LE MATEMATICHE
Vol. XLVI (1991) - Fasc. II, pp. 697-700

SULL'ESISTENZA DI FUNZIONI REALI CONTINUE LOCALMENTE NON COSTANTI

ANGELO BELLA (Messina)(*)

It is shown it is consistent with ZFC the existence of a dense in itself perfectly normal space such that every real valued continuous function defined on it is locally constant.

Una funzione $f : X \to Y$ si dice localmente non costante se non é costante in nessun sottoinsieme aperto non vuoto di X. Varie proprietà delle funzioni reali continue localmente non costanti sono state inizialmente studiate da B. Ricceri e A. Villani in [7]. Nel seguito con $R(X)$ denotiamo l'insieme di tutte le funzioni reali continue localmente non costanti definite sullo spazio topologico X. Uno dei problemi principali ed ancora insoluto é trovare una caratterizzazione, almeno relativamente alla classe degli spazi normali, di quegli X per i quali $R(X)\neq\emptyset$. In [3], [6] e [8] é stato dimostrato che per ogni spazio metrizzabile X senza punti isolati si ha $R(X)\neq\emptyset$. Tale risultato é poi stato migliorato in [2] estendendolo al caso di ogni spazio normale senza punti isolati che contiene un insieme denso σ-discreto. Alcuni di questi lavori mostrano in realtà

(*) Entrato in Redazione il 3 dicembre 1991.

di più, vale a dire che $R(X)$ é di fatto un sottoinsieme denso nello spazio $C(X)$ di tutte le funzioni reali continue su X con la topologia della norma. Infine in [1] sono date condizioni sotto le quali $R(X)$ é un insieme residuale in $C(X)$.

Lo scopo di questa nota é fornire una risposta negativa alla questione, inizialmente formulata da B. Ricceri, se per ogni spazio perfettamente normale senza punti isolati X si abbia $R(X) \neq \emptyset$. Il risultato presentato si basa sull'esistenza di una retta di Suslin ed é quindi valido solamente in opportuni modelli di ZFC.

Ricordiamo che uno spazio topologico X ha cellularità numerabile se ogni famiglia di aperti a due a due disgiunti é al più numerabile. Uno spazio topologico linearmente ordinato é un insieme totalmente ordinato $(X, <)$ con la topologia definita assumendo come base la collezione di tutti gli intervalli aperti, vale a dire gli insiemi del tipo $]x, y[= \{z \in X : x < z < y\}$. Una retta di Suslin é uno spazio topologico linearmente ordinato di cellularità numerabile, ma non separabile (vedi [4], problema 2.7.9f).

Si dimostra (vedi ad esempio [5]) che l'esistenza di una retta di Suslin é consistente con ZFC. Tra l'altro ciò é vero assumendo l'assioma di costruibilità di Godel $V = L$.

TEOREMA. *Se X é una retta di Suslin allora $R(X) = \emptyset$.*

Dimostrazione. Sia X una retta di Suslin e $f : X \to \Re$ una funzione continua. Per ogni $n \in N^+$ denotiamo con I_n l'insieme di tutti gli intervalli non vuoti di X in cui l'oscillazione di f non supera $\frac{1}{n}$ e sia J_n un sottoinsieme massimale di I_n consistente di elementi a due a due disgiunti. La continuità di f implica che ogni intervallo di X contiene sottointervalli in cui l'oscillazione di f é arbitrariamente piccola. Di conseguenza l'insieme $\cup J_n$ é denso in X per ogni $n \in N^+$. Poichè X ha cellularità numerabile, tutti i J_n sono numerabili. Denotando con D l'insieme di tutti i punti di X che sono di frontiera per qualche intervallo in $\cup\{J_n : n \in N^+\}$, si vede allora immediatamente che D é un insieme numerabile. Ora il fatto che X non é separabile garantisce l'esistenza di un intervallo non vuoto $H \subset X$ tale che $H \cap D = \emptyset$. Si osservi che H interseca $\cup J_n$, ma non contiene nessun punto che sia estremo di qualche intervallo in J_n. Questo può verificarsi solamente se H é contenuto in qualche elemento di J_n. In altre parole, ciò equivale a dire che l'oscillazione di f in H é minore o uguale a $\frac{1}{n}$, per ogni $n \in N^+$. Dunque f é costante in H e resta provato che $R(X) = \emptyset$.

Si osservi ora (vedi [4], problema 3.12.4) che ogni retta di Suslin é uno spazio topologico regolare ed ereditariamente di Lindelof, in particolare esso é perfettamente normale. Inoltre in [5] é mostrato che se esiste una retta di Suslin allora ne esiste una compatta e connessa. Questi fatti uniti al Teorema precedente conducono al seguente:

COROLLARIO. *É consistente con ZFC l'esistenza di uno spazio topologico compatto, connesso e perfettamente normale X per il quale* $R(X) = \emptyset$.

L'assunzione dell'esistenza di una retta di Suslin, per la costruzione del precedente esempio, é probabilmente troppo forte. É quindi ragionevole aspettarsi di poter ottenere un simile esempio in ZFC o almeno assumendo ipotesi di teoria degli insiemi più deboli quali l'assioma di Martin MA o l'ipotesi del continuo CH.

L'autore ringrazia S. Watson e J. Steprans per le utili conversazioni sull'argomento di questa nota.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bella A., Charatonik J. J., Villani A., *On the residuality of the set of all nowhere constant functions*, Boll. Un. Mat. Ital., (7) **4**A (199O), 77-85.

[2] Bella A., Simon P., *Function spaces with a dense set of nowhere constant elements,* Boll. Un. Mat. Ital., (7) **4**-A (1990), 121-124.

[3] Bella A., Ricceri B., *Some propertjes of perfect metric spaces,* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. cl. Sci. Fis. Mat. Natur., (8) **75**, 5 (1983), 185-189.

[4] Engelking R., *General Topology*, Heldermann Verlag 1989.

[5] Kunen K., *Set Theory. An introduction to indipendence proofs,* North Holland Pub. Co. 1980.

[6] Omiljanowski K., *On locally non constant mappings,* Boll. Un. Mat. Ital., (6) **4**-A (1985), 119-122.

[7] Ricceri B., Villani A., *On continuous and locally non costant functions,* Boll. Un. Mat. Ital., (6) **2**-A (1983), 171-177.

[8] Villani A., *Functions with a dense set of proper local maximum points,* Proc. Amer. Math. Soc., **94** (1985), 353-359.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Messina
Salita Sperone, Contrada Papardo (ME)