LE MATEMATICHE
Vol. XLV (1990) - Fasc. II, pp. 301-317

SU CERTE CURVE DI GENERE MASSIMO IN $\mathbb{P}^3$

MARIA GRAZIA CINQUEGRANI (CATANIA) (*) (**)

In this paper we describe the smooth connected curves in $\mathbb{P}^3$ having degree $d = (s-1)^2 - r$, $(0 \leq r \leq s-4,\ s \geq 4)$, not lying on a surface of degree $s-1$ and having maximal genus $G(d,s)$. Moreover we see that the deficiency module of these curves, when it is not zero, is k_{s-2}. At last we study the family of these curves in the Hilbert scheme.

Introduzione.

In $\mathbb{P}^3_k$ (k campo algebricamente chiuso di caratteristica zero), indichiamo con $G(d,s)$ il genere massimo di una curva liscia, connessa, di grado d, non contenuta in una superficie di grado $s-1$.

Gruson e Peskine hanno calcolato $G(d,s)$ per $d \geq (s-1)^2+1$ ed hanno dato una descrizione completa delle curve che raggiungono il genere $G(d,s)$; più precisamente: per $d > s(s-1)$ tali curve sono curve a.C.M. (aritmeticamente Cohen-Macaulay), residue in una completa intersezione di una curva piana; per $(s-1)^2+1 < d \leq s(s-1)$ sono curve ancora a.C.M., ma legate in una completa intersezione (s,s) ad una curva Y su una quadrica; per $d = (s-1)^2+1$ sono curve

(*) Entrato in redazione il 2 ottobre 1990.
(**) Lavoro eseguito con i fondi del M.P.I..

legate in una completa intersezione (s,s) ad una curva Y su una quadrica, residua di una curva di grado 2 e genere aritmetico -1 in una completa intersezione $(2,s)$ (vedi [5], e [6]).

In [4], Ellia determina $G(d,s)$ per $d=(s-1)^2-r$, $0 \leq r \leq s-4$, fornisce esempi di curve che raggiungono tale genere massimo e pone la questione se ogni curva che realizza $G(d,s)$ si ottenga con il procedimento da lui descritto (vedi [4], III.7.1: Remarque (i)).

Chiameremo curva un sottoschema 1-dimesionale di $\mathbb{P}^3_k$ che sia equidimensionale e localmente Cohen-Macaulay.

Nel seguito C denoterà sempre una curva liscia, connessa, di grado d di $\mathbb{P}^3_k$, non giacente su una superficie di grado $s-1$, e avente genere massimo $G(d,s)$, non a.C.M..

In questo lavoro diamo una descrizione delle curve C, di grado $d=(s-1)^2-r$, $0 \leq r \leq s-4$, $s \geq 4$.

Più precisamente vediamo che nel caso $0 \leq r \leq s-5$, $s \geq 5$, una tale curva C è legata in una completa intersezione (s,s) ad una curva Y, unione di una curva piana Y'' e di una curva Y' su una quadrica Q, con Y' residua in una completa intersezione $(2,s)$ di una curva di grado 2 e genere aritmetico -1; inoltre $Y'=Q\cap Y$.

Essenzialmente tali curve sono le curve costruite da Ellia (vedi [4], III.7: Lemme).

Nel caso $r=s-4$, $s \geq 4$, proviamo che C è legata in una completa intersezione (s,s) ad una curva Y giacente su una superficie cubica, residua in una completa intersezione $(3,s)$ di una curva Z di grado 5 e genere aritmetico 1, non giacente su una quadrica.

Di queste curve C calcoliamo poi il modulo delle deficienze e la specialità.

Osserviamo che nei casi $d=s^2-3s+6$, $(s \geq 5)$, e $d=15$, $(s=5)$ oltre alle curve C precedentemente descritte ci sono curve C_1 a.C.M. che raggiungono il genere massimo $G(d,s)$ (vedi [4], Théorème).

Nel § 4 infine studiamo la famiglia delle curve di $\mathbb{P}^3_k$, liscie, connesse di grado $d=(s-1)^2-r$, $0 \leq r \leq s-4$, $s \geq 4$, non giacenti su una superficie di grado $s-1$, che raggiungono il genere massimo $g=G(d,s)$ nello schema di Hilbert $H(d,g)$.

1. Come nell'introduzione, sia C una curva di $\mathbb{P}^3_k$, liscia, connessa, di grado d, non a.C.M., non giacente su una superficie di grado $s-1$, avente genere massimo $G(d,s)$.

Per [4] (Théorème), nel caso in cui $d=(s-1)^2-r$, $0\leq r\leq s-4$, $s\geq 4$, C ha $\Phi^*_{d,s-1}$ come carattere ed é contenuta in un fascio di superfici di grado s.

Siano F e F' due superfici di grado s contenenti C e sia Y la legata a C nella completa intersezione di F e F'.

In questo paragrafo ci proponiamo di caratterizzare Y nel caso

$$s\geq 6,\qquad d=(s-1)^2-r,\qquad O\leq r\leq s-6.$$

TEOREMA 1.1. *Se* $d=(s-1)^2-r$, $0\leq r\leq s-6$, $s\geq 6$, *allora si ha:*

1) *Y contiene una curva Y' di grado $2s-2$ giacente su una quadrica Q, con Y' legata in una completa intersezione $(2,s)$ ad una curva di grado 2 e genere aritmetico -1;*

2) *$Q\cap Y=Y'$, cioè l'ideale di Y' in $\mathcal{O}_Y$ coincide con l'ideale $Q\mathcal{O}_Y$;*

3) *Detta Y'' la residua di Y' in Y rispetto a Q, Y'' è una curva piana di grado $r+1$; inoltre si ha la sequenza esatta:*

$$0\to\mathcal{J}_Y\to\mathcal{J}_{Y'}\to\mathcal{O}_{Y''}(-2)\to 0.$$

La prova del teorema 1.1 segue dai lemmi seguenti.

LEMMA 1.2. *Y è una curva riducibile, contenente una curva Y' di grado $2s-2$, giacente su una quadrica Q.*

Dimostrazione. Dal carattere numerico di C, con facili calcoli, si ricava la differenza prima della funzione di Hilbert della generica sezione piana $C\cap H$ di C:

$$1,2,3,4,\ldots,s-1,s-1,s-3,s-4,\ldots,r+2,r,r-1,\ldots,1,0$$

e quindi, per liaison (vedi [3] 3. Theorem), la differenza prima della funzione di Hilbert della generica sezione piana Γ di Y:

$$1,2,\underbrace{3,3,3,\ldots,3}_{r+1},\underbrace{2,2,\ldots,2}_{s-r-4},1,0$$

da cui si deduce che Γ è contenuta in una cubica piana, che è spezzata in una conica G contenente un sottoschema Γ' di Γ di grado $2s-2$ (vedi [7], Proposition oppure [13], Proposition 2.2 e Remark 2.3).

Indichiamo con Γ'' il sottoschema zero-dimensionale residuo di Γ' in Γ in rapporto a G; Γ'' è contenuto in una retta ed ha grado $r+1$.

Usando [17] Lemma 2, si deduce allora che Y è riducibile e contiene una curva Y' di grado $2s-2$ la cui generica sezione piana è Γ'. La differenza prima della funzione di Hilbert di Γ' è:

$$1, 2, \ldots, 2, 1$$

da cui segue ([16]) Teorema 4) che Y' è contenuta in una quadrica Q.

LEMMA 1.3. *Sia Y' come nel Lemma 1.2. Allora Y' è legata in una completa intersezione* $(2, s)$ *ad una curva X di grado 2 e genere aritmetico* ≤ -1.

Dimostrazione. Sia X la legata a Y' nella completa intersezione di F con Q. Ricordiamo che poichè C non giace su una superficie di grado $s-1$, $h^0(\mathcal{J}_C(s-1)) = 0$; ma $h^0(\mathcal{J}_C(s-1)) = h^2(\mathcal{J}_Y(s-3))$ (vedi [15], Remarque 1.5) da cui $h^2(\mathcal{J}_Y(s-3)) = 0$.

Consideriamo la sequenza esatta:

$$0 \to \mathcal{J}_Y \to \mathcal{J}_{Y'} \to \frac{\mathcal{J}_{Y'}}{\mathcal{J}_Y} \to 0$$

e la sequenza esatta lunga:

$$\cdots \to H^2(\mathcal{J}_Y(s-3)) \to H^2(\mathcal{J}_{Y'}(s-3)) \to H^2\left(\frac{\mathcal{J}_{Y'}}{\mathcal{J}_Y}(s-3)\right) \to \cdots.$$

Osserviamo che $H^2\left(\frac{\mathcal{J}_{Y'}}{\mathcal{J}_Y}(s-3)\right) = 0$ poichè $\frac{\mathcal{J}_{Y'}}{\mathcal{J}_Y}$ è un fascio a supporto su Y con Y schema 1-dimensionale. Ne segue allora che $h^2(\mathcal{J}_{Y'}(s-3)) = 0$ e quindi $h^0(\mathcal{J}_X(1)) = 0$, da cui si deduce che X ha genere aritmetico ≤ -1. □

LEMMA 1.4. *Siano Y, Y', Q come nel Lemma 1.2. Sia Y'' lo schema residuo di Y rispetto a Q, cioè lo schema in $\mathcal{O}_Y$ definito dal* *fascio di ideali ann (Q) (ove indichiamo ancora con Q l'equazione locale di Q in $\mathcal{O}_Y$). Allora Y'' è una curva di grado $r+1$, la cui generica sezione piana è Γ''.*

Dimostrazione. Vedi [17], prova della Proposizione 2.

LEMMA 1.5. *Siano Y, Y', Y'', Q, X come nei lemmi precedenti. Allora $Y' = Q \cap Y$, X ha genere aritmetico uguale a -1 e Y'' è una curva piana.*

Dimostrazione. Dalla sequenza esatta:

$$0 \to \mathcal{J}_Y \to \mathcal{J}_{Y'} \to \frac{\mathcal{J}_{Y'}}{\mathcal{J}_Y} \to 0$$

si ha per $n \gg 0$ la sequenza esatta:

$$0 \to H^0(\mathcal{J}_y(n)) \to H^0(\mathcal{J}_{Y'}(n)) \to H^0\left(\frac{\mathcal{J}_{Y'}}{\mathcal{J}_Y}(n)\right) \to O. \tag{1}$$

Poichè $H^0(\mathcal{J}_Y(n)) = \binom{n+3}{3} - (nc + 1 - g(Y))$, dove c è il grado di Y, e $g(Y)$ è il genere aritmetico di Y, da (1) segue:

$$\binom{n+3}{3} - nc - 1 + g(Y) + h^0\left(\frac{\mathcal{J}_{Y'}}{\mathcal{J}_Y}(n)\right) = \binom{n+3}{3} - nc' - 1 + g(Y')$$

dove c' è il grado di Y' e $g(Y')$ è il genere aritmetico di Y'; quindi, ponendo $c - c' = c''$ =grado di Y'', si ha

$$g(Y) = nc'' + g(Y') - h^0\left(\frac{\mathcal{J}_{Y'}}{\mathcal{J}_Y}(n)\right). \tag{2}$$

Da $Y' \subset Q$ segue $Q\mathcal{O}_Y \subseteq \frac{\mathcal{J}_{Y'}}{\mathcal{J}_Y}$ e quindi $h^0\left(\frac{\mathcal{J}_{Y'}}{\mathcal{J}_Y}(n)\right) \geq h^0(Q\mathcal{O}_Y(n))$. Inoltre si ha: $Q\mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_{Y''}(-2)$ e quindi per $n \gg 0$ è:

$$h^0(Q\mathcal{O}_Y(n) = h^0(\mathcal{O}_{Y''}(-2+n)) = (-2+n)c'' - g(Y'') + 1.$$

Sia $\bar{Y} = \bar{Y}' \cup \bar{Y}''$ una curva costruita come in [4], III.7: Lemme, dove $\bar{Y}'$ è una curva di tipo $(s, s-2)$ su una quadrica $\bar{Q}$ liscia e $\bar{Y}''$ è una curva piana di grado $r+1$, ed inoltre $\bar{Y}'$ e $\bar{Y}''$ si intersecano quasi trasversalmente in $2r+2$ punti.

Per $\bar{Y}$ si ha una relazione analoga alla (2):

$$g(\bar{Y}) = nc'' + g(\bar{Y}') - h^0\left(\frac{\mathcal{J}_{\bar{Y}'}}{\mathcal{J}_{\bar{Y}}}(n)\right) \tag{$\bar{2}$}$$

dove $\dfrac{\mathcal{J}_{\bar{Y}'}}{\mathcal{J}_{\bar{Y}}} = \bar{Q}\mathcal{O}_{\bar{Y}}$.

Confrontiamo (2) e ($\bar{2}$) e osserviamo che si ha:
$g(Y') \leq g(\bar{Y}')$, poichè Y' e $\bar{Y}'$ sono legate in una completa intersezione $(2, s)$ rispettivamente a X e $\bar{X}$ con $g(X) \leq -1 = g(\bar{X})$ e vale il segno uguale se e solo se $g(X) = -1$;

$$\begin{gathered} h^0\left(\frac{\mathcal{J}_{Y'}}{\mathcal{J}_{Y}}(n)\right) \geq h^0(Q\mathcal{O}_Y(n)) = \\ = (-2+n)c'' - g(Y'') + 1 \geq (-2+n)c'' - g(\bar{Y}'') + 1 = h^0(\mathcal{O}_{\bar{Y}''}(-2+n)) = \\ = h^0(\bar{Q}\mathcal{O}_{\bar{Y}}(n)) = h^0\left(\frac{\mathcal{J}_{\bar{Y}'}}{\mathcal{J}_{\bar{Y}}}(n)\right), \end{gathered}$$

dove la seconda disuguaglianza è vera in quanto $\bar{Y}''$ è piana e quindi $g(\bar{Y}'') \geq g(Y'')$, e vale il segno uguale se e solo se anche Y'' è piana (vedi il lemma seguente).

Allora essendo $g(Y) = g(\bar{Y})$ ne segue:

$$g(Y') = g(\bar{Y}')$$

e quindi

$$g(X) = -1$$

e

$$h^0\left(\frac{\mathcal{J}_{Y'}}{\mathcal{J}_{Y}}(n)\right) = h^0\left(\frac{\mathcal{J}_{\bar{Y}'}}{\mathcal{J}_{\bar{Y}}}(n)\right).$$

Dall'ultima uguaglianza si ha: $g(Y'') = g(\bar{Y}'')$ e quindi Y'' è una curva piana e

$$h^0\left(\frac{\mathcal{J}_{Y'}}{\mathcal{J}_{Y}}(n)\right) = h^0(Q\mathcal{O}_Y(n)) \qquad \text{per ogni } n \gg 0,$$

da cui

$$\frac{\mathcal{J}_{Y'}}{\mathcal{J}_{Y}} \cong Q\mathcal{O}_Y$$

cioè $Y' = Y \cap Q$. □

LEMMA 1.6. *Sia C una curva di $\mathbb{P}^3$ di grado d. Allora $g(C) \leq (d-1)(d-2)/2$ e vale il segno uguale se e solo se C è una curva piana.*

Dimostrazione. Sia $\Gamma = C \cap H$ la generica sezione piana di C e $\bar{C}$ una curva di $\mathbb{P}^3$ a.C.M., la cui generica sezione piana ha la stessa funzione di Hilbert di Γ. Allora si ha $g(C) \leq g(\bar{C})$ e vale l'uguale se e solo se C è una curva a.C.M.. Sia Z una curva piana di grado d. Dal confronto delle funzioni di Hilbert delle sezioni piane di Z e $\bar{C}$ segue che $g(\bar{C}) \leq g(Z) = (d-1)(d-2)/2$ valendo l'uguaglianza se e solo se anche $\bar{C}$ è piana. □

Osservazione. Osserviamo che viceversa ogni curva liscia e connessa legata in una completa intersezione (s,s) ad una curva Y del tipo sopra descritto ha genere massimo $G(d,s)$. Tali curve esistono come visto in [4].

2. Siano C e Y come nel paragrafo precedente. In questo paragrafo prendiamo in considerazione i casi in cui $d = (s-1)^2 - r$, $r = s-5$ ed $r = s-4$, con $s \geq 4$.

TEOREMA 2.1. *Sia $d = (s-1)^2 - r$, $r = s-5$, $s \geq 5$. Allora Y è del tipo descritto nel Teorema 1.1.*

Dimostrazione. Indichiamo, come prima, con Γ la generica sezione piana di Y. Proviamo che Y è contenuta in una superficie cubica considerando separatamente i tre casi:

a) $s = 5$, b) $s = 6$, c) $s > 6$.

a) Dalla differenza prima della funzione di Hilbert di Γ:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

si deduce che $h^0(\mathcal{J}_\Gamma(3)) = 2$. Poichè $h^1(\mathcal{J}_C(n)) \leq 1$, per ogni n, (vedi [4], III.3 Lemma), è pure $h^1(\mathcal{J}_Y(n)) \leq 1$, per ogni n, e quindi $h^0(\mathcal{J}_Y(3)) \geq 1$.

b) In questo caso Y è una curva di grado 12 e genere 18.

Dalla differenza prima della funzione di Hilbert di Γ:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

si deduce che $h^0(\mathcal{J}_\Gamma(3)) = 1$. Per provare che Y è contenuta in una superficie cubica basta quindi provare che $h^1(\mathcal{J}_Y(2)) = 0$.

Dalla sequenza esatta

$$0 \to H^0(\mathcal{J}_Y(2)) \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)) \to H^0(\mathcal{O}_Y(2)) \to H^1(\mathcal{J}_Y(2)) \to 0$$

essendo $h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)) = 10$, $h^0(\mathcal{J}_Y(2)) = 0$ e inoltre (cf. [10], Ex. 5.2) $h^0(\mathcal{O}_Y(2)) = 2\text{grado }(Y) + 1 - g(Y) + h^2(\mathcal{J}_Y(2)) = 24 + 1 - 18 + h^2(\mathcal{J}_Y(2))$, basta provare che $h^2(\mathcal{J}_Y(2)) \leq 3$. Ma, per liaison, $h^2(\mathcal{J}_Y(2)) = h^0(\mathcal{J}_C(6)) - 2$ e $h^0(\mathcal{J}_C(6)) \leq h^0(\mathcal{J}_{C\cap H}(6)) = 5$.

c) Dalla funzione di Hilbert di Γ si deduce che nella risoluzione minimale dell'ideale omogeneo I_Γ in $R = k[x_0, x_1, x_2]$, non ci sono sizigie in grado ≤ 5 (vedi [2], Theorema 2.1), da cui per [16] Teorema 4, si ha che Y è contenuta in una superficie cubica.

Sia Z la legata a Y nella completa intersezione $(3, s)$. Si ha che grado $(Z) = 6$ e $g(Z) = 3$. Sia Λ la generica sezione piana di Z.

La differenza prima della funzione di Hilbert di Λ è:

$$1 \quad 2 \quad 2 \quad 1.$$

La risoluzione minimale dell'ideale omogeneo I_Λ (vedi [2], Theorem 2.1) è del tipo:

$$0 \to R(-5) \otimes \varepsilon R(-4) \to \varepsilon R(-4) \otimes R(-3) \otimes R(-2) \to I_\Lambda \to 0 \qquad \text{con } \varepsilon = 1,$$

(poichè se fosse $\varepsilon = 0$ per [16], Theorem 4, Z sarebbe contenuta in una quadrica), e quindi contiene una sizigia di grado 4 ed un generatore di grado 4.

Per liaison (vedi [15], Proposition 2.5) si ha che la risoluzione mnimale di I_Γ contiene un generatore ed una sizigia di grado $s - 1$.

La risoluzione minimale di I_Γ ha quindi la forma

$$0 \to R(-s-1) \otimes \varepsilon R(-s) \otimes R(-s+1) \to$$

$$\varepsilon R(-s) \otimes R(-s+1) \otimes R(-s+2) \otimes R(-3) \to I_\Gamma \to 0 \qquad \text{con } 0 \leq \varepsilon \leq 1.$$

La sizigia di gado $s-1$ di I_Γ lega il generatore di grado 3, diciamolo K_1 ed il generatore di grado $s-2$, diciamolo K_2 e sarà del tipo:

$$(*) \quad K_1 \circ F_1 = K_2 \circ L, \qquad \text{con grado } (F_1) = s-4, \text{ e grado } (L) = 1.$$

Poichè L non divide F_1, si ha che $K_1 = L \circ G$, dove grado $(G) = 2$ e la (*) diventa: $G \circ F_1 = K_2$. Ne segue che il sistema lineare delle curve di grado $s-2$ contenenti Γ ha una parte fissa che è la conica G, contenente un sottoschema Γ' di Γ di grado $2s-2$ (vedi [13], Proposition 2.2).

Ripetendo quindi quanto detto nel caso generale ($s \geq 6, 0 \leq r \leq s-6$) si prova che Y è del tipo descritto nel Teorema 1.1.

TEOREMA 2.2. *Sia $d = (s-1)^2 - r$, $r = s-4$, $s \geq 4$. Allora Y giace su una superficie cubica, ed è legata in una completa intersezione $(3,s)$ ad una curva Z di grado 5 e genere aritmetico 1, non giacente su una quadrica.*

Dimostrazione. Come nella proposizione precedente, per provare che Y è contenuta in una superficie cubica consideriamo separatamente i tre casi:

a) $s = 4$, b) $s = 5$, c) $s \geq 6$.

a) Come nel caso a) del Teorema 2.1., con la differenza che in questo caso $h^0(\mathcal{J}_\Gamma(3)) = 3$.

b) Come nel caso a) del Teorema 2.1, con la differenza che in questo caso $h^0(\mathcal{J}_\Gamma(3) = 1$ e $h^1(\mathcal{J}_Y(2)) = 0$: ciò segue dalla sequenza esatta

$$0 \to H^0(\mathcal{J}_Y(2)) \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)) \to H^0(\mathcal{O}_Y(2)) \to H^1(\mathcal{J}_Y(2)) \to 0$$

essendo $h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)) = 10$, $h^0(\mathcal{J}_Y(2)) = 0$ e inoltre (cf. [10], Ex. 5.2) $h^0(\mathcal{O}_Y(2)) = 2$ grado $(Y) + 1 - g(Y) + h^2(\mathcal{J}_Y(2)) = 20 + 1 - 11 + h^0(\mathcal{J}_C(4)) = 10$.

c) Come nel caso c) del Teorema 2.1.

Sia Z la legata ad Y nella completa intersezione $(3,s)$. Si ha che Z è una quintica di genere aritmetico 1 che non è contenuta in una quadrica, altrimenti C sarebbe contenuta in una superficie di grado $s-1$. □

Osservazione. Nell'esempio di curve di genere massimo di Ellia la superficie cubica contenente Y è spezzata in una quadrica ed in un piano e quindi Z è unione di una cubica piana e di due rette sgembe L_1 e L_2 che intersecano detta cubica ciascuna in un punto. Facciamo vedere che non necessariamente si verifica tale situazione.

Infatti nel seguente esempio si prova che si possono ottenere curve C a partire da una qualunque curva Z liscia connessa di grado 5, genere 1 e di rango massimo.

ESEMPIO 2.3. Sia Z una curva di grado 5 e genere 1 di $\mathbb{P}^3$, liscia, connessa, giacente su una superficie cubica e non su una quadrica. Si vede facilmente che è $h^3(\mathcal{J}_Z) = 0$, $h^2(\mathcal{J}_Z(1)) = 0$, $h^1(\mathcal{J}_Z(2)) = 0$.

Applicando il lemma di Castelnuovo-Mumford [14], segue che I_Z è generato in grado 3 quindi per ogni $s \geq 3$ esiste una superficie S di grado s liscia contenente Z. Sia Π la gnerica sezione piana di S. Consideriamo su S il sistema lineare $|Z+(s-3)\Pi|$ e proviamo che il generico elemento di questo sistema lineare è la curva cercata. Tale sistema non ha Z come componente fissa; ciò segue dalla sequenza:

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_S((s-3)\Pi)) \to H^0(\mathcal{O}_S(Z+(s-3)\Pi)) \to H^0(\mathcal{O}_Z(Z+(s-3)\Pi)) \to 0$$

in quanto $H^0(\mathcal{O}_Z(Z+(s-3)\Pi)) = H^0(\omega_Z(1)) \neq 0$.

Allora dal teorema di Bertini segue che la generica curva C del sistema lineare $|Z+(s-3)\Pi|$ può avere solo punti multipli fissi i quali devono appartenere a Z. Ma poichè Z è una curva liscia, per ogni $P \in Z$ esiste una curva del sistema lineare $|Z+(s-3)\Pi|$ liscia in P, e quindi la generica curva $C \in |Z+(s-3)\Pi|$ è liscia.

Inoltre detti $\bar{\mathcal{J}}_C$ e $\bar{\mathcal{J}}_Z$ i fasci ideali di C e Z su S si ha:

$$h^1(\mathcal{J}_C) = h^1(\bar{\mathcal{J}}_C) = h^1(\mathcal{O}_S(C)) = h^1(\bar{\mathcal{J}}_Z(3-s)) = h^1(\mathcal{J}_Z(3-s)) = 0,$$

$$\text{essendo } 3-s \leq 0$$

Ne segue che il generico elemento C del sistema lineare $|Z+(s-3)\Pi|$ è una curva liscia, connessa, di grado d, che ha genere

$G(d,s)$, e non giace su una superficie di grado $s-1$ in quanto $h^0(\mathcal{J}_C(s-1)) = h^0(\mathcal{J}_Z(2)) = 0$.

Osservazione. Osserviamo che C si può ottenere anche mediante una doppio legamento a partire da Z prima mediante una completa intersezione $(3,s)$ e poi mediante una completa intersezione (s,s).

3. In questo paragrafo calcoliamo il modulo delle deficienze e la specialità in ogni grado delle curve C di grado d, liscie, connesse, di genere massimo, non giacenti su una superficie di grado $s-1$, non a.C.M..

Consideriamo dapprima il caso $d = (s-1)^2 - r$, $0 \leq r \leq s-5$, $s \geq 5$.

PROPOSIZIONE 3.1. *Il modulo $M(C)$ è isomorfo a k_{s-2} cioè*

$$M_n(C) = \begin{cases} 0 & per\ n \neq s-2 \\ k & per\ n = s-2 \end{cases};$$

in particolare C è una curva aritmeticamente di Buchsbaum, di rango massimo e per ogni $t \geq s$ si ha $h^0(\mathcal{J}_C(t)) = h^0(\mathcal{J}_{C\cap H}(t))$.

Dimostrazione. Riferendoci alle notazioni del §1, osserviamo che Y', essendo legata in una completa intersezione $(2,s)$ ad una curva di grado 2 e genere aritmetico -1, è tale che:

$$M_n(Y') = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq s-2 \\ k & \text{per } n = s-2 \end{cases}.$$

Invece Y'' è piana, quindi a.C.M. e allora $M_n(Y'') = 0$ per ogni n. Consideriamo la sequenza esatta:

$$\cdots \to H^0(\mathcal{J}_{Y'}(n)) \xrightarrow{f} H^0(\mathcal{O}_{Y''}(n-2)) \to$$
$$\to H^1(\mathcal{J}_Y(n)) \to H^1(\mathcal{J}_{Y'}(n)) \to H^1(\mathcal{O}_{Y''}(n-2)) \to \cdots$$

in cui l'applicazine f è suriettiva (vedi [4] Lemma III.2) per ogni n, quindi $h^1(\mathcal{J}_Y(n)) = 0$ per $n \neq s-2$.

Per $n = s-2$, essendo $h^1(\mathcal{O}_{Y''}(s-4)) = 0$ perchè $r \leq s-4$, si ha $H^1(\mathcal{J}_Y(n)) \simeq k$, da cui la tesi. □

Lo stesso vale nell'altro caso $r = s-4$, osservando che

$$M_n(Z) = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq 1 \\ 1 & \text{per } n = 1 \end{cases}.$$

Calcoliamo infine la specialità di C.

Denotiamo con $e = \max\{n \in N | H^1(\mathcal{O}_C(n)) \neq 0\}$. Poichè Y sta su una superficie cubica e non su una quadrica, si ha $e = 2s-7$, e più precisamente $h^1(\mathcal{O}_c(2s-7)) = \begin{cases} 1 & \text{per } r > 0 \\ 2 & \text{per } r = 0 \end{cases}$.

4. In questo paragrafo studiamo la famiglia descritta dalle curve C nello schema di Hilbert $H(d,g)$ con $g = G(d,s)$.

TEOREMA 4.1. *Sia $d = (s-1)^2 - r$, con $0 \leq r \leq s-6$, $s \geq 6$ oppure $r = s-4$, $s \geq 4$, $s \neq 5$. Allora esiste un'unica componente $\mathcal{H}$ dello schema di Hilbert $H(d,g)$ contenente una curva C liscia, connessa, di grado d e genere $g = G(d,s)$, non giacente su una superficie di grado $s-1$. $\mathcal{H}$ è genericamente liscia.*

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso $0 \leq r \leq s-6$, $s \geq 6$.

Siano C e Y come nel Teorema 1.1; Y giace su una superficie cubica; indichiamo con Z la legata a Y nella intersezione completa $(3,s)$. Siano $\mathcal{C} \subseteq H(d,g)$, $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}$ le famiglie descritte rispettivamente da C, Y e Z.

Osserviamo che tutte le curve di $\mathcal{C}$ hanno lo stesso modulo delle deficienze, lo stesso carattere e di conseguenza per ogni n, $h^0(\mathcal{J}_C(n))$ è costante per ogni $C \in \mathcal{C}$.

Ne segue per [1], Corollary 2.3. che $\mathcal{C}$ è una famiglia irriducibile. Lo stesso dicasi per le famiglie $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}$.

In particolare C appartiene ad un'unica componente $\mathcal{H}$ dello schema di Hilbert, e la famiglia $\mathcal{C}$ è densa in $\mathcal{H}$.

Dalla descrizione di Y data nel Teorema 1.1. segue che la generica $Z \in \mathcal{Z}$ è unione di una curva piana P di grado $s-r-1 \geq 5$

e di due rette sghembe L_1 ed L_2 che intersecano P ciascuna in un punto. Da [11], Proposition 5.3 (β), si ha che Z è un punto liscio dello schema di Hilbert.

Applicando adesso [12] (3.9) Proposition ed osservando che:

$h^0(\mathcal{J}_Z(3))$ e $h^0(\mathcal{J}_Z(s))$ non variano al variare di Z in $\mathcal{Z}$;

$h^1(\mathcal{J}_Z(s-4)) = h^1(\mathcal{J}_Z(-1)) = 0$ per ogni $Z \in \mathcal{Z}$ (vedi §3);

$h^0(\mathcal{J}_Y(s))$ non varia al variaredi Y in $\mathcal{Y}$;

$h^1(\mathcal{J}_Y(s-4)) = 0$ per ogni $Y \in \mathcal{Y}$ (vedi §3);

segue che $\mathcal{H}$ è genericamente liscia.

Nel caso $r = s-4$, $s \geq 4$, $s \neq 5$, si può ripetere quanto detto precedentemente con la differenza che la generica $Z \in \mathcal{Z}$ è una quintica liscia, connessa, di genere 1 (vedi Teorema 2.2 ed Esempio 2.3). Z rappresenta un punto liscio dello schema di Hilbert $H(5,1)$ per la cui descrizione vedi [9] 1.c.Examples.

TEOREMA 4.2. *Sia* $d = (s-1)^2 - r$, $r = s-5$, $s \neq 5$. *Allora si ha:*

1) *esiste un'unica componente irriducibile* $\mathcal{H}$ *dello schema di Hilbert* $H(d,g)$ *contenente una curva liscia, connessa, di grado* d *e genere* $g = G(d,s)$, *non giacente su una superficie di grado* $s-1$;

2) *la generica curva di* $\mathcal{H}$ *è a.C.M.;*

3) $\mathcal{H}$ *contiene un unico chiuso irriducibile* $\mathcal{K}$ *di codimensione 1, il cui generico elemento è una curva* C *liscia, connessa, di grado* d*, genere* g*, con* $h^0(\mathcal{J}_C(s-1)) = 0$*, non a.C.M.;*

4) $\mathcal{H}$ *è liscia nel punto generico di* $\mathcal{K}$.

Dimostrazione. Ricordiamo (vedi [4], Théorème) che una curva liscia, connessa che realizza $g = G(d,s)$, o è una curva C_1 a.C.M. ed ha carattere $(2s-4, \ldots, s+1, s, s, s, s)$, oppure è una curva C del tipo descritto nel Teorema 2.1 e nel Teorema 1.1.

Distinguiamo quindi i due casi.

a) Sia C non a.C.M. e siano $\mathcal{C}$, $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}$ come nel Teorema 4.1. Dalla descrizione di Y data nel Teorema 2.1, segue che la generica $Z \in \mathcal{Z}$ è spezzata in una quartica piana e in due rette sghembe che la intersecano ciascuna in un punto.

b) Sia C_1 a.C.M. e sia $\mathcal{C}_1$ la famiglia descritta da C_1. Dal carattere di C_1 si deduce che è contenuta in almeno due superfici F ed F' di grado s. Sia Y_1 la legata a C_1 nella completa intersezione di F ed F'. Y_1 è contenuta in una superficie cubica e sia Z_1 la legata a Y_1 nella completa intersezione $(3, s)$; Z_1 è una sestica di genere 3, a.C.M..

Siano $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{Y}_1$ e $\mathcal{Z}_1$ le famiglie descritte rispettivamente da C_1, Y_1 e Z_1. Come nel Teorema 4.1 si prova che le famiglie $\mathcal{C}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{Y}_1$, e $\mathcal{Z}_1$ sono tutte irriducibili.

La curva Z è liscificabile ([11], Proposizione 5.3 β)) e rappresenta un punto liscio dello schema di Hilbert $H(6,3)$. Si vede subito che Z_1 è una liscificata di Z. Infatti una sestica liscia connessa di genere 3 non su una quadrica è necessariamente a.C.M..

Inoltre $\dim \mathcal{Z} = 23$ e $\dim \mathcal{Z}_1 = 24$. Segue allora che la chiusura di $\mathcal{Z}$ è un chiuso irriducibile di codimensione 1 nella componente dello schema di Hlbert $H(6,3)$ contenente Z_1.

La tesi segue allora applicando [12] 3.9 Proposition. Infatti dalla conoscenza del carattere e della deficienza delle nostre curve si deduce facilmente che: per ogni $Z \in \mathcal{Z}$, $Z_1 \in \mathcal{Z}_1$, $Y \in \mathcal{Y}$, $Y_1 \in \mathcal{Y}_1$

- $h^0(\mathcal{J}_Z(n)) = h^0(\mathcal{J}_{Z_1}(n))$, per ogni $n \geq 3$;
- $h^1(\mathcal{J}_Z(s-4)) = h^1(\mathcal{J}_Z(-1)) = 0$ (vedi §3);
- $h^0(\mathcal{J}_Y(s)) = h^0(\mathcal{J}_{Y_1}(s))$;
- $h^1(\mathcal{J}_Y(s-4)) = 0$ (vedi §3);

Infine essendo anche, per ogni $C \in \mathcal{C}$ e $C_1 \in \mathcal{C}_1$, $h^0(\mathcal{J}_C(s)) = h^0(\mathcal{J}_{C_1}(s))$, segue che $\mathcal{K}$ ha codimensione 1 in $\mathcal{H}$. □

Osservazione. Considerazioni a parte meritano i casi $d = 16$ e $d = 15$, in cui non si può ripetere la dimostrazione del Teorema 4.2 in quanto in entrambi i casi $h^1(\mathcal{J}_Z(1)) \neq 0$ per $Z \in \mathcal{Z}$ e non si può applicare [12]; inoltre nel caso $d = 15$ se C_1 è a.C.M. la legata Y_1

non sta su una superfice cubica. Facciamo vedere comunque che in entrambi i casi l'enunciato del Teorema 4.2 continua a valere con l'unica differenza che per $d = 16$ $\mathcal{K}$ è di codimensione 2 in $\mathcal{H}$.

Caso $d = 16$ ($s = 5$, $r = 0$). Siano $\mathcal{C}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{Y}_1$ come nel Teorema 4.2. La generica $Y \in \mathcal{Y}$ è una curva spezzata in una curva Y' di tipo (5,3) su una quadrica liscia Q, e una retta che incontra Y' in due punti. Y ha grado 9 e genere aritmetico 9. La generica $Y_1 \in \mathcal{Y}_1$ è una curva liscia a.C.M. di grado 9 e genere 9. Dal carattere di Y_1 (4,4,4) si vede che Y_1 sta su un'unica cubica.

Per [8], Theorema 1, Y è liscificabile e rappresenta un punto liscio dello schema di Hilbert $H(9,9)$ e si vedi facilmente che Y_1 è una liscificata di Y, poichè una curva liscia di grado 9 e genere 9 non su una quadrica è necesariamente a.C.M.: infati la differenza prima della funzione di Hilbert della generica sezione piana Γ di Y, essendo $h^0(\mathcal{J}_\Gamma(2)) = 0$ (vedi [16], Teorema 4), può essere del tipo:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 1, \quad \text{oppure} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3.$$

Nel primo caso Γ è intersezione completa, quindi anche Y che avrebbe allora genere 10 (vedi [16] Teorema 4, Corollario 1). Segue allora che la differenza prima della funzione di Hilbert di Γ è:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 3$$

e quindi $g(Y) \leq 9$ e vale l'uguale se e solo se Y è a.C.M..

Inoltre $\dim \mathcal{Y} = 34$ e $\dim \mathcal{Y}_1 = 36$.

La dimostrazione procede come nel Teorema 4.2, osservando che anche in questo caso $h^0(\mathcal{J}_y(5)) = h^0(\mathcal{J}_{Y_1}(5))$, $h^1(\mathcal{J}(1)) = 0$ per ogni $Y = \mathcal{Y}$ e $Y_1 \in \mathcal{Y}_1$, ed inoltre $h^0(\mathcal{J}_C(5)) = h^0(\mathcal{J}_{C_1}(5))$ per ogni $C \in \mathcal{C}$, $C_1 \in \mathcal{C}_1$.

Caso $d = 15$ ($s = 5$, $r = 1$). Siano $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Y}_1$ come nel Teorema 4.2. La generica $Y \in \mathcal{Y}$ è una curva di grado 10 e genere 12, che sta su una cubica irriducibile G (vedi Esempio 2.3) ed inoltre poichè dalla sequenza esatta

$$0 \to H^0(\mathcal{J}_Y(3)) \to H^0(\mathcal{J}_Y(4)) \to H^1(\mathcal{J}_\Gamma(4)) \to H^1(\mathcal{J}_C(3)) \to 0$$

si deduce che $h^0(\mathcal{J}_Y(4)) = 5$, esiste almeno una quartica F contenente Y e non contenente G.

La generica $Y_1 \in \mathcal{Y}_1$ è una curva liscia di grado 10 e genere 12 a.C.M., con carattere (4,4,4,4,).

In entrambi i casi possiamo operare una liaison (4,4), e otteniamo Z e Z_1, che descrivono le famiglie $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{Z}_1$.

La generica $Z \in \mathcal{Z}$ è spezzata in una curva piana di grado 4 ed in due rette sghembe che la intersecano ciascuna in un punto.

La generica $Z_1 \in \mathcal{Z}_1$ è una sestica liscia di genere 3 a.C.M..

La dimostrazione prosegue come nel Teorema 4.2 osservando che:

- $h^0(\mathcal{J}_Z(4)) = h^0(\mathcal{J}_{Z_1}(4))$;
- $h^0(\mathcal{J}_Y(5)) = h^0(\mathcal{J}_{Y_1}(5))$;
- $h^1(\mathcal{J}_Z) = h^1(\mathcal{J}_Y(1)) = 0$;

per ogni $Z \in \mathcal{Z}$, $Z_1 \in \mathcal{Z}_1$, $Y \in \mathcal{Y}$, $Y_1 \in \mathcal{Y}_1$, ed inoltre $h^0(\mathcal{J}_C(5)) = h^0(\mathcal{J}_{C_1}(5))$ per ogni $C \in \mathcal{C}$, $C_1 \in \mathcal{C}_1$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bolondi G., *Irriducible families of curves with fixed cohomology,* Apparirà su Archiv. Der Mathematik.

[2] Campanella G., *Standard Bases of Perfect Homogeneous Polynomial Ideals of Height 2,* Journal of Algebra, **101** (1986), 47-60.

[3] Davis E. - Geramita A. - Orecchia F., *Gorenstein Algebras and the Cayley-Bacharach Theorem,* Proc. Amer. Math Soc. **93** (1985), 593-597.

[4] Ellia Ph., *Sur le genre maximal des courbes gauches de degrè d non sur una surface de degré $s-1$,* Preprint.

[5] Gruson L. - Peskine Ch., *Genre des courbes de l'espace projectif,* in Algebraic Geometry, Tromsø 1977, Lect. Notes in Math. **687** (1978), 31-60, Springer-Verlag.

[6] Gruson L. - Peskine Ch., *Postulation des courbus gauches,* in Open Problems, Proceedings Ravello 1982, Lect. Notes in Math. **997** (1983) 218-227, Springer-Verlag.

[7] Ellia Ph. - Peskine Ch., *Groups de Points de $\mathbb{P}^3$: caracter et position uniforme,* Preprint, Trieste (1989).

[8] Giuffrida S., *On the smoothability of some nodal space curves,* Preprint.

[9] Harris H., *Curves in Projective Space,* Les Presses De L'Université De Montreal (1982).

[10] Hartshorne R., *Algebraic Geometry,* GTM 52, Springer-Verlag New

York - Heidelberg - Berlin (1977).

[11] Hartshorne R. - Hirschowitz A., *Smoothig algebraic space curves,* Lectures Notes in Math. **1124** (1983), 98-102.

[12] Kleppe J., *Liaison of familes of subschemes in* $\mathbb{P}^n$, Lectures Notes in Math. **1389** (1988), 128-173.

[13] Maggioni R. - Ragusa A., *Connections between Hilbert function and geometric properties for a finite set points in* $\mathbb{P}^2$, Le Matematiche, Vol. XXXIX, fasc. I-III (1984).

[14] Mumford D., *Lectures on curves on an algebraic surface,* Princeton Univ. Press, New York, 1986.

[15] Peskin C. - Szpiro L., *Liaison des varietes algebriques. I,* Inveziones Math. **26** (1974), 271-302.

[16] Strano R., *Sulle sezioni iperpiane delle curve,* Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, vol. LVII (1987).

[17] Strano R., *On generalized Laudal's Lemma,* Preprint.

Dipartimento di Matematica
Università di Catania
Viale A. Doria, 6
95125 Catania (Italy)