«LE MATEMATICHE»
Vol. XLV (1990) - Fasc. I, pp. 5-14

SOMMARIO DI ALCUNE QUESTIONI SUGGERITE DALL'OPERA GEOMETRICA DI R.C. BOSE

ADRIANO BARLOTTI (Firenze)

1. Il 30 ottobre 1987 cessava la vita terrena di Ray Chandra Bose: di un eminente uomo di scienza che nutriva un grande amore per l'Italia e che teneva in grande considerazione l'opera scientifica di Beniamino Segre, di Guido Zappa e dei loro allievi che hanno lavorato nel campo delle geometrie finite. Considero un vero onore l'aver goduto della Sua amicizia e ritengo un mio dovere richiamare l'attenzione dei giovani sui vari lavori collegati ad alcune Sue ricerche condotte nell'area trattata da questo Convegno. Infatti sono certo che non poche delle feconde idee che hanno dato vita ai Suoi lavori possono portare ancor oggi ulteriori interessanti sviluppi. (*)

2. Piani finiti e sistemi completi di quadrati latini ortogonali.

Nel 1938 veniva pubblicato il lavoro [5] nel quale è dimostrato il seguente teorema.

(*) Per notizie sulla vita di R.C. Bose si veda [12]; l'elenco delle sue pubblicazioni apparse fino al 1971 si trova nel volume [42].

Un piano finito di ordine n esiste se e solo se esiste un sistema completo di quadrati latini mutuamente ortogonali (SCQLMO).

Il teorema stabilisce un interessante legame fra una struttura di tipo geometrico e una di tipo puramente combinatorio, ed è importante esaminare come proprietà di una delle due strutture si traducano in proprietà dell'altra. Un primo risultato veramente notevole in questa direzione è stato ottenuto in [16] dove è messa in luce, sotto il nome di «proprietà D_0» una particolare proprietà di un SCQLMO che ha interessanti implicazioni di natura geometrica.

Precisamente un SCQLMO normato, S, si dice che possiede la proprietà D_0 quando i vettori «riga» di un quadrato di S sono uguali (naturalmente in ordine diverso) a quelli di qualunque altro quadrato. Ebbene la validità della proprietà D_0 è equivalente alla linearità del sistema ternario di Hall associato in modo opportuno al piano corrispondente ad S (cfr. [33], [30]).

In [3] è segnalato come il risultato precedente suggerisca il problema di determinare le proprietà di un SCQLMO che permettano di stabilire a quale delle diverse classi di Lenz appartiene il piano associato al sistema. Il problema è certamente molto interessante, ma una sua soluzione veramente utilizzabile sembra ancora lontana. Sempre in [3] sono indicati altri risultati su particolari piani finiti non Desarguesiani ottenuti usando il teorema di R.C. Bose dato in [5].

La nozione di quadrati latini ortogonali, introdotta da Eulero nel 1779, richiama alla mente il famoso «problema dei 36 ufficiali» (cfr. p. es. [15], p. 153) ed i bellissimi risultati ottenuti da Bose e altri in [17], [18] e [19].

Indichiamo con $N(n)$ il massimo numero di quadrati latini mutuamente ortogonali di ordine n. Se n non è un numero primo o una potenza di un numero primo, si conosce poco sulla funzione $N(n)$ per $n > 6$, (a prescindere dal fatto che $N(n) \leq n-1$). Un interessante attacco allo studio di questa funzione è quello indicato in [14].

3. Il «packing problem».

Nel 1947 appariva il lavoro [6] nel quale viene considerato per la prima volta il «packing problem» e si indica come le soluzioni particolari ivi trovate abbiamo applicazioni rilevanti in statistica. In $PG(3,q)$, per q pari, veniva data solo una limitazione superiore per $m(3,q)$. Successivamente E. Seiden (cfr. [41]) determinava $m(3,4)$ e B. Qvist (cfr. [34]) provava che in generale $m(3,q) = q^2 + 1$.

In [30] P. Kustaanheimo faceva la congettura che ogni $(q+1)$-arco di $PG(2,q)$, con q dispari fosse una conica di questo piano: nel 1954 B. Segre provava il suo famoso teorema (cfr. [35] [36]) che dava ragione a Kustaanheimo. Tale teorema segna la nascita della «Geometria di Galois», un nuovo ramo della Geometria che ha avuto sviluppi veramente notevoli che hanno portato ad una vasta messe di risultati (cfr., p. es., [37], [39], [28], [29]).

Tornando al «packing problem», che ha interessanti applicazioni anche nella teoria dei codici correttori di errori (cfr. p. es. [8], [27]) ricordiamo che i valori noti fino ad ora sono i seguenti:

$m(r,2) = 2^r,\ r \geq 2$	(Bose, 1947).
$m(2,q) = q+1, q$ dispari	(Bose, 1947).
$m(2,q) = q+2, q$ pari	(Bose, 1947).
$m(3,q) = q^2+1$	(q dispari, Bose, 1947; q pari$\neq$2, Qvist 1952).
$m(4,3) = 20$	(Pellegrino, 1970).
$m(5,3) = 56$	(Hill, 1973).

Sono state studiate anche limitazioni per $m(r,q)$. Molti dei risultati ottenuti sono elencati in [39] (p. 166, p. 190).

4. La teoria dei disegni.

Nel 1947 Bose teneva il «Presidential Address» nella sezione statistica del «34th Indian Science Congress». L'argomento scelto era il disegno (o progetto) degli esperimenti, un soggetto al cui sviluppo Egli ha portato contributi veramente notevoli. In questa esposizione Bose sottolineava con enfasi gli aspetti matematici della teoria. Certamente è in buona parte merito Suo se la teoria astratta dei disegni è divenuta un importante capitolo della matematica combinatoria. Richiederebbe troppo spazio ricordare qui le belle costruzioni di famiglie di disegni ottenute, spesso con puro spirito geometrico, da Bose e dai suoi allievi. Voglio però ricordare che diverse costruzioni di classi di disegni usando le geometrie finite sono state fatte anche nell'ambito della scuola italiana. Fra le più recenti sono quelle illustrate in [22] e [43]; cfr. anche [4].

5. La rappresentazione di piani negli spazi a più dimensioni.

Lo studio delle relazioni che intercorrono fra strutture di tipo diverso porta spesso a notevoli progressi nella matematica. Un risultato interessante e fecondo di sviluppi è quello ottenuto da C. Segre nel 1891 che ha mostrato come si possa rappresentare il piano complesso nello spazio reale a quattro dimensioni (cfr. [40]). Dopo vari decenni, quando si è sviluppata la teoria dei piani proiettivi non desarguesiani, si è visto che può essere opportuno studiare i piani di traslazione usando una loro rappresentazione in spazi a più dimensioni (cfr. [1], [20], [21], [38]). In particolare nel sommario di [20] gli autori pongono il problema di costruire in un modo geometrico che risulti «naturale» ogni piano non desarguesiano partendo da spazi proiettivi a più dimensioni.

R.C. Bose ha portato avanti questo programma di ricerca indicando come si possano costruire e studiare altre vaste classi di piani non desarguesiani (cfr. [13], [10]).

Ritengo interessante illustrare brevemente due di queste costruzioni, e lo farò tenendo presenti le parole di Federigo Enriques (cfr. [24], p. XI): «ad ogni problema compete in qualche modo un suo grado di generalità, che è il primo grado in cui il problema stesso rivela la sua vera natura; ed importa che lo studioso apprenda a riconoscere come potenzialmente data in questo la generalizzazione ulteriore».

Indichiamo dapprima il caso più semplice del procedimento che porta ai piani di traslazione. Sia S_4 uno spazio proiettivo a quattro dimensioni, e fissiamo in esso un iperpiano Σ. Una fibrazione $\mathbf{S}$ di Σ è un insieme di rette di Σ tale che ogni punto di Σ è contenuto in una e una sola retta di **S**. Chiameremo T il piano di traslazione che si ottiene partendo da $(S_4, \Sigma, \mathbf{S})$. Nel seguito allo scopo di evitare confusione fra gli elementi di T e quelli di S_4, chiameremo T-punti e T-rette i punti e le rette di T.

I T-punti sono di due tipi: i T-punti di prima specie sono dati dai punti di S_4 non appartenenti a Σ, i T-punti di seconda specie sono invece le rette della fibrazione **S**. Anche le T-rette sono di due tipi. Le T-rette di prima specie sono i piani di S_4 che passano per le rette di **S** e non appartengono a Σ; esiste una sola T-retta di seconda specie ed è data da Σ. Per completare la costruzione del piano T occorre ancora definire l'incidenza fra i T-punti e le T-rette. Per questo stabiliremo che un T-punto ed una T-retta sono incidenti se e solo se l'elemento di S_4 che rappresenta la T-retta contiene l'elemento di S_4 che rappresenta il T-punto. È facile controllare che i T-punti e le T-rette, con l'incidenza ora definita, verificano i postulati che definiscono un piano proiettivo; il piano T è un *piano di traslazione* quando si assuma come retta impropria la retta di seconda specie.

Il procedimento di «derivazione» (cfr., p. es., [23], pag. 223) trova una chiara illustrazione mediante la rappresentazione spaziale che abbiamo ora indicato. Precisamente il passaggio da un piano di traslazione (derivabile) al piano derivato corrisponde a modificare la fibrazione **S** sostituendo in essa le rette di un regolo (cioè di un sistema di generatrici) di una determinata quadrica con le rette del regolo opposto.

Indicherò ora un secondo procedimento per costruire piani proiettivi che pur essendo strettamente collegato al precedente presenta qualche notevole differenza nel modo di esprimere l'incidenza. Sia S_4 uno spazio proiettivo a quattro dimensioni: fissiamo in esso due iperpiani distinti Σ ed Ω e sia **S** una fibrazione di Σ che sia anche una fibrazione duale, cioè tale che ogni piano di Σ contiene una retta di **S**. Indichiamo poi con s la retta di **S** che appartiene al piano nel quale si intersecano Σ ed Ω.

Partendo da $(S_4, \Sigma, \Omega, \mathbf{S})$ si costruisce un piano proiettivo Δ, i cui punti e le cui rette chiameremo Δ-punti e Δ-rette, (cfr. [13]). I Δ-punti e le Δ rette sono di tre tipi diversi:

I Δ-punti di prima specie sono dati dai piani non appartenenti a

Σ e passanti per le rette di **S** diverse da s.

I Δ-punti di seconda specie sono i piani passanti per s e non contenuti nè in Σ nè in Ω.

Infine i Δ-punti di terza specie sono i punti di s.

Le Δ-rette di prima specie sono i punti di S_4 non appartenenti nè a Σ nè ad Ω.

Le Δ-rette di seconda specie sono i piani di Ω che non contengono s.

C'è una sola retta di terza specie, ed è la retta s.

Una Δ-retta di seconda specie è incidente con un Δ-punto di prima specie se e solo se i piani di S_4 che ad essi corrispondono si intersecano lungo una retta. In tutti gli altri casi un Δ-punto è incidente con una Δ-retta se e solo se l'elemento di S_4 che corrisponde al Δ-punto contiene od è contenuto nell'elemento corrispondente alla Δ-retta. Si riconosce che il piano Δ che abbiamo ottenuto è il derivato del duale del piano di traslazione che corrisponde col procedimento precedente a $(S_4, \Sigma, \mathbf{S})$. Il procedimento di derivazione si effettua su un piano «affine». Nel caso in esame si deriva il duale di T reso affine togliendo la retta di esso che corrisponde ad s. Per ulteriori dettagli cfr. [13].

Per dimostrare che la struttura Δ è un piano proiettivo conviene considerare la struttura che si ottiene da Δ cancellando i punti di seconda e terza specie e la retta di terza specie e provare che questa (rispetto all'«incidenza» fissata) è un piano affine (cfr. [13]).

Per ulteriori indicazioni relative allo studio di piani e altre strutture attraverso una rappresentazione spaziale si veda [2].

6. Le geometrie parziali.

Terminerò la mia breve rassegna citando il lavoro [9] nel quale si introduce il concetto di geometria parziale allo scopo di unificare e generalizzare teoremi appartenenti a campi diversi. Questo concetto è risultato della massima importanza per studi di altri autori (cfr. p. es. [25]). Per una dettagliata esposizione di questioni collegate a quelle esposte nel lavoro sopra citato si veda il testo delle lezioni tenute da R.C. Bose in un corso C.I.M.E. nel 1972 (cfr. [11]).

BIBLIOGRAFIA

[1] André J., *Über nicht-Desarguesche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe,* Math. Zeitsch. **60**, (1954), 156-186.

[2] Barlotti A., *Representation and contruction of projective planes and other geometric structures from projective spaces,* Jber. Deutsch. Math. Verein. **77**, (1975), 28-38.

[3] Barlotti A., *Alcune questioni combinatorie nello studio delle strutture geometriche finite,* Colloquio Intern. sulle Teorie Combinatorie (Atti dei Convegni Lincei, 17) II, (1976), 423-431.

[4] Barlotti A., *Finite geometries and designs,* in Surveys in Combinatorics, 1987 (Ed. C. Whitehead) LMS Lecture Note series **123** (1987) pp. 1-11.

[5] Bose R.C., *On the application of the properties of Galois fields to the problem of the construction of hyper Graeco-Latin squares,* Sankhya, **3**, (1938), 323-338.

[6] Bose R.C., *Mathematical theory of the symmetrical factorial design,* Sankhya **8**, (1947) 107-166.

[7] Bose R.C., *The designs of experiments,* Presidential Address, Section of Statistics, Proc. 34th Indian Sci. Congress (1947), 1-25,.

[8] Bose R.C., *On some connection between the design of experiments and information theory,* Bull. Intern. Statistical Institute 38, part IV, Tokyo, (1961), 257-271.

[9] Bose R.C., *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs,* Pacific J. Math. **13**, (1963), 389-419.

[10] Bose R.C., *On a representation of Hughes Planes,* Proc. of the International Conference on Projective Planes, Washington State University Press, (1973), 27-70.

[11] Bose R.C., *Graphs and designs,* In Barlotti A. (ed.). Finite geometric structures and their applications. II Ciclo C.I.M.E. 1972. Roma, Ediz. Cremonese, 1973.

[12] Bose R.C., *Autobiography of a Mathematical Statistician,* nel volume The Making of Statisticians, J. Gani Editor, Springer-Verl., (1982), 83-97.

[13] Bose R.C., Barlotti A., *Linear representation of a class of projective planes in a four dimensional projective space,* Ann. Mat. Pura Appl. Ser. 4, **88**, (1971), 9-32.

[14] Bose R.C., Chakravarti I.M., Knuth D.E., *On methods of constructing sets of mutually orthogonal Latin squares using a computer,*

I, Technometrics **2**, (1960), 507-510. II, Technometrics **3**, (1961), 111-117.

[15] Bose R.C., Manvel B., *Introduction to Combinatorial Theory,* New York, J. Wiley & Sons, 1984.

[16] Bose R.C., Nair K.R., *On complete sets of latin squares,* Sankhya **5**, (1941), 361-382.

[17] Bose R.C., Shrikhande S.S., *On the falsity of Euler's conjecture about the non existence of two orthogonal Latin squares of order 4t+2,* Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **46**, (1959), 734-737.

[18] Bose R.C., Shrikhande S.S., *On the construction of sets of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of a conjecture of Euler,* Trans. Am. Math. Soc. **95**, (1960), 191-209.

[19] Bose R.C., Shrikhande S.S., Parker E.T., *Further results on orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture,* Canad. J. Math. **12**, (1960), 189-203.

[20] Bruck R.H., Bose R.C., *The construction of translation planes from projective spaces,* J. Algebra **1**, (1964), 1-18.

[21] Bruck R.H., Bose R.C., *Linear representations of projective planes in projective spaces,* J. Algebra **4**, (1966), 117-172.

[22] Casaglia I., *Some block designs associated with quadrics of $PG(4,q)$ and $PG(5,q)$,* J. Statist. Plann. Inference. **21**, (1989), 265-272.

[23] Dembowski P., *Finite geometries,* Berlin-Heidelberg-New York, Springer Ver., 1968.

[24] Enriques F., Chisini O., *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche,* Vol. I. Bologna, N. Zanichelli Ed., 1915.

[25] Higman D.G., *Partial geometries, generalized quadrangles and strongly regular graphs,* In Atti del Convegno di Geometria Combinatoria e sue applicazioni, Perugia (1971), 263-293.

[26] Hill R., *On the largest size of cap in $S_{5,3}$,* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. **54**, (1973), 378-384.

[27] Hill R., *A first course in coding theory,* Oxford, Clarendon Press, 1986.

[28] Hirschfeld J.W.P., *Projective geometries over finite fields,* Oxford, Clarendon Press, 1979.

[29] Hirschfeld J.W.P., *Finite projective spaces of three dimension,* Oxford, Clarendon Press, 1985.

[30] Höhler P., *Eigenschaften von vollständigen Systemen orthogonaler lateinischer Quadrate, die bestimmte affine Ebenen repräsentieren,* J. of Geometry, **2**, (1972), 161-174.

[31] Kustaanheimo P., *A note on a finite approximation of the Euclidean plane geometry,* Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys. Math., **15**, n. 19, (1950).

[32] Pellegrino G., *Sulle calotte massime dello spazio $S_{4,3}$,* Atti Acc. Sci. Lett. Palermo (4) **34**, (1976), 297-328.

[33] Pickert G., *Projektive Ebenen,* Berlin-Heidelberg-New York, Springer Verl., 1975.

[34] Qvist B., *Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane,* Ann. Acad. Sci. Fenn. n. **134**, (1952), 1-27.

[35] Segre B., *Sulle ovali nei piani lineari finiti,* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **17**, (1954), 141-142.

[36] Segre B., *Ovals in a finite projective plane,* Canad. J. Math. **7**, (1955), 414-416.

[37] Segre B., *Lectures on modern geometry,* Roma, Ed. Cremonese 1961.

[38] Segre B., *Teoria di Galois, fibrazioni proiettive e geometrie non desarguesiane,* Ann. Mat. Pura Appl. **64**, (1964), 1-76.

[39] Segre B., *Introduction to Galois geometries,* Mem. Accad. Naz. Lincei **8**, (1967), 133-236.

[40] Segre C., *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici,* Math. Annalen **40**, (1891) 413-467.

[41] Seiden E., *A theorem in finite projective geometry and an application to statistics,* Proc. Amer. Math. Soc. **1**, (1950), 282-286.

[42] Srivastava J.N., et al. (Editors), *A survey of Combinatorial Theory,* (volume dedicato ad R.C. Bose nel suo settantesimo compleanno), North Holland Publ. Co., (1973).

[43] Vecchi I., *Some results on coverings of Galois spaces with ovoids and related BIB-designs,* J. Statist. Plann. Inference **10**, (1984), 219-225.

Dipartimento di Matematica "U. Dini"
V.le Morgagni, 67/a
50134 Firenze (Italy)