

GRAFI IPERBOLICI E LORO RADICI

ANNA FRANCHETTA (Roma) (*)

Aim of this paper is to classify hyperbolic graphs and to work out some properties of their roots in order to give counterexamples to a conjecture by Kac about Schur roots.

Introduzione.

In una serie di articoli pubblicati fra il 1980 e il 1982, V. Kac si occupa di rappresentazioni di quivers e delle relazioni fra questa teoria e la teoria degli invarianti. Ottiene, fra gli altri risultati, una descrizione dei vettori dimensione di rappresentazioni indecomponibili per quivers qualunque, e la valutazione del "numero" di parametri da cui dipendono le rappresentazioni indecomponibili di data dimensione; generalizza così ai quivers wild risultati ormai classici relativi ai quivers finiti e tame dovuti a Gabriel, Donovan, Freislich e Nazarova. Nei suddetti articoli sono inoltre poste numerose questioni e congetture che sono state e sono tuttora studiate da diversi autori. In particolare, in [5] H. Kraft e Ch. Riedtmann forniscono una riesposizione dei risultati fondamentali ottenuti in [2], [3] e [4], precisando ed evidenziando l'aspetto geometrico in essi contenuto. Successivamente, L. Le Bruyn si occupa di una delle congetture poste

(*) Entrato in redazione il 10 aprile 1990

da Kac riguardante particolari vettori dimensione di rappresentazioni indecomponibili, le cosiddette radici di Schur. In [6] si prova che tale congettura, verificata dallo stesso Kac per i grafi finiti e tame, è falsa in generale, e se ne portano alcuni controesempi.

Nella presente nota mi occupo di due problemi connessi a quanto fin qui detto. Negli articoli di Kac si definiscono i grafi iperbolici, sostanzialmente come grafi minimali non tame; ne vengono evidenziate alcune proprietà che in un certo senso li avvicinano ai grafi finiti e tame e ne vengono dati pochi esempi in [4]. Mi sono quindi posta il problema di individuare tutti i grafi iperbolici. Inoltre, poichè i controesempi forniti in [6] alla congettura di Kac sono non iperbolici, si poneva in maniera naturale la domanda se la congettura fosse o meno valida per i grafici iperbolici. A questo secondo problema ho dato risposta negativa, fornendo dei controesempi iperbolici.

Il lavoro è diviso in 4 paragrafi.

Nel paragrafo 1 do le definizioni fondamentali e richiamo, raggruppandoli, vari risultati enucleati da [2], [3], [4]: ciò sia perchè utile per il seguito, sia per dare un'idea generale della situazione in cui si inquadra il problema di cui mi occupo. In questo paragrafo, come nei successivi, sono contenuti alcuni esempi, controesempi ed osservazioni che spesso negli articoli a cui faccio riferimento vengono sottointesi, ma che costa fatica ricostruire a chi si occupi di questi problemi. Per quanto riguarda le dimostrazioni, la teoria generale delle radici dei grafi e le basi geometriche su cui poggiano certe definizioni e risultati, si rimanda a [2] [3], [4] e [5].

Nel paragrafo 2, con semplici considerazioni di natura combinatoria, si arriva alla classificazione dei grafi iperbolici (cfr. teoremi 2.1 e 2.2), di cui in Appendice si dà la tavola completa (cfr. Tav. II).

Nel paragrafo 3 si studiano e si individuano alcune proprietà di decomponibilità delle radici in somma di vettori positivi soddisfacenti delle condizioni sulla forma bilineare di Ringel del grafo: tali decomposizioni sono quelle che intervengono nella congettura in esame.

Nel paragrafo 4, infine, si affronta la congettura di Kac per i grafi iperbolici; al riguardo si prova che ci sono radici di Schur "decomponibili" in somma di vettori positivi, fornendone alcuni esempi.

1. Preliminari.

Sia Q un grafo connesso con un numero finito n di punti che indicheremo con $1, 2, \dots, n$, ed un insieme finito di lati (eventualmente multipli o cappi). Indicati con $\alpha_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, $i = 1, \dots, n$, gli elementi della base canonica di \mathbb{Z}^n , si definisce la *forma bilineare di Tits*:

$$(\alpha_i, \alpha_i) = 1 - r_{ii}$$

$$(\alpha_i, \alpha_j) = -\frac{1}{2}r_{ij}$$

dove si è indicato con r_{ii} il numero di cappi in i e con r_{ij} il numero di lati fra i e j . A tale forma bilineare simmetrica resta associata la *forma quadratica di Tits*:

$$q_Q(\alpha) = \sum_i a_i^2 - \sum_{i,j} r_{ij} a_i a_j, \text{ se } \alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

È noto che

TEOREMA 1.1. *Sia Q un grafo connesso; si ha:*

- (a) q_Q è definita positiva se e solo se Q è un grafo di Dynkin;
- (b) q_Q è semidefinita positiva se e solo se Q è un grafo di Dynkin generalizzato.

Dimostrazione. cfr. [1], Prop. 2.1 pag. 26 e Nota 2 pag. 30.

In Tavola I dell'Appendice diamo un elenco dei grafi in (a) e in (b).

Sia ora dato un campo k algebricamente chiuso e sia Ω un orientamento dei lati di Q . La coppia (Q, Ω) sarà detta *grafo orientato* o *quiver di rango n* . Dare una *rappresentazione* (V, φ) di Q su k significa dare una famiglia di k -spazi vettoriali $\{V_i\}_{i=1, \dots, n}$, e una famiglia $\varphi = \{\varphi_{ij}\}$ di applicazioni k -lineari, $\varphi_{ij} : V_i \rightarrow V_j$ per ogni freccia $i \rightarrow j$. La n -pla di numeri naturali $(\dim_k V_1, \dots, \dim_k V_n)$ si chiama *dimensione* della rappresentazione (V, φ) , e nel seguito si intenderà che $V_i = k^{\dim V_i}$. È chiaro che, date due rappresentazioni, se ne può considerare la somma diretta. Una rappresentazione si dice *indecomponibile* se non è nulla e non è somma diretta di due rappresentazioni non banali. Un *morfismo* fra due rappresentazioni (V, φ) e (W, ψ) è una famiglia $(\alpha_i)_{i=1, \dots, n}$ di applicazioni k -lineari

$\alpha_i : V_i \rightarrow W_i$ tali che $\psi_{ij}\alpha_i = \alpha_j\varphi_{ij}$. Lo spazio delle rappresentazioni di dimensione $\alpha = (a(1), \dots, a(n))$ è la varietà affine

$$R(Q, \alpha) = \prod_{i \rightarrow j} \text{Hom}_k(k^{a(i)}, k^{a(j)})$$

Su tale varietà affine agisce il gruppo algebrico $GL(\alpha) = \bigoplus_{i=1, \dots, n} GL(a(i))$: se $g = \{g_i\}_{i=1, \dots, n} \in GL(\alpha)$ e (V, φ) è una rappresentazione in $R(Q, \alpha)$, l'azione di g è definita da:

$$g\varphi = \{\psi_{ij}\} \text{ con } \psi_{ij} = g_j\varphi_{ij}g_i^{-1} \text{ per ogni freccia } i \rightarrow j.$$

Inoltre è chiaro che il sottogruppo C di $GL(\alpha)$ delle trasformazioni scalari del tipo (a, \dots, a) con $a \in k^*$ agisce banalmente su $R(Q, \alpha)$, per cui resta indotta su tale varietà affine una azione del gruppo quoziente $G(\alpha) = GL(\alpha)/C$; due rappresentazioni di dimensione α sono *isomorfe* se appartengono alla stessa orbita modulo $G(\alpha)$.

Lo studio delle rappresentazioni di un quiver si basa sulla conoscenza delle sue rappresentazioni indecomponibili; Q si dirà di *tipo finito* se, a meno di isomorfismo, ha un numero finito di rappresentazioni indecomponibili; si dirà di *tipo tame* (o *euclideo*) se le famiglie di rappresentazioni indecomponibili di uguale dimensione dipendono al più da un parametro (e c'è una famiglia dipendente esattamente da un parametro); si dirà infine di *tipo wild* se non è di uno dei tipi precedenti. Alcuni dei problemi fondamentali nello studio delle rappresentazioni di un quiver sono allora i seguenti:

- 1) determinare quali sono i quiver di tipo finito e tame;
- 2) determinare quali sono gli $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ che sono vettori dimensione di rappresentazioni indecomponibili;
- 3) in relazione ad un α che sia vettore dimensione di rappresentazioni indecomponibili, determinare il "numero" di tali rappresentazioni (a meno di isomorfismo);
- 4) determinare, dato un qualunque $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, come si decompone la "generica" rappresentazione di dimensione α ;
- 5) determinare i vettori dimensione di rappresentazioni (necessariamente indecomponibili) con endomorfo banale (cosidette *rappresentazioni di Schur*), che, come si vedrà, hanno un ruolo particolare nello studio delle rappresentazioni di Q .

6) dare una caratterizzazione puramente aritmetica dei vettori di cui sopra.

7) determinare, fra i quiver di tipo wild, famiglie di quiver "classificabili" (ad es. quiver *iperbolici*, cfr. 2), e in tali famiglie studiare i problemi di cui ai punti precedenti.

La risposta ai problemi di cui in 1), 2) e 3) è contenuta nel successivo Teorema 1.2, i problemi di cui in 4), 5) e 6) hanno solo risposte parziali relative a casi particolari, per cui sono tuttora oggetto di studio. per esporre l'enunciato del Teorema 1.2 introduciamo le nozioni che seguono.

Dato un grafo Q , sia i un suo punto da cui non partono cappi, e sia α_i il relativo vettore fondamentale di Z^n ; si definisce la *riflessione fondamentale* $r_i \in \text{Aut}(Z^n)$:

$$r_i(\alpha) = \alpha - 2(\alpha, \alpha_i)\alpha_i.$$

Si costruisce poi il *gruppo di Weyl* $W = W(Q)$ come il sottogruppo di $\text{Aut}(Z^n)$ generato dalle riflessioni fondamentali; si vede subito che la forma bilineare di Tits è W -invariante. Indicato con Π l'insieme dei vettori fondamentali α_i relativi a vertici i da cui non partono cappi, si individua il sottoinsieme di Z^n

$$\Delta^{re} = \{w(\alpha_i)/w \in W, \alpha_i \in \Pi\}$$

i cui elementi si chiamano *radici reali* di Q , mentre gli elementi di Π si dicono *radici fondamentali*. Inoltre, considerato l'insieme

$$M = \{\alpha \in Z_+^n / (\alpha, \alpha_i) \leq 0 \text{ per ogni } \alpha_i \in \Pi \text{ e } \text{supp } \alpha \text{ è connesso}\}$$

si costruisce il sottoinsieme di Z^n

$$\Delta^{im} = \{w(\alpha)/w \in W, \pm\alpha \in M\}$$

i cui elementi si dicono *radici immaginarie* di Q , mentre M stesso si chiama *sottoinsieme fondamentale*. L'insieme

$$\Delta = \Delta^{re} \cup \Delta^{im}$$

si dice *insieme delle radici di Q* e l'insieme

$$\Delta_+ = \Delta_+^{re} \cup \Delta_+^{im}$$

si dice *insieme delle radici positive*.

Osserviamo che, fra le varie proprietà delle radici, di cui ricorderemo via via quelle che utilizzeremo, c'è la seguente: se $\alpha \in \Delta^{re}$, è $q_Q(\alpha) = 1$, mentre se $\alpha \in \Delta^{im}$, è $q_Q(\alpha) \leq 0$.

Possiamo ora enunciare il

TEOREMA 1.2. *Sia (Q, Ω) un quiver e Q il suo grafo soggiacente;*

(1) (P. Gabriel) (Q, Ω) è di tipo finito se e solo se Q è un grafo di Dynkin; in tal caso esiste una rappresentazione indecomponibile di dimensione α se e solo se $q_Q(\alpha) = 1$, e tale rappresentazione è unica, a meno di isomorfismo;

(2) (Donovan-Freislich-Nazarova) (Q, Ω) è di tipo tame se e solo se Q è un grafo di Dynkin generalizzato; esiste una rappresentazione indecomponibile di dimensione α se e solo se $q_Q(\alpha) = 1$ oppure $q_Q(\alpha) = 0$: nel primo caso la rappresentazione è unica mentre nel secondo ne esiste una famiglia infinita dipendente da un parametro (sempre a meno di isomorfismo);

(3) (V. Kac) In generale esiste una rappresentazione indecomponibile di dimensione α se e solo se $\alpha \in \Delta_+$; se $\alpha \in \Delta_+^{re}$ tale rappresentazione è unica, mentre se $\alpha \in \Delta_+^{im}$ ne esiste una famiglia infinita dipendente da $\mu(\alpha) = 1 - q_Q^{(\alpha)}$ parametri.

Vogliamo ora considerare il problema 4). Per le dimostrazioni dei risultati che richiamiamo qui di seguito si rimanda a ([4], pagg. 96-98) e ([5], pagg. 121, 123).

Si vede facilmente che

LEMMA 1.3. *Se $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, esiste una unica decomposizione $\alpha = \beta_1 + \dots + \beta_s$ in somma di vettori positivi in modo che l'insieme*

$\{V \in R(Q, \alpha): V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s, V_i \text{ indecomponibile di dimensione } \beta_i\}$

contenga un sottoinsieme denso in $R(Q, \alpha)$.

Ciò significa che la "generica" rappresentazione di dimensione α si decompone nella somma diretta di rappresentazioni indecomponibili di dimensioni β_1, \dots, β_s . Allora

DEFINIZIONE *La decomposizione di cui nel Lemma 1.3 si dice*

decomposizione generica (o canonica) del vettore $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Si prova inoltre che:

PROPOSIZIONE 1.4. *Se $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$ è generica, i sommandi della decomposizione, oltre ad essere indecomponibili, sono tali che $\text{End}_k V_i = k$, $i = 1, \dots, s$.*

Hanno quindi un ruolo fondamentale nel problema in esame le rappresentazioni indecomponibili con endomorfo banale, che si chiamano *rappresentazioni di Schur*. Una radice $\alpha \in \Delta_+$ si dice *radice di Schur* se esiste una rappresentazione di Schur di dimensione α . È opportuno puntualizzare quanto detto enunciando la

PROPOSIZIONE 1.5. (1) *Se $\alpha = \beta_1 + \dots + \beta_s$ è la decomposizione canonica del vettore α , le β_i sono radici di Schur;*

(2) *Sono inoltre equivalenti:*

(a) *α è radice di Schur;*

(b) *α è genericamente indecomponibile;*

(c) *la "generica" rappresentazione di dimensione α è indecomponibile;*

È utile osservare esplicitamente i fatti seguenti:

– la (1) non si inverte: non è vero cioè che la somma di radici di Schur è decomposizione canonica del vettore somma (cfr. [K-R. pag; 122, remark (b)]);

– se α è una radice, ma non è di Schur, l'insieme della rappresentazione indecomponibili di dimensione α è non vuoto, ma non contiene un sottoinsieme denso in $\mathbb{R}(Q, \alpha)$;

– la nozione di rappresentazione di Schur riguarda gli endomorfismi di una rappresentazione, e sono dunque coinvolte le mappe della rappresentazione; ciò implica che tale nozione, così come quella di radice di Schur e di decomposizione canonica di un vettore sono legate all'orientamento Ω fissato sul grafo Q : una radice può essere di Schur per un orientamento, e non esserlo per un altro (di nuovo cfr. [5], pag. 122, remark (b)).

Vogliamo ora brevemente accennare ad alcuni risultati riguardanti i problemi 4), 5) e 6), iniziando con l'introduzione la *forma bilineare*

di Ringel, che gioca un ruolo fondamentale in ciò che segue.

Dato il quiver (Q, Ω) tale forma bilineare è definita ponendo

$$R(\alpha_i, \alpha_i) = 1 - \#\{\text{cappi in } i\}$$

$$R(\alpha_i, \alpha_j) = -\#\{\text{frecche da } i \text{ a } j\} \text{ se } i \neq j$$

È chiaro che questa forma bilineare è generalmente non simmetrica, dipende strettamente da Ω , ed è legata alla forma di Tits dalla relazione

$$\frac{1}{2}[R(\alpha_i, \alpha_j) + R(\alpha_j, \alpha_i)] = (\alpha_i, \alpha_j) \text{ per } i \neq j, \quad R(\alpha_i, \alpha_i) = (\alpha_i, \alpha_i).$$

Vale la seguente

PROPOSIZIONE 1.6. (1) *La decomposizione $\alpha = \beta_1 + \dots + \beta_s$ è generica se e solo se*

(a) *le β_i sono radici di Schur, per $i = 1, \dots, s$;*

(b) *esistono rappresentazioni di Schur V_i , di dimensione β_i , $i = 1, \dots, s$ tali che $\text{Ext}(V_i, V_j) = 0$ per $i \neq j$;*

(2) *se $\alpha = \beta_1 + \dots + \beta_s$ è generica, allora è $R(\beta_i, \beta_j) \geq 0$ per $i \neq j$;*

(3) *se (Q, Ω) è di tipo finito, euclideo privo di circuiti orientati, o di rango due (due punti, n frecce), la (2) si inverte: esiste cioè una unica decomposizione soddisfacente alla condizione $R(\beta_i, \beta_j) \geq 0$ per $i \neq j$, ed essa deve allora coincidere con la decomposizione canonica.*

Osserviamo che per la (3) della precedente Proposizione 1.6 si otterrebbe, per i quiver di cui all'enunciato, una descrizione puramente aritmetica della decomposizione generica di un qualunque vettore positivo, una volta che fossero note le radici di Schur del quiver.

Diamo poi la

DEFINIZIONE [4, pag. 98] *Un vettore $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n - \{0\}$ si dice indecomponibile se non si può scrivere come somma $\alpha = \beta + \gamma$ con β e γ in $\mathbb{Z}_+^n - \{0\}$ tali che $R(\beta, \gamma) \geq 0$ e $R(\gamma, \beta) \geq 0$.*

Si ha:

PROPOSIZIONE 1.7. [4, pag. 98] (1) Se α è indecomponibile, allora α è una radice di Schur;

(2) se (Q, Ω) è di tipo finito, euclideo o di rango due, la (1) si inverte.

Si ottiene allora la seguente descrizione, puramente aritmetica, delle radici di Schur di tali quiver: α è radice di Schur se e solo se per ogni decomposizione $\alpha = \beta + \gamma$ in somma di vettori positivi, è $R(\beta, \gamma) \leq 0$ oppure $R(\gamma, \beta) \leq 0$.

La validità di (3) nella Proposizione 1.6 e di (2) nella Proposizione 1.7 portarono alla formulazione delle seguenti congetture:

Congettura 1 (V. Kac) - Se (Q, Ω) non ha circuiti orientati, ogni $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ ammette una unica decomposizione $\alpha = \beta_1 + \dots + \beta_s$ in cui $R(\beta_i, \beta_j) \geq 0$ per $i \neq j$ (che coincide allora con la decomposizione canonica).

Congettura 2 (V. Kac) Se α è una radice di Schur, allora α è indecomponibile.

Alla seconda congettura sono stati dati controesempi in [6]. Nel paragrafo 4 ci occuperemo ancora di tale congettura per fornirne controesempi in una notevole classe di grafi.

2. Grafi iperbolici: classificazione.

DEFINIZIONE Un grafo connesso Q si dice iperbolico se tutti i suoi sottografi propri connessi sono finiti o tame, ed esso stesso non è finito nè tame.

Volendo dare una classificazione dei grafi iperbolici conviene osservare che, se un tale grafo contiene vertici con un cappio, esso è necessariamente di uno dei tipi in (Tav. II, 1).

D'ora in avanti ci riferiremo perciò solo a grafi privi di cappi.

A priori si possono dividere i grafi iperbolici nei due tipi:

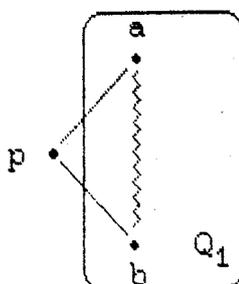
(F) - Ogni sottografo proprio connesso di Q è di tipo finito;

(E) - Q contiene un sottografo proprio connesso di tipo tame.

Nel seguito useremo la seguente notazione: se p e q sono vertici di Q , $p \sim q$ significa che esiste un cammino in Q fra p e q . Inoltre, un vertice p si dirà n -valente se per p passano n lati. Possiamo ora dare la classificazione dei grafi iperbolici.

PROPOSIZIONE 2.1. *Gli unici grafi di tipo (F) sono i grafi con due punti connessi da m lati, $m \geq 3$ (Tav. II, 2).*

Dimostrazione. È evidente che i grafi di cui all'enunciato sono di tipo (F). Sia ora Q di tipo (F) con $|Q| > 2$. Osserviamo che Q non può avere lati multipli; inoltre, essendo connesso, contiene un sottografo Q_1 connesso massimale, cioè tale che $Q = Q_1 \cup \{p\}$ con p punto connesso a Q_1 da un solo lato: in caso contrario conterrebbe, propriamente o non, una configurazione del tipo



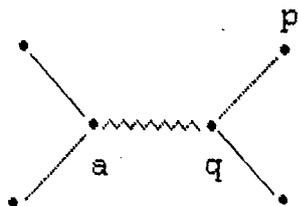
dove a e b sono vertici distinti in Q_1 , connessi da un cammino in Q_1 ; ciò è ovviamente assurdo.

Distinguiamo ora i seguenti casi:

a) $Q_1 = A_n$, $n \geq 2$. Si vede subito che in tal caso si ottengono grafi finiti o contenenti sottografi tame.

b) $Q_1 \neq A_n$. In tal caso p è connesso ad un vertice q di Q_1 potendosi avere tre casi:

- 1) q è trivalente; in tal caso in Q c'è un sottografo di tipo \tilde{D}_4 , assurdo;
- 2) q è bivalente; in tal caso in Q ci sarebbe un sottografo di tipo



con a trivalente, il che è assurdo.

3) q è univalente; di nuovo si vede subito che si ottengono grafi finiti o contenenti grafi tame.

L'asserto resta così provato.

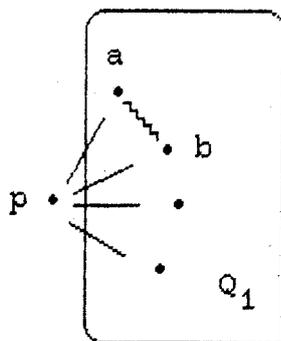
TEOREMA 2.2. *I grafi iperbolici sono dei tipi elencati nella Tavola II.*

Dimostrazione. Restano, dopo la Proposizione 2.1, da classificare i grafi di tipo (E). Indichiamo con Q_1 un sottografo connesso euclideo di Q . Iniziamo con le seguenti semplici osservazioni: Q_1 è massimale, cioè $Q = Q_1 \cup \{p\}$, con p punto connesso a Q_1 . Inoltre è $|Q| \geq 3$ e, se $|Q| > 3$, non ci possono essere lati multipli.

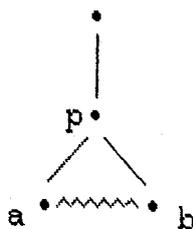
Passiamo ora all'esame dei vari casi.

1) Sia $|Q| = 3$; allora $|Q_1| = 2$ e $Q_1 = \tilde{A}_1$. Ne segue che Q è uno dei tipi in (Tav. II, 3).

2) Sia $|Q| > 3$; per quanto osservato prima, p non può essere connesso a Q_1 con un lato multiplo. Se poi si avesse una configurazione del tipo

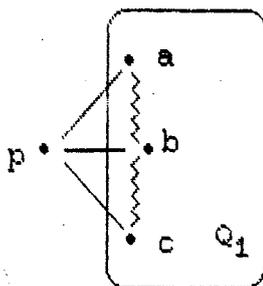


Q conterebbe il sottografo proprio



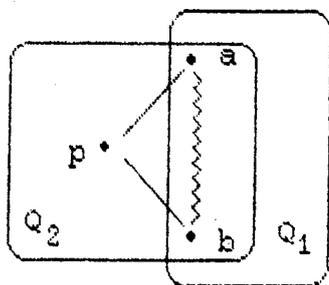
che non è finito nè tame; Ciò mostra che p non può essere connesso a Q_1 da più di tre lati. Esaminiamo i casi possibili.

a) Sia p connesso a Q_1 da tre lati:



Se esistesse in Q_1 un punto q distinto da a , b e c , di nuovo si troverebbe un sottografo del tipo di cui in 2); d'altra parte, essendo Q_1 tame, il cammino $a \sim c$ deve essere un circuito, cioè $Q_1 = \tilde{A}_2$ e quindi Q è il grafo in (Tav. II, 4).

b) Sia p connesso a Q_1 da due lati:



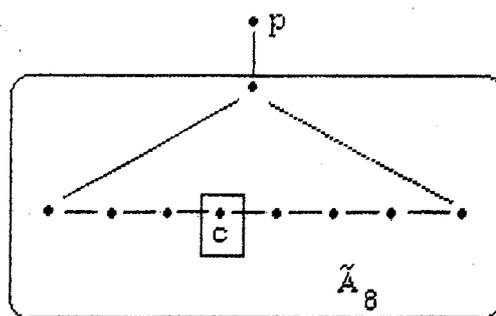
Essendo Q_2 un sottografo di tipo \tilde{A}_n , $n \geq 2$ in Q_1 , al di fuori del cammino $a \sim b$ c'è uno e un solo punto q . Di nuovo si presentano vari casi:

b₁) q è connesso a Q_2 da un solo lato. Essendo Q_1 di tipo tame, l'unica possibilità è che sia $Q_1 = \tilde{E}_7$, e quindi Q come in (Tav. II, 5).

b₂) q è connesso a Q_2 da due lati. Per $n = 2$ e $n = 3$ si ottengono i grafi iperbolici in (Tav. II, 6), mentre per $n > 3$, Q contiene uno dei sottografi in (Tav. II, 7), assurdo.

b₃) q è connesso a Q_2 da tre o più lati: si ricade nei casi già esaminati in 2), a).

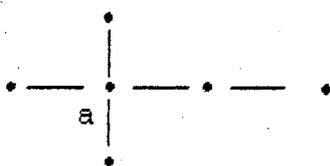
c) Supponiamo che p sia connesso ad un solo punto a di Q_1 . Se $Q_1 = \tilde{A}_n$, per $n = 2, \dots, 6$ si ottengono i grafi in (Tav. II, 7); per $n = 7$ si riottiene il grafo in (Tav. II, 5), mentre per $n = 8$, Q contiene il sottografo $Q - \{c\}$



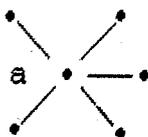
che non è finito nè tame. Ovviamente la stessa situazione si presenta per $n > 8$.

Sia ora $Q_1 \neq \tilde{A}_n$. Di nuovo esaminiamo le varie eventualità.

c₁) a è tri- o quadrivalente; ciò è impossibile se $|Q_1| > 5$, poichè Q conterebbe il grafo



che è iperbolico (Tav. II, 8), mentre per $|Q_1| = 5$ si ottiene il grafo precedente, oppure



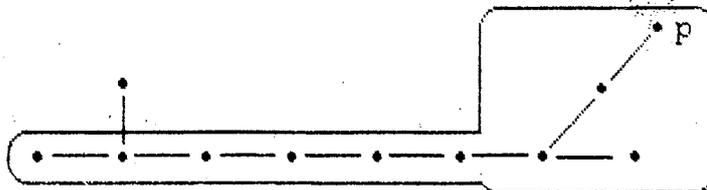
(Tav. II, 9);

c₂) a è bivalente; è facile verificare, caso per caso, che si ottengono sempre grafi non iperbolici tranne che per $Q_1 = \tilde{E}_8$ (Tav. II, 10);

c_3) a è univalente; di nuovo conviene procedere all'esame caso per caso:

$$-Q_1 = \tilde{D}_n;$$

$n \geq 9$ non dà luogo grafi iperbolici



(il sottografo evidenziato non è finito nè tame);

$n = 5, 6, 7$; si ottengono i grafi in (Tav. II, 11, 12, 13);

$n = 7$; si riottiene il grafo in (Tav. II, 10);

$n = 4$; si riottiene il grafo in (Tav. II, 8).

$-Q_1 = \tilde{E}_n$, $n = 6, 7, 8$; si ottengono i grafi in (Tav. II, 14, 15, 16).

3. Grafi iperbolici: radici.

In questo paragrafo vogliamo dare alcuni risultati riguardanti le radici dei grafi iperbolici, utili per lo studio della decomposizione generica di un vettore $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Alcune delle proprietà che enunceremo hanno validità più generale ma per semplicità di esposizione e di dimostrazione, a meno di avviso contrario, si intenderà che Q è un grafo iperbolico.

Iniziamo col richiamare la seguente proposizione che suggerisce la possibilità che i grafi iperbolici siano, tra i grafi wild, i più abordabili relativamente ad alcuni dei problemi riguardanti le radici.

PROPOSIZIONE 3.1. [4, pag. 78] *Sia Q un grafo finito, tame o iperbolico; allora*

$$\Delta_+^{re} = \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n / (\alpha, \alpha) = 1\}$$

$$\Delta_+^{im} = \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n / (\alpha, \alpha) \leq 0\}.$$

Osserviamo che in generale valgono solo le inclusioni: \subseteq in entrambe le relazioni precedenti.

Ricordato che, secondo le notazioni introdotte in precedenza, indichiamo con $W = W(Q)$ il gruppo di Weyl di Q , vale il

LEMMA 3.2. (1) Se $\alpha \in Z^n$ e $(\alpha, \alpha) \leq 1$, allora $\alpha \in Z_+^n$, oppure $-\alpha \in Z_+^n$;

(2) $\alpha \in \Delta_+^{im} \Leftrightarrow w(\alpha) \in \Delta_+^{im}$, per ogni $w \in W$;

(3) $(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha$ è trasformato mediante il gruppo di Weyl di un vettore a supporto su un sottografo tame di Q ;

(4) Δ_+^{im} è chiuso rispetto alla somma.

Dimostrazione. (1) e (3) - cfr. [2, lemmi 1.9 e 1.10 pag. 67].

(2) cfr. [4, pag. 76].

(4) Siano α e $\beta \in \Delta_+^{im}$; proviamo che $(\alpha, \beta) \leq 0$. Se β è nel sottoinsieme fondamentale M , è $(\alpha, \beta) \leq 0$ per ogni $\alpha \in Z_+^n$. Se invece $\beta \in \Delta_+^{im} - M$, sia $v \in W$ tale che $v(\beta) \in M$; per la (2) è ancora $v(\alpha) \in \Delta_+^{im}$, per cui $(\alpha, \beta) = (v(\alpha), v(\beta)) \leq 0$. Da questa osservazione segue allora che, nelle ipotesi, è

$$(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = (\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + 2(\alpha, \beta) \leq 0,$$

cioè $\alpha + \beta \in \Delta_+^{im}$ per la Proposizione 3.1, come si voleva dimostrare.

Nel seguito useremo la seguente terminologia: una decomposizione di un vettore positivo α in somma di vettori positivi $\alpha = \beta_1 + \dots + \beta_s$ sarà detta *T-decomposizione* se $(\beta_i, \beta_j) \geq 0$ per $i \neq j$, mentre si parlerà di *R-decomposizione* (o semplicemente *decomposizione*, secondo la terminologia già introdotta nel paragrafo 1) se nella precedente somma è $R(\beta_i, \beta_j) \leq 0$ per $i \neq j$.

Ossservazioni. È opportuno fare le seguenti osservazioni, rimandando al paragrafo successivo per alcuni semplici esempi e controesempi in merito:

(1) Data la relazione fra le due forme bilineari T ed R , è chiaro che, scelto un orientamento Ω su Q , una R -decomposizione è anche una T -decomposizione, mentre non vale il viceversa;

(2) una R -decomposizione dipende dall'orientamento, una T -decomposizione no;

(3) la decomposizione generica è una R -decomposizione, quindi è una T -decomposizione.

LEMMA 3.3. *Sia α una radice e $\alpha = \beta_1 + \dots + \beta_s$ una T -decomposizione con $s \geq 2$. Allora almeno una delle β_i è una radice immaginaria.*

Dimostrazione. Ovvio.

LEMMA 3.4. *Sia $\alpha = \beta_1 + \dots + \beta_s$ una T -decomposizione con $s \geq 2$. Se $\beta_i \in M$, è $\text{supp } \beta_i = \text{supp } \alpha$.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che $\text{supp } \beta_i \supseteq \text{supp } \beta_j$ per $j = 1, \dots, n$. Supposto $i = 1$, e cioè $\beta_1 \in M$, β_1 ha prodotto scalare negativo con ogni vettore positivo, quindi l'essere quella considerata una T -decomposizione implica $(\beta_1, \beta_j) = 0$ per $j = 2, \dots, n$. Allora, indicata con $\beta_k(h)$ la componente di posto h del vettore β_k , si ha:

$$0 = (\beta_1, \beta_j) = \sum_i \beta_j(i) (\beta_1, \alpha_i) \Rightarrow (\beta_1, \alpha_i) = 0, \forall i \in \text{supp } \beta_j.$$

Sia ora $j \in \{2, \dots, n\}$ tale che esista $i \in \text{supp } \beta_j - \text{supp } \beta_1$. Allora

$$0 = (\beta_1, \alpha_i) = \sum_k \beta_1(k) (\alpha_k, \alpha_i) = \sum_{k \neq i} \beta_1(k) (\alpha_k, \alpha_i)$$

dove almeno per un $k \neq i$, essendo Q connesso, è $(\alpha_k, \alpha_i) \neq 0$, quindi $\beta_1(k) = 0$. Ma allora $\text{supp } \beta_1 \subseteq Q - \{i, k\}$ sarebbe un grafo finito, il che è assurdo.

LEMMA 3.5. *Sia $\alpha = \beta_1 + \dots + \beta_s$ una T -decomposizione con $s \geq 2$ e $(\alpha, \alpha) \neq 0$. Allora per almeno una delle β_i è $(\beta_i, \beta_i) \geq 1$.*

Dimostrazione. Supposto, per assurdo, che sia $\beta_i \in \Delta_+^{im}$ per $i = 1, \dots, s$, per la (4) del Lemma 3.2 è $\alpha \in \Delta_+^{im}$, quindi $(\alpha, \alpha) < 0$. Inoltre, se fosse $(\beta_i, \beta_i) = 0$ per qualche i , agendo mediante un opportuno elemento di W , si potrebbe supporre $\beta_i \in M$ e quindi $\text{supp } \beta_i$ tame (cfr. [5], lemma 1. c) pag. 123); ciò è assurdo per il Lemma 3.4, poichè è $\text{supp } \alpha = Q$. Allora è anche $(\beta_i, \beta_i) < 0$ e $\text{supp } \beta_i = Q$ per ogni $i = 1, \dots, n$. D'altra parte, supposto ad esempio, come è lecito, $\beta_1 \in M$,

si ha, per $j \neq 1$,

$$0 = (\beta_1, \beta_j) = \sum_i \beta_j(i)(\beta_1, \alpha_i) \Rightarrow (\beta_1, \alpha_i) = 0, \forall i \in \text{supp } \beta_j = Q$$

da cui l'assurdo $(\beta_1, \beta_1) = 0$.

COROLLARIO 3.6. *Sia $\alpha \in \Delta_+$ una radice T -decomponibile, con $(\alpha, \alpha) \neq 0$; allora è $\alpha = \beta + \gamma$ con $(\beta, \beta) \leq 0$ e $(\gamma, \gamma) > 0$ e sono possibili due eventualità:*

(1) β è T -decomponibile in somma di radici immaginarie; in tal caso è $(\beta, \beta) = 0$, $(\gamma, \gamma) = 1$, $(\beta, \gamma) = 0$ e dunque è $\alpha \in \Delta_+^{re}$.

(2) β non è T -decomponibile in somma di radici immaginarie.

Dimostrazione. Segue subito dal lemma precedente e dalle proprietà delle T -decomposizioni.

COROLLARIO 3.7. *Se $\alpha \in M$, $(\alpha, \alpha) \neq 0$, allora α è T -indecomponibile.*

Dimostrazione. Supposto $\alpha = \beta + \gamma$ come nel Corollario 3.6, si ha:

$$(\alpha, \gamma) = (\beta, \gamma) + (\gamma, \gamma) > 0,$$

il che contraddice, come più volte osservato, l'essere $\alpha \in M$.

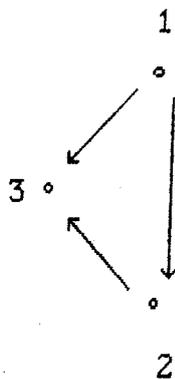
4. Grafi iperbolici: radici di Schur.

In questo paragrafo mostreremo che, con metodi analoghi a quelli usati in [6] si costruiscono controesempi iperbolici alla Congettura 2. Per comodità richiamiamo la congettura in esame:

Congettura. Se α è una radice di Schur, allora è R -indecomponibile.

Iniziamo con alcune osservazioni e richiami.

Osservazione 1. Ricordiamo che, come si è già osservato in precedenza, un vettore $\alpha \in Z_+^n$ può essere T -decomponibile (per ogni orientamento del grafo), ma R -indecomponibile (per un particolare orientamento). Si consideri ad esempio il grafo orientato

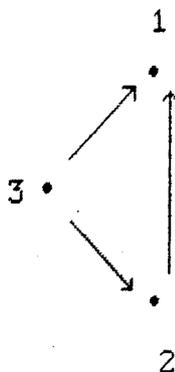


Posto $\alpha = (1, 2, 1)$, $\delta = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, 0)$, è

$$\alpha = \delta + \alpha_2, \quad \text{con } (\delta, \alpha_2) = 0,$$

$$R(\delta, \alpha_2) = 1, \quad R(\alpha_2, \delta) = -1.$$

D'altra parte, se si considera l'orientamento



è $R(\delta, \alpha_2) = R(\alpha_2, \delta) = 0$, il che significa che $\alpha = \delta + \alpha_2$ è anche una R -decomposizione.

Per quanto riguarda le radici di Schur ricordiamo i fatti seguenti:

- (1) Le radici semplici sono di Schur.
- (2) Tutte le radici di un grafo finito sono di Schur, perchè genericamente indecomponibili.
- (3) Se Q è un grafo tame, essendo $\Delta_+^{im} = \{n\delta/n \in \mathbb{N}, \delta \text{ come in Tav. I}\}$, δ è l'unica radice immaginaria di Schur; per quanto riguarda le radici reali, l'essere o no di Schur dipende dall'orientamento.
- (4) Per i grafi wild si ha che sono di Schur tutte le radici del sottoinsieme fondamentale M a supporto non tame (cfr. [5], Teorema 3.3, pag. 124).
- (5) Per i grafi iperbolici ciò significa che sono di Schur tutti gli elementi del sottoinsieme fondamentale a supporto su tutto il grafo.

(6) Se α è radice di Schur a supporto su un sottografo di Q , α è radice di Schur per Q .

(7) Se Q_1 si ottiene da Q per contrazione di un lato, le radici di Schur di Q_1 si estendono in modo ovvio a radici di Schur di Q .

(8) Un modo per costruire radici di Schur è quello che fa uso dei *funtori riflessione* (cfr. [5]-paragrafo 4, n. 4.1); operativamente il procedimento è il seguente: dato il grafo orientato (Q, Ω) , un suo vertice i è una *source* se i è solo punto di partenza di frecce (nessuna vi arriva). Si consideri l'orientamento Ω_1 su Q ottenuto da Ω cambiando solo la direzione delle frecce in i (in tal modo in Ω_1 il vertice i è diventato un *sink*, cioè un vertice che è solo punto di arrivo di frecce). Sia ora $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ un vettore per cui, considerato l'orientamento Ω , sia $\sum \alpha(j) \geq \alpha(i)$, al variare di j fra i vertici di Q per cui esiste una freccia $i \rightarrow j$; si costruisca il vettore $\alpha' = r_i(\alpha)$, che avrà componenti

$$\alpha'(j) = \alpha(j) \text{ per } j \neq i$$

$$\alpha'(i) = \sum_{i \rightarrow j} \alpha(j) - \alpha(i).$$

Ebbene, si prova che: se α è radice di Schur per (Q, Ω) , allora α' è radice di Schur per (Q, Ω_1) .

L'identico procedimento si applica a partire da un sink.

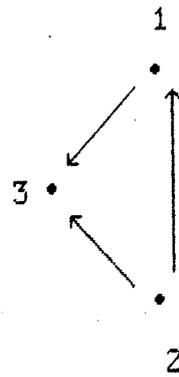
Osservazione 2. Per le proprietà della decomposizione generica di un vettore, e per la relazione che lega le forme bilineari T ed R Valgono le seguenti implicazioni per un $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$:

$$\begin{array}{ccc} \alpha \text{ è } T\text{-indecomponibile} & & \\ \Downarrow & \Rightarrow & \alpha \text{ è radice di Schur.} \\ \alpha \text{ è } R\text{-indecomponibile} & & \end{array}$$

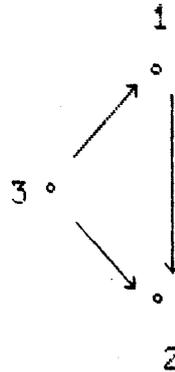
È facile esibire un controesempio alla naturale domanda se valga o meno l'implicazione

$$\alpha \text{ radice di Schur} \Rightarrow \alpha \text{ è } T\text{-indecomponibile.}$$

Considerato, infatti, il grafo orientato



e la radice semplice $\alpha_3 = (0, 0, 1)$, operando con il metodo descritto in (8), rispetto ai vertici 1 e 2 ordinatamente, si ottiene che il vettore $\alpha = (1, 2, 1)$ è radice di Schur per il grafo orientato



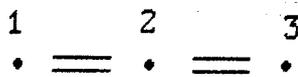
Si è d'altra parte già osservato (cfr. Osservazione 1) che tale vettore ammette la T -decomposizione $\alpha = \delta + \alpha_2$. Osserviamo ancora esplicitamente che, per quest'ultimo orientamento è, come ci si aspetta data la validità della congettura per un grafo tame,

$$R(\delta, \alpha_2) = -1, \quad R(\alpha_2, \delta) = 1,$$

essendo α radice di Schur; l'essere α R -decomponibile rispetto al secondo orientamento considerato nell'Osservazione 1 dipende dal fatto che, rispetto a quell'orientamento, α non è radice di Schur.

Concluderemo questo paragrafo con il controesempio iperbolico alla Congettura 2.

LEMMA 4.1. *Il sottoinsieme fondamentale M per il grafo*

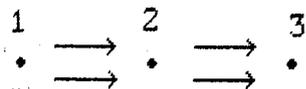


è costituito dai vettori (a, b, c) soddisfacenti alla condizione $\max(\{a, c\} \leq b \leq a + c$. I vettori di M a componenti tutte non nulle sono radici di

Schur R-indecomponibili.

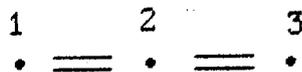
Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di M , dalla (5) di pag. 18 e dal Corollario 3.7.

PROPOSIZIONE 4.2. *Se $\alpha = (a, b, a)$ con $\frac{2}{3}a \leq b < a$, allora α è una radice di Schur per il quiver*

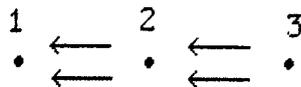


ed è R-decomponibile.

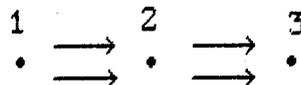
Dimostrazione. È chiaro, per il precedente lemma, che i vettori del tipo (a, b, a) verificanti la limitazione $a \leq b \leq 2a$ sono in M e quindi sono radici di Schur per il grafo



Partiamo ora dall'orientamento Ω di Q :



e applichiamo il procedimento descritto in (8) rispetto ai vertici 1 e 3; si ottiene che il vettore $(2b - a, b, 2b - a)$ è radice di Schur per il grafo orientato



Da $a \leq b$ segue che $2b - a \geq b$, mentre da $b \leq 2a$ segue che $3b + b \leq 3b + 2a$, da cui $\frac{2}{3}(2b - a) \leq b$; ciò significa che il vettore ottenuto per riflessione è di nuovo del tipo (a, b, a) , soddisfacente però le nuove limitazioni $\frac{2}{3}a \leq b \leq a$. Si consideri la decomposizione di un tale vettore nella somma

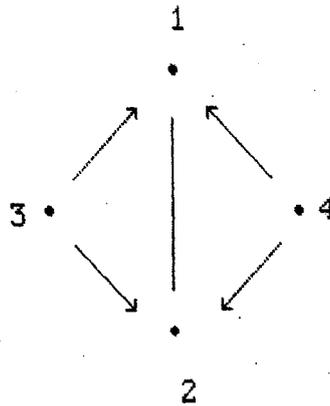
$$(a, b, a) = (a - 1, b, a - 1) + (1, 0, 1);$$

Dato che

$$R((a-1, b, a-1), (1, 0, 1)) = R((1, 0, 1), (a-1, b, a-1)) = 2(a-1) - 2b,$$

la decomposizione considerata è una R -decomposizione non appena sia $a > b$.

Osservazione 3. Per quanto ricordato in (7) si ha che analogo controesempio alla Congettura si ottiene per il quiver



di cui il quiver di cui nella Proposizione 3.2 è contrazione. Si ottiene così un controesempio alla congettura che è iperbolico e privo di lati multipli

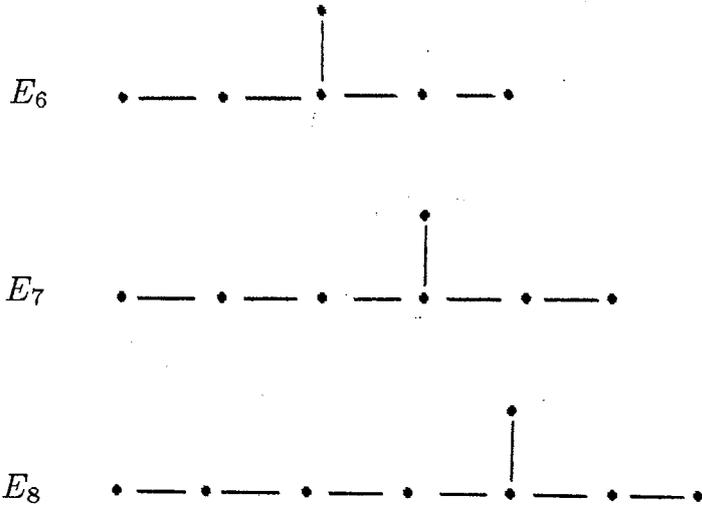
APPENDICE

Tavola I

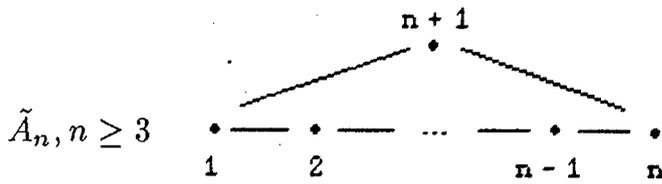
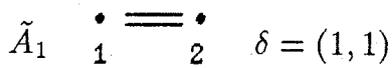
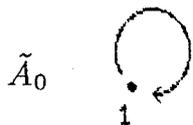
Grafi finiti.

$$A_n, n > 1 \quad \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet$$

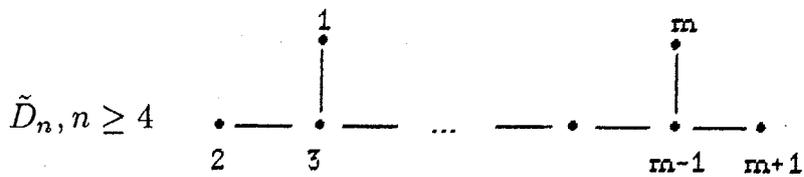
$$D_n, n \geq 4 \quad \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}$$



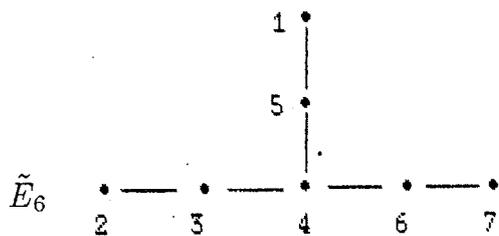
Grafi tame.



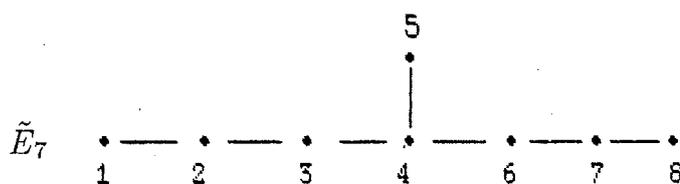
$\delta = (1, 1, \dots, 1)$



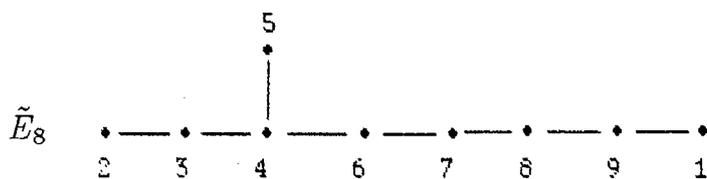
$\delta = (1, 1, 2, \dots, 2, 1, 1)$



$$\delta = (1, 1, 2, 3, 2, 2, 1)$$

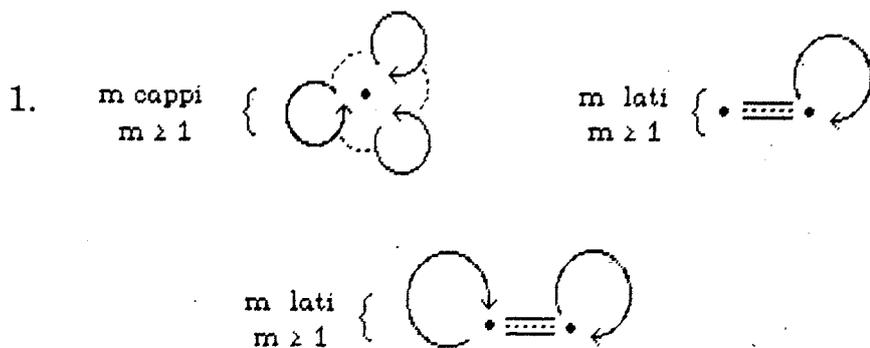


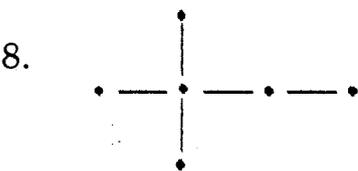
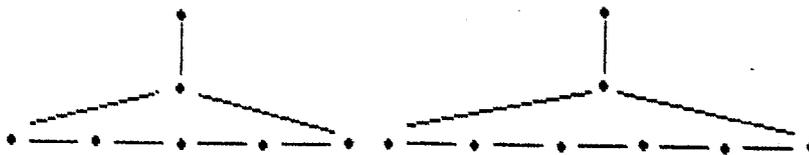
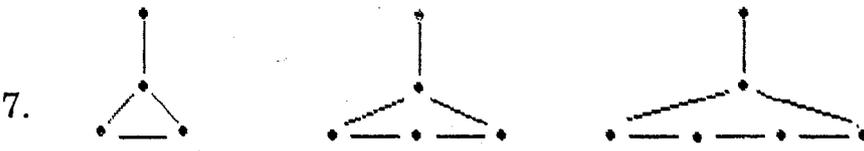
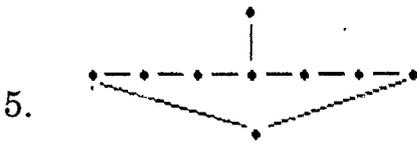
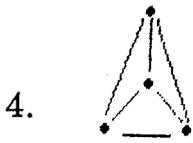
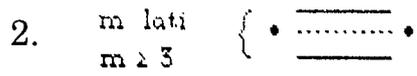
$$\delta = (1, 2, 3, 4, 2, 3, 2, 1)$$



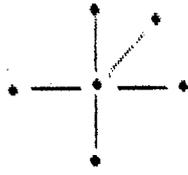
$$\delta = (1, 2, 4, 6, 3, 5, 4, 3, 2)$$

Tavola II





9.



10.



11.



12.



13.



14.



15.



16.



BIBLIOGRAFIA

- [1] Bernstein I.N., Gel'fand I.M., Ponomarev V.A., *Coxeter functors and Gabriel's theorem*, Russian Math. Sur. **28**, fasc. 2, (1973), 17-32.
- [2] Kac V., *Infinite root system, representations of graphs and invariant theory*, Invent. Math. **56**, (1980), 57-92.
- [3] Kac V., *Infinite root system, representations of graphs and invariant theory II*, J. of Algebra **78** (1982), 141-162.
- [4] Kac V., *Root systems, representations of quivers and invariant theory*, Proceedings of the CIME, Montecatini 1982, Springer Lecture notes **996**, (1983) 74-108.
- [5] Kraft H., Riedtmann Ch., *Geometry of representations of quivers*, Rep. of Algebras, Durham 1985, London Mat. Soc. Lect. Notes, (1986) 109-145.
- [6] B. L. L., *Counterexamples to the Kac-conjecture on Schur roots*, Bull. Sc. Math., 2 serie, **110** (1986) 437-448.

*Dipartimento di Matematica
Guido Castelnuovo
Università di Roma La Sapienza
Piazzale Aldo Moro, 2 - 00185 Roma (Italy)*