, x \in]x_0, x_0 + \delta]. \tag{6}$$

Dalle relazioni (5) e (6) segue poi facilmente che la successione $\{a_n - x_0\}$ è a segni alterni purchè sia $\lambda \neq x_0$, e ciò completa la dimostrazione [1].

---

[1] Osserviamo che le ipotesi del teorema non implicano che la funzione $f(x)$ sia una contrazione, e quindi non può essere utilizzato il teorema del punto fisso di Banach-Caccioppoli. Il risultato provato costituisce perciò un miglioramento di un classico teorema.

TEOREMA 1.7. *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite in un intervallo I e verificanti le seguenti condizioni:*

1) $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ *è soluzione dell'equazione* $f(x) = x$;

2) $\exists\, f'(x_0)$ *e risulta* $|f'(x_0)| < 1$;

3) $g(x_0) = 0$ *e* $g(x) \neq 0\ \forall\, x \in I,\ x \neq x_0$;

4) $\exists\, g'(x_0)$ *e risulta* $g'(x_0) \neq 0$.

Allora esiste un numero $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che, posto $E = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, la serie $\Sigma_{\lambda,f,g}$ è assolutamente convergente.

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che in virtù del teorema precedente esiste $\delta \in R^+$ tale che, posto $E = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, risulta $f(E) \subseteq E$ e la successione $\{a_n\}_{\lambda,f}$ è convergente ad x_0.

Proviamo ora che la serie $\Sigma_{\lambda,f,g}$ è assolutamente convergente. Se esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\bar{n}} = x_0$, ciò è ovvio. Se invece è $a_n \neq x_0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, si ha:

$$\frac{g(a_{n+1})}{g(a_n)} = \frac{g(a_{n+1})}{a_{n+1} - x_0} \, \frac{f(a_n) - x_0}{a_n - x_0} \, \frac{a_n - x_0}{g(a_n)} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

e da questa relazione, tenendo conto delle ipotesi, segue subito la tesi.

TEOREMA 1.8. *Sia $f(x)$ una funzione appartenente a $C^1([a,b])$ e a valori in $[a,b]$ e $g(x)$ una funzione appartenente a $C^1([a,b])$. Siano inoltre verificate le seguenti condizioni:*

1) $f(a) = a$;

2) $f'(a) = 1$;

3) $\exists\, f''(a)$ *e risulta* $f''(a) < 0$;

4) $g(a) = 0$;

5) $g'(a) > 0$.

Allora esiste un numero $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che, posto $E =]a, a + \delta]$, la successione $\{a_n\}_{\lambda,f}$ è convergente ad a e la serie $\Sigma_{\lambda,f,g}$ è divergente a $+\infty$.

Dimostrazione. Dalle ipotesi segue subito che esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che $f(x)$ e $g(x)$ sono crescenti in $[a, a+\delta]$ e risulta $f(x) < x$ in $]a, a+\delta]$; allora posto $E =]a, a+\delta]$, la successione $\{a_n\}_{\lambda,f}$ è convergente ad a.

Proviamo ora che la serie (a termini positivi) $\Sigma_{\lambda,f,g}$ è divergente a $+\infty$. Applicando alla funzione $f(x)$ la formula di Taylor col termine complementare di Peano si ha:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a) + \omega(x)}{2}(x-a)^2$$

cioè

$$f(x) = x + \frac{f''(a) + \omega(x)}{2}(x-a)^2$$

da cui, osservato che

$$\min_{[a,a+\delta]} \frac{f''(a) + \omega(x)}{2} < 0$$

e posto

$$k = -\min_{[a,a+\delta]} \frac{f''(a) + \omega(x)}{2},$$

segue

$$f(x) \geq x - k(x-a)^2 \qquad \forall\, x \in [a, a+\delta].$$

Poichè la successione $\{a_n\}_{\lambda,f}$ converge ad a, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n < a + \frac{1}{2k} \qquad \forall\, n \geq \nu.$$

Introduciamo ora la funzione

$$\phi(x) = x - k(x-a)^2 \qquad x \in \left[a, a + \frac{1}{2k}\right]$$

e consideriamo la successione $\{b_n\}_{a_\nu,\phi}$. Se m è un numero naturale tale che

$$a + \frac{1}{mk} < b_1 < a + \frac{1}{2k},$$

si ha

$$b_n > a + \frac{1}{[m + 2(n-1)]k} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Inoltre si prova subito per induzione che $b_n \leq a_{\nu+n-1}$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Pertanto, ponendo

$$c_n = a + \frac{1}{[m + 2(n-1)]k} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

la serie

$$g(a_\nu) + g(a_{\nu+1}) + \cdots + g(a_{\nu+p-1}) + \cdots$$

risulta minorata dalla serie

$$g(c_1) + g(c_2) + \cdots + g(c_p) + \cdots .$$

D'altra parte, essendo

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{x - a} = g'(a) > 0,$$

le serie $\sum_{n=1}^{\infty} g(c_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a)$ hanno lo stesso carattere, ed essendo la seconda divergente a $+\infty$ segue ovviamente la tesi.

TEOREMA 1.9. *Siano* $f(x)$ *e* $g(x)$ *due funzioni definite in* $[0, +\infty[$, *a valori in* $\mathbb{R}^+$ *e verificanti le seguenti condizioni:*

1) $f(x) \in C^0([0, +\infty[)$;

2) $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}^+$ *tale che* $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha g(x) = \beta \neq 0$;

3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \gamma > 1$.

Allora $\exists\ \delta \in \mathbb{R}^+$ *tale che, posto* $E = [\delta, +\infty[$ *la successione* $\{a_n\}_{\lambda,f}$ *è divergente a* $+\infty$ *e la serie* $\Sigma_{\lambda,f,g}$ *è convergente.*

Dimostrazione. Dalla condizione 3) segue subito che esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$f(x) > x \qquad \forall\ x \in [\delta, +\infty[.$$

Da ciò e dalla condizione 1) si ottiene che, posto $E = [\delta, +\infty[$, la successione $\{a_n\}_{\lambda,f}$ è divergente a $+\infty$.

Proviamo ora che la serie $\Sigma_{\lambda,f,g}$ è convergente. Infatti, essendo

$$\frac{g(a_{n+1})}{g(a_n)} = \frac{a_{n+1}^\alpha g(a_{n+1})}{a_n^\alpha g(a_n)} \left[\frac{a_n}{f(a_n)}\right]^\alpha ,$$

segue

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(a_{n+1})}{g(a_n)} = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\alpha},$$

e quindi la tesi.

TEOREMA 1.10. *Siano* $f(x)$ *e* $g(x)$ *due funzioni definite in* $[a,+\infty[$ *e verificanti le seguenti condizioni:*

1) $f(x) \geq x \quad \forall\, x \in [a,+\infty[$*;*

2) $\sup\limits_{[a,+\infty[} (f(x) - x) < +\infty$*;*

3) $g(x)$ *non crescente in* $[a,+\infty[$*;*

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} xg(x) = \beta \in \mathbb{R}^+$.

Allora, posto $E = [a,+\infty[$*, la serie* $\Sigma_{\lambda,f,g}$ *è divergente a* $+\infty$.

Dimostrazione. Poniamo $k = \sup\limits_{[a,+\infty[} (f(x) - x)$. Se è $k = 0$ la tesi è ovvia, mentre se è $k > 0$ si ha

$$f(x) \leq x + k \qquad\qquad \forall\, x \in [a,\infty[.$$

Da questa diseguaglianza segue

$$a_n \leq \lambda + (n-1)k \qquad\qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

da cui

(1) $$g(a_n) \geq g(\lambda + (n-1)k) \qquad\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

E poichè la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(\lambda + (n-1)k)$ ha lo stesso carattere della serie (divergente) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda + (n-1)k}$ in virtù della condizione 4), dalla (1) segue ovviamente la tesi.

Osservazione. Essendo

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - x}{x} + 1,$$

la condizione 2) implica che $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Pertanto il teorema 1.10 risulta utile quando non è applicabile il teorema 1.9.

Terminiamo questo paragrafo con alcuni esempi.

Esempio 1. Consideriamo $\forall\, k \in]0,1[$ il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + x^2 y' + (\mathrm{sen} x) y = -e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = k \end{cases}$$

e sia $\phi(x)$ la sua soluzione. È facile verificare che esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che la restrizione $f(x)$ di $\phi(x)$ all'intervallo $[0,\delta]$ verifica le ipotesi del teorema 1.3. Pertanto, posto $E = [0,\delta]$, la serie $\Sigma_{\lambda,f}$ è convergente.

Esempio 2. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \mathrm{arctg} x \qquad x \in [0,a], \ a \in \mathbb{R}^+.$$

Per essa sono verificate le ipotesi del teorema 1.5, pertanto, posto $E =]0,a]$, la serie $\Sigma_{\lambda,f}$ è divergente a $+\infty$.

Esempio 3. Consideriamo la funzione

$$f(x) = -\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + x \qquad x \in [0,a], \ \text{con } a < \frac{9}{16}.$$

Per essa sono verificate tutte le ipotesi del teorema 1.5 tranne l'ipotesi 3). Posto $E =]0,a]$, proviamo che la serie $\Sigma_{\lambda,f}$ è convergente.

Infatti, con facili calcoli si trova

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{n}{\frac{3}{4} a_n^{-\frac{1}{2}} - 1}$$

e inoltre, posto

$$b_n = n \quad \text{e} \quad c_n = \frac{3}{4} a_n^{-\frac{1}{2}} - 1$$

risulta

$$\frac{b_n - b_{n-1}}{c_n - c_{n-1}} = \sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}} + \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Pertanto, essendo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}+\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)=2,$$

in virtù dei teoremi di Raabe e di Stoltz-Cesaro segue l'asserto.

Esempio 4. Consideriamo la funzione

$$f(x)=\begin{cases} x-x^2+\dfrac{1}{4}x^2\sin^2\dfrac{1}{x} & \text{per } x\in]0,1], \\ 0 & \text{per } x=0. \end{cases}$$

Essa verifica tutte le ipotesi del teorema 1.5 tranne l'ipotesi 3). Posto $E=]0,1]$ la serie $\Sigma_{\lambda,f}$ risulta divergente. Infatti basta osservare che sussiste la diseguaglianza

$$f(x)\geq x-x^2 \qquad \forall\, x\in[0,1]$$

e ragionare come si è fatto nel teorema 1.5.

Esempio 5. Consideriamo le funzioni

$$f(x)=\sqrt{2+x} \quad \text{e} \quad g(x)=2-x \qquad \text{con } x\in[-2,+\infty[.$$

Poichè l'equazione $\sqrt{2+x}=x$ ha in $[-2,+\infty[$ solo la soluzione $x_0=2$ e risulta $f'(2)=\frac{1}{4}$, in virtù del teorema 1.6 esiste $\delta\in\mathbb{R}^+$ tale che, posto $E=[2-\delta,2+\delta]$, la successione $\{a_n\}_{\lambda,f}$ converge a 2. Si può inoltre provare che sciegliendo $E=[-2,+\infty[$, la successione $\{a_n\}_{\lambda,f}$ è ancora convergente a 2. Pertanto, posto $E=[-2,+\infty[$, per il teorema 1.7 la serie $\Sigma_{\lambda,f,g}$ è assolutamente convergente.

Esempio 6. Consideriamo le funzioni

$$f(x)=x+1 \quad \text{e} \quad g(x)=\frac{1}{x^\alpha+1} \qquad \text{con } x\in[0,+\infty[\text{ e } \alpha\in\mathbb{R}^+.$$

Esse verificano tutte le ipotesi del teorema 1.9 tranne la 3). È facile provare che, posto $E=[0,+\infty[$, la successione $\{a_n\}_{\lambda,f}$ è divergente a $+\infty$, mentre la serie $\Sigma_{\lambda,f,g}$ risulta convergente o divergente a secondo che sia $\alpha>1$ o $\alpha\leq 1$ rispettivamente.

Esempio 7. Consideriamo le funzioni

$$f(x)=\log(1+e^x) \quad \text{e} \quad g(x)=\frac{1}{x} \qquad \text{con } x\in[1,+\infty[.$$

Posto $E = [1,+\infty[$, la serie $\Sigma_{\lambda,f,g}$ è divergente a $+\infty$ in virtù del teorema 1.10.

2. Serie di funzioni.

Sussistono i seguenti teoremi:

TEOREMA 2.1. *Sia* $f(x) \in C^0([0,a])$ *e verificante le condizioni:*

1) $0 \leq f(x) < x \quad \forall\, x \in]0,a]$;

2) $\exists\, f'(0)$ *e risulta* $f'(0) < 1$;

3) $f(x)$ *non decrescente in* $[0,a]$.

Sia inoltre $\psi(x)$ *una funzione definita in un intervallo* (α,β) *e a valori in* $[0,a]$.

Allora la serie di funzioni $\Sigma_{\psi(x),f}$ *risulta totalmente convergente in* (α,β).

Dimostrazione. Osserviamo subito che in virtù del teorema 1.3 la serie di funzioni $\Sigma_{\psi(x),f}$ risulta convergente in (α,β). Proviamo ora che essa è totalmente convergente. A questo scopo, posto

$$L_n = \sup_{(\alpha,\beta)} \phi_n(x) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e considerata la successione $\{\lambda_n\}_{L_1,f}$, notiamo che risulta $L_n \leq \lambda_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Infatti $L_1 = \lambda_1$ e inoltre supposto $L_{n-1} \leq \lambda_{n-1}$ segue

$$L_n = \sup_{(\alpha,\beta)} \phi_n(x) = \sup_{(\alpha,\beta)} f(\phi_{n-1}(x)) \leq f(L_{n-1}) \leq f(\lambda_{n-1}) = \lambda_n.$$

Poichè la serie $\Sigma_{L_1,f}$ è convergente per il teorema 1.3, segue che anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} L_n$ è convergente, e ciò prova la tesi.

TEOREMA 2.2. *Sia* $f(x)$ *una funzione definita nell'intervallo* $[0,a]$, *ivi derivabile e verificante le condizioni:*

1) $0 \leq f(x) < x \quad \forall\, x \in]0,a]$;

2) $0 \leq f'(x) \leq k \quad \forall x \in [0,a]$, *con* $k \in]0,1[$.

Sia inoltre $\psi(x)$ *una funzione definita in un intervallo* (α, β) *e a valori in* $[0, a]$, *derivabile e verificante la condizione:*

3) $|\psi'(x)| \leq h \quad \forall\, x \in (\alpha, \beta)$ *con* $h \in]0, 1[$.

Allora la serie di funzioni $\Sigma_{\psi(x),f}$ *è totalmente convergente in* (α, β) *e la sua somma* $\phi(x)$ *è derivabile in* (α, β) *e si ha:*

$$\phi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n'(x) \qquad \forall\, x \in (\alpha, \beta).$$

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che la condizione 2) implica le condizioni 2) e 3) del teorema precedente, e pertanto la $\Sigma_{\psi(x),f}$ è totalmente convergente in (α, β). Proviamo ora la seconda parte della tesi. Si vede subito che $\phi_n(x)$ è derivabile in (α, β) $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Inoltre, posto $q = \max(k, h)$, si ha

$$|\phi_n'(x)| \leq q^n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ è convergente segue ovviamente la tesi.

TEOREMA 2.3. *Sia* $f(x) \in C^0([0, a])$ *e verificante le condizioni:*

1) $0 \leq f(x) < x \quad \forall\, x \in]0, a]$;

2) $\exists f'(0)$ *e risulta* $f'(0) < 1$;

3) $f(x)$ *non decrescente in* $[0, a]$.

Sia inoltre $\psi(x)$ *una funzione definita in un intervallo* $[\alpha, \beta]$, *ivi misurabile e a valori in* $[0, a]$.

Allora, detta $\phi(x)$ *la somma della serie di funzione* $\Sigma_{\psi(x),f}$, *sussiste la formula di integrazione per serie:*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \phi(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \phi_n(x)dx.$$

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che le funzioni $\phi_n(x)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ sono misurabili e limitate, e quindi sommabili. Inoltre, in virtù del teorema 2.1, la serie $\Sigma_{\psi(x),f}$ converge totalmente in $[\alpha, \beta]$, e quindi la sua somma $\phi(x)$ risulta misurabile e limitata in $[\alpha, \beta]$ e perciò sommabile. Per di più, posto

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \phi_k(x),$$

le funzioni $\Phi_n(x)$ risultano misurabili e limitate in $[\alpha, \beta]$ e si ha:

$$0 \leq \Phi_n(x) \leq \Phi_{n+1}(x) \leq \phi(x) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Pertanto, in virtù del teorema di Lebesgue, risulta

$$\lim_{n \to \infty} \int_\alpha^\beta \Phi_n(x)dx = \int_\alpha^\beta \phi(x)dx,$$

e quindi la tesi.

BIBLIOGRAFIA

[1] Altman Mieczyslaw, *An integral test for series and generalised contractions,* The American Math. Monthly **82** (1975), n. 8, 827-829.

[2] Altman Mieczyslaw, *Series of iterates,* Colloq. Math. **38** (1977/78), n. 2, 305-317.

[3] Brauer George, *Series whose terms are obtained by iteration of a function,* The American Math. Monthly, **75** (1968), 964-968.

[4] Fort M. K., Schuster Seymour, *Convergence of series whose terms are defined recursively,* The American Math. Monthly, **71** (1964), 994-998.

[5] Svarcman P. A., *The convergence of an iteration series,* Vestinik Jaroslov, Univ. Vyp. **12** (1975), 155-159.

[6] Thron W. J., *Sequences generated by iteration,* Trans. American Math. Soc. **96** (1960), 38-53.

Dipartimento di Matematica
Viale A. Doria, 6
95125 Catania