«LE MATEMATICHE»
Vol. XLIV (1989) - Fasc. II, pp. 205-226

SISTEMI DI QUATERNE DI STEINER CON PARTICOLARI INTERSEZIONI

MARIA CORINNA MARINO (Messina) (*) (**)

The purpose of this paper is to study the intersection between Steiner quadruple systems having in common two sets of blocks, one of these containing all and only all the blocks with a given pair of elements.

More precisely, it will be determined for $v = 8, 16$ the following set:

$$J^E(v) = \{k/\exists SQS(v), (Q, q_1), (Q, q_2) : x, y \in Q (x \neq y)$$

such that $c(x, y) \subseteq q_1 \cap q_2$ and $|c(x, y)| + k = |q_1 \cap q_2|\}$ where $c(x, y)$ is the set of all blocks of q containing the pair (x, y).

1. Introduzione.

Un *sistema di quaterne di Steiner* (SQS) è una coppia (Q, q) dove Q è un insieme finito e q è una famiglia di sottoinsiemi (blocchi) di Q, di cardinalità 4, tale che ogni terna di elementi distinti di Q appartiene esattamente ad un blocco di q.

(*) Entrato in Redazione il 3 ottobre 1989

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del CNR (GNSAGA) e con contributo MPI.

Il numero $|Q|$ dicesi *l'ordine* del sistema. Nel 1960 H. Hanani [6] ha dimostrato che un $SQS(Q,q)$ esiste se e solo se $|Q| = v \equiv 2$ opp. 4 (mod. 6).

Si prova facilmente che in un SQS di ordine v ($SQS(v)$) risulta $q_v = |q| = v(v-1)(v-2)/24$, che ogni elemento di Q appartiene ad esattamente $(v-1)(v-2)/6$ blocchi, e che ogni coppia di elementi distinti di Q appare esattamente in $(v-2)/2$ blocchi.

Un *sistema parziale di quaterne* (PQS) è una coppia (P,q) dove P è un insieme finito e q è una famiglia di sottoinsiemi (blocchi) di P, di cardinalità 4, tale che ogni terna di elementi distinti di P appartiene al più ad un blocco di q. Usando la terminologia della teoria dei grafi, si indica con $d(x)$ il numero di blocchi di q contenenti l'elemento x di P e con $d(x,y)$ il numero di blocchi contenenti la coppia di elementi distinti $\{x,y\} \subseteq P$. Due sistemi parziali di quaterne (P,q_1) e (P,q_2) si dicono *mutuamente bilanciati* se ogni terna di elementi di P è contenuta in un blocco di q_1 se e solo se è contenuta in un blocco di q_2.

Due PQS mutuamente bilanciati si dicono *disgiunti* ($DMB\ PQS$) se non hanno alcun blocco in comune. Si ha $|q_1| = |q_2| = m$.

In [3] M. Gionfriddo e C.G. Lindner hanno affrontato il problema della determinazione di tutti gli interi $k \geq 0$ e $k \leq v(v-1)(v-2)/24$ per i quali è possibile costruire una coppia di $SQS(v)$ aventi esattamente k blocchi in comune (*Block Intersection Problem*, cfr. [8] problem n. 6.6 p. 178): tali autori, cioè, hanno studiato la determinazione dell'insieme $J(v) = \{k \in \mathbb{N} : \exists SQS(v)(Q,q_1),(Q,q_2) \text{ con } |q_1 \cap q_2| = k\}$.

Scopo di questo lavoro è lo studio del problema dell'intersezione tra sistemi $SQS(v)$ aventi in comune due famiglie di blocchi, una delle quali è costituita da tutti i blocchi del sistema contenenti una prefissata coppia di punti. In altre parole, si studierà la determinazione dell'insieme $J^E(v)$ così definito:

$$k \in J^E(v) \Leftrightarrow \exists SQS(v)(Q,q_1),(Q,q_2) :$$

1) $\exists x,y \in Q,\ (x \neq y)/(b \in q_1 - q_2 \text{ oppure } b \in q_2 - q_1) \Rightarrow |b \cap \{x,y\}| \leq 1$

2) $|q_1 \cap q_2| = k + \dfrac{v-2}{2}$.

In [7] D.C. Hoffmann e C. Lindner hanno affrontato un problema simile per i sistemi di terne $STS(v)$, mentre risultati su intersezioni condizionate tra sistemi di quaterne sono stati ottenuti da S. Milici e G. Quattrocchi in [11] e da B. Micale in [10].

In questo lavoro si determina in particolare $J^E(v)$ per $v = 8, 16$.

Nel seguito si indicherà con $\rho^E(v)$ l'insieme degli interi $h + k$, tali che $h \in J(v)$ e $k \in J^E(v)$, inoltre sarà

$$I(v) = \{0, 1, 2, \ldots, q_v - 14, q_v - 12, q_v - 8, q_v\},$$

$$I^E(v) = \left\{ k - \frac{v-2}{2} : k \in I(v), k \geq \frac{v-2}{2} \right\}.$$

Fissato un $SQS(v)$ (Q, q), se $x, y \in Q$ si indicherà con $C_q(x, y)$ o con $C(x, y)$ l'insieme di tutti i blocchi di q contenenti la coppia x, y.

2. Un criterio per determinare $J^E(2v)$.

Siano A e A' due 1-fattorizzazioni rispettivamente su $V = \{1, 2, \ldots, v\}$, $V' = \{1', 2', \ldots, v'\}$ e sia γ una qualunque permutazione su $\{1, 2, \ldots, v-1\}$.

Sia $\Gamma = \Gamma(A, A', \gamma)$ la famiglia di quaterne così definita

$$\{x, y, z, t\} \in \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} \{x, y\} \in A_i \in A \\ \{z, t\} \in A'_j \in A' \\ j = \gamma(i) \end{cases}$$

Se T, T' è una coppia di DMB PQS con m blocchi tale che $T \subseteq \Gamma(A, A', \gamma)$, sia $\Gamma' = (\Gamma(A, A', \gamma) - T) \cup T'$. Se (V, v), $V', v')$ sono due $SQS(v)$, si può dimostrare che $(V \cup V', v \cup v' \cup \Gamma)$ è un $SQS(2v)$. È immediato che anche la coppia $(V \cup V', v \cup v' \cup \Gamma)$ è un $SQS(2v)$.

Nel seguito si indicherà con Σ una famiglia del tipo $\Gamma = \Gamma(A, A', \gamma)$ o del tipo Γ'.

TEOREMA 2.1. *Siano* Σ_1, Σ_2 *tali che* $|\Sigma_1 \cap \Sigma_2| = k$ *e tali che esistono due elementi* x, y *verificanti la condizione:*

$$\textit{per ogni } b \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2,\ x, y \in b \Rightarrow b \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$$

Segue

$$p + k - \frac{v}{2} \in J^E(2v),\ \forall p \in \rho^E(v).$$

Dimostrazione. Sia (Q, q_1) un $SQS(2v)$ contenente due sub-$SQS(v)$ (Q_1, q_{11}), (Q_2, q_{12}) tali che $Q_1 \cup Q_2 = Q$, $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$. Si verifica facilmente che la famiglia $\Sigma_1 = q_1 - (q_{11} \cup q_{12})$ è del tipo Γ o Γ'.

Sia Σ_2 una famiglia del tipo Γ o Γ', definita su $Q_1 \cup Q_2$ tale che $|\Sigma_1 \cap \Sigma_2| = k$ e $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ contenente $\frac{v}{2}$ blocchi $\{x, y, x_i, y_i\}$, per $x, y \in Q_1$ (oppure Q_2) e $x_i, y_i \in Q_2$ (oppure Q_1) per $i = 1, 2, \ldots, v/2$.

Sia (Q, q_2) un $SQS(2v)$ contenente Σ_2 e due $SQS(v)$ (Q_1, q_{21}), (Q_2, q_{22}) tali che

$$C_{q_{21}}(x, y) = C_{q_{22}}(x, y) \subseteq q_{11} \cap q_{21}, |q_{11} \cap q_{21}| = \frac{v-2}{2} + r, |q_{12} \cap q_{22}| = s,$$

dove $r + s = p \in \rho^E(v)$. Essendo $C_{q_1}(x, y) = C_{q_2}(x, y) \subseteq q_1 \cap q_2$ segue

$$|q_1 \cap q_2| = k - \frac{v}{2} + p, \text{ per } p \in \rho^E(v).$$

Da cui la tesi. ■

3. Determinazione di $J^E(16)$.

Nel seguito si indicherà con γ_i, per $i = 1, 2, 3, 4, 5, 7$ la seguente permutazione definita su $\{1, 2, \ldots, 7\}$;

$$\gamma_i(n) = \begin{cases} n & \text{per } n = 1, 2, \ldots, i \\ 7 & \text{per } n = i + 1 \\ n - 1 & \text{per } n = i + 2, \ldots, 7 \end{cases}$$

Inoltre, fissata una 1-fattorizzazione A su $\{1,2,\ldots,v\}$, si indicherà con A' la 1-fattorizzazione su $\{1',2',\ldots,v'\}$ tale che $\{x',y'\} \in A'_i \in A'$, per $i = 1,2,\ldots,v-1$, se e solo se $\{x,y\} \in A_i \in A$.

TEOREMA 3.1. $J^E(8) = \{3,11\}$.

Dimostrazione. La determinazione di $J^E(8)$ è immediata. È noto infatti che $J(8) = \{0,2,6,14\}$. Dunque $J^E(8) \subseteq \{3,11\}$. Poichè è possibile costruire due $SQS(8)$ con 6 o 14 blocchi in comune e contenenti un $c(a,b)$, essendo $|c(a,b)| = 3$, segue la tesi. ■

TEOREMA 3.2. *Per ogni* $p \in \rho^E(8)$ *per ogni* $r = 0,1,2,\ldots,12$, *si ha:* $p + 12 + 8r \in J^E(16)$.

Sia I la seguente 1- fattorizzazione di K_8 su $\{1,2,\ldots,8\}$:

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8
3 4	2 4	2 3	2 8	2 5	2 6	2 7
5 6	5 7	5 8	3 7	3 8	5 3	3 6
7 8	6 8	6 7	4 6	4 7	4 8	4 5

Sia H la 1-fattorizzazione su K_8 tale che $H_1 = I_1$, $H_4 = I_4$, $H_5 = I_5$, $H_6 = I_6$, $H_7 = I_7$

$$H_2 = \boxed{\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{array}} \qquad H_3 = \boxed{\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 8 \\ 6 & 7 \end{array}}$$

e sia ancora $\bar{I}$ la 1-fattorizzazione su K_8 tale che $\bar{I}_1 = I_1$, $\bar{I}_4 = I_4$, $\bar{I}_5 = I_5$, $\bar{I}_6 = I_6$, $\bar{I}_7 = I_7$

Inoltre, fissata una 1-fattorizzazione A su $\{1, 2, \ldots, v\}$, si indicherà con A' la 1-fattorizzazione su $\{1', 2', \ldots, v'\}$ tale che $\{x', y'\} \in A'_i \in A'$, per $i = 1, 2, \ldots, v-1$, se e solo se $\{x, y\} \in A_i \in A$.

TEOREMA 3.1. $J^E(8) = \{3, 11\}$.

Dimostrazione. La determinazione di $J^E(8)$ è immediata. È noto infatti che $J(8) = \{0, 2, 6, 14\}$. Dunque $J^E(8) \subseteq \{3, 11\}$. Poichè è possibile costruire due $SQS(8)$ con 6 o 14 blocchi in comune e contenenti un $c(a, b)$, essendo $|c(a, b)| = 3$, segue la tesi. ■

TEOREMA 3.2. *Per ogni* $p \in \rho^E(8)$ *per ogni* $r = 0, 1, 2, \ldots, 12$, *si ha:* $p + 12 + 8r \in J^E(16)$.

Sia I la seguente 1- fattorizzazione di K_8 su $\{1, 2, \ldots, 8\}$:

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8
3 4	2 4	2 3	2 8	2 5	2 6	2 7
5 6	5 7	5 8	3 7	3 8	5 3	3 6
7 8	6 8	6 7	4 6	4 7	4 8	4 5

Sia H la 1-fattorizzazione su K_8 tale che $H_1 = I_1$, $H_4 = I_4$, $H_5 = I_5$, $H_6 = I_6$, $H_7 = I_7$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

e sia ancora $\bar{I}$ la 1-fattorizzazione su K_8 tale che $\bar{I}_1 = I_1$, $\bar{I}_4 = I_4$, $\bar{I}_5 = I_5$, $\bar{I}_6 = I_6$, $\bar{I}_7 = I_7$

$$\bar{I}_1 = \begin{array}{|cc|}\hline 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 8 \\ 6 & 7 \\ \hline\end{array} \qquad \bar{I}_2 = \begin{array}{|cc|}\hline 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ \hline\end{array} \qquad \bar{I}_3 = \begin{array}{|cc|}\hline 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 6 & 8 \\ \hline\end{array}$$

si verifica che:

$$|\Gamma(I, I', \gamma_1) \cap \Gamma(I, I', \gamma_i)| = \begin{cases} 16 \cdot (7 - i) & \text{per } i = 2, 3, 4, 5 \\ 16 \cdot (8 - i) & \text{per } i = 1, 7 \end{cases}$$

$$|\Gamma(H, I', \gamma_1) \cap \Gamma(I, I', \gamma_i)| = \begin{cases} (7 - i) \cdot 16 + 8 & \text{se } i = 3, 4, 5 \\ 16 + 8 & \text{se } i = 7 \\ 16 \cdot 6 & \text{se } i = 1, 2 \end{cases}$$

$$|\Gamma(I, I', \gamma_7) \cap \Gamma(\bar{I}, I', \gamma_7)| = 5 \cdot 16 + 8.$$

Inoltre considerando la seguente coppia di $DMB\ PQS$ con 8 blocchi

R_1	R_2
1 3 1' 3'	1 3 1' 4'
1 3 2' 4'	1 3 2' 3'
1 4 1' 4'	1 4 1' 3'
1 4 2' 3'	1 4 2' 4'
2 4 1' 3'	2 4 1' 4'
2 4 2' 4'	2 4 2' 3'
2 3 1' 4'	2 3 1' 3'
2 3 2' 3'	2 3 2' 4'

si ha

$$|\Gamma(I, I', \gamma_7) \cap \Gamma(I, I', \gamma_7) - R_1) \cup R_2| = 6 \cdot 16 + 8$$

Poichè, in ogni caso, c'è una coppia $a, b \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ tale che i blocchi $\{a, b, x_1, y_1\}$, $\{a, b, x_2, y_2\}$, $\{a, b, x_3, y_3\}$, $\{a, b, x_4, y_4,\}$ risultino contenuti nell'intersezione delle famiglie Γ, segue la tesi. ■

TEOREMA 3.3. *Per ogni h dispari, tale che* $3 \leq h \leq 65$ *e* $h \neq 59$, *si ha* $h \in J^E(16)$;

Dimostrazione. 1) Consideriamo le seguenti 1-fattorizzazioni di K_8 su $\{1, 2, \ldots, 8\}$.

A:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8
3 4	2 4	2 3	2 6	3 8	4 6	3 6
5 6	5 7	5 8	3 7	2 5	3 5	2 7
7 8	6 8	6 7	4 8	4 7	2 8	4 5

B:

B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8
3 5	6 7	2 8	2 6	3 8	4 6	3 6
4 7	2 5	3 7	3 4	2 7	2 3	2 4
6 8	4 8	5 6	7 8	4 5	5 8	5 7

C:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8
3 5	6 7	5 6	2 8	3 8	5 8	2 6
4 7	2 5	2 3	3 7	2 7	2 4	3 4
6 8	4 8	7 8	4 6	4 5	3 6	5 7

Si ha:

$$|\Gamma(A, B', \gamma_7) \cap \Gamma(B, B', \gamma_1)| = 4$$

$$|\Gamma(A, B', \gamma_7) \cap \Gamma(B, B', \gamma_i)| = 2 \cdot |\Gamma(A, B', \gamma_7) \cap \Gamma(B, B', \gamma_{i-1})|$$

per ogni $i = 2, 3$, ed ancora

$$|\Gamma(A, B', \gamma_3) \cap \Gamma(B, B', \gamma_7)| = 12.$$

A questo punto, per i teoremi 2.1 e 3.2, si ha che per ogni h dispari, tale che $3 \leq h \leq 37$ e $k \neq 27$, si ha $h \in J^E(16)$.

2) Sia A^* la seguente 1-fattorizzazione di K_8

$A^*=$

$A^*_i=A_i$	$\forall i=4,5,6,7$	
A^*_1	A^*_2	A^*_3
1 3	1 4	1 2
2 4	2 3	3 4
5 6	5 8	5 7
7 8	6 7	6 8

Si può constatare che, posto

$\Delta_1=$

5 6 5' 6'	5 8 5' 8'	5 7 5' 7'
7 8 5' 6'	6 7 5' 8'	6 8 5' 7'
5 6 7' 8'	5 8 6' 7'	5 7 6' 8'
7 8 7' 8'	6 7 6' 7'	6 8 6' 8'

si ha:

$$\Delta_1 \subseteq \Gamma(A, A', \gamma_7) \cap \Gamma(A, A^{*'}, \gamma_4) \cap \Gamma(A, A^{*'}, \gamma_5).$$

Se

$\Delta_2=$

5 6 5' 8'	5 8 5' 7'	5 7 5' 6'
7 8 5' 8'	6 7 5' 7'	6 8 5' 6'
5 6 6' 7'	5 8 6' 8'	5 7 7' 8'
7 8 6' 7'	6 7 6' 8'	6 8 7' 8'

Δ_1 e Δ_2 formano una coppia di $DMB\ PQS$ con 12 blocchi. Dunque, se $\Sigma_1 = (\Gamma(A, A^{*'}, \gamma_4) - \Delta_1) \cup \Delta_2$, si ha:

$$|\Gamma(A, A', \gamma_7) \cap \Sigma_1| = 28.$$

Inoltre, se $\Sigma_2 = \Gamma(A, A^{*'}, \gamma_5) - \Delta_1) \cap \Delta_2$ si ha:

$$|\Gamma(A, A', \Gamma_7) \cap \Sigma_2| = 44.$$

Dal teorema 2.1 segue pertanto: $\{27, 35, 43, 51\} \subseteq J^E(16)$.
Dalla 1), dalla 2) e dal teorema 3.2 segue la tesi. ■

TEOREMA 3.4. *Per ogni* $p \in \rho^E(8)$ *e per ogni* $k \in \{46, 53, 61, 62, 78, 85, 93, 94\}$ *si ha* $p + k - 4 \in J^E(16)$.

Dimostrazione. Consideriamo le seguenti 1- fattorizzazioni di K_8, rispettivamente su $\{1, 2, \ldots, 8\}$ e $\{1', 2', \ldots, 8'\}$:

F:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
1 8	1 5	1 4	1 3	1 2	1 7	1 6
2 5	2 8	2 7	2 6	3 6	2 4	2 3
3 4	3 7	3 8	4 8	4 7	3 5	4 5
6 7	4 6	5 6	5 7	5 8	6 8	7 8

G:

G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7
1 8	1 3	1 4	1 5	1 7	1 2	1 6
2 4	2 8	2 5	2 7	2 6	3 5	2 3
3 7	5 7	3 8	3 6	3 4	4 7	4 5
5 6	4 6	6 7	4 8	5 8	6 8	7 8

e la seguente coppia di $DMB\ PQS$ con 18 blocchi:

N_1	
8 7 8' 7'	2 7 8' 4'
8 7 2' 3'	2 7 2' 7'
8 7 4' 5'	2 7 3' 6'
8 2 8' 6'	3 7 8' 6'
8 2 4' 7'	3 7 4' 7'
8 2 3' 5'	3 7 3' 5'
8 3 8' 4'	2 3 8' 7'
8 3 2' 7'	2 3 2' 3'
8 3 3' 6'	2 3 4' 5'

N_2	
8 7 8' 4'	2 7 8' 6'
8 7 2' 7'	2 7 4' 7'
8 7 3' 5'	2 7 2' 3'
8 2 8' 7'	3 7 8' 7'
8 2 3' 6'	3 7 3' 6'
8 2 4' 5'	3 7 4' 5'
8 3 8' 6'	2 3 8' 4'
8 3 4' 7'	2 3 2' 7'
8 3 2' 3'	2 3 3' 5'

Inoltre, siano $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ le seguenti permutazioni sull'insieme $\{1, 2, \ldots, 7\}$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 4 & 3 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 4 & 2 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$|\Gamma(F,G',\delta_1)\cap((\Gamma(F,G',\delta_1)-N_1)\cup N_2)|=94$$

$$|\Gamma(F,G',\delta_2)\cap(\Gamma(F,G',\delta_1)-N_1)\cup N_2)|=62$$

$$|\Gamma(F,G',\delta_3)\cap(\Gamma(F,G',\delta_1)-N_1)\cup N_2)|=46.$$

Inoltre, se F^* è la 1-fattorizzazione così definita:

$F^*_i = F_i$ per i=1,2,3,4,6

$$F^*_5 = \begin{array}{|cc|} 1 & 6 \\ 2 & 3 \\ 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{array} \qquad F^*_7 = \begin{array}{|cc|} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{array}$$

allora, osservato che $N_1 \subseteq \Gamma(F,G',\delta_1)\cap\Gamma(F^*,G',\delta_1)$, si ha:

$$|\Gamma(F,G',\delta_1)\cap((\Gamma(F^*,G',\delta_1)-N_1)\cup N_2)|=78.$$

Per il teor. 2.1 si ha $\{77,79,83,85,87,91,99\}\subseteq J^*(16)$.
Consideriamo adesso le seguenti 1-fattorizzazioni F^0 e G^0:

F^0:

F^0_1	F^0_2	F^0_3	F^0_4	F^0_5	F^0_6	F^0_7
1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8
3 4	2 4	2 3	3 6	3 5	3 8	3 7
5 7	5 8	5 6	2 7	2 8	2 5	2 6
6 8	6 7	7 8	4 8	4 7	4 6	4 5

G^0:

G^0_1	G^0_2	G^0_3	G^0_4	G^0_5	G^0_6	G^0_7
1' 2'	1' 3'	1' 4'	1' 5'	1' 6'	1' 7'	1' 8'
3' 4'	2' 4'	2' 3'	4' 6'	2' 8'	2' 5'	2' 6'
5' 7'	5' 8'	5' 6'	2' 7'	3' 7'	3' 6'	3' 5'
6' 8'	6' 7'	7' 8'	3' 8'	4' 5'	4' 8'	4' 7'

e le seguenti coppie di DMB PQS con 8 e 19 blocchi

M_1				M_2			
2	7	2'	7'	2	7	2'	8'
2	7	3'	8'	2	7	3'	7'
4	8	2'	7'	4	8	2'	8'
4	8	3'	8'	4	8	3'	7'
2	8	2'	8'	2	8	2'	7'
2	8	3'	7'	2	8	3'	8'
4	7	2'	8'	4	7	2'	7'
4	7	3'	7'	4	7	3'	8',

P_1				P_2			
1	3	6'	7'	1	3	5'	6'
2	4	6'	7'	2	4	5'	6'
1	3	5'	8'	1	3	7'	8'
2	4	5'	8'	2	4	7'	8'
1	4	5'	6'	1	4	5'	8'
2	3	5'	6'	2	3	5'	8'
1	4	7'	8'	1	4	7'	6'
2	3	7'	8'	2	3	7'	6'

D_1							
1	4	1'	4'	2	4	1'	3'
1	4	2'	3'	2	4	2'	4'
2	3	1'	4'	1	3	5'	6'
2	3	2'	3'	1	5	1'	5'
1	2	1'	2'	1	5	4'	6'
1	2	3'	4'	5	6	5'	6'
3	4	1'	2'	5	6	1'	4'
3	4	3'	4'	3	6	1'	5'
1	3	1'	3'	3	6	4'	6'
1	3	2'	4'				

D_2							
1	4	1'	2'	1	3	2'	3'
1	4	3'	4'	1	3	1'	5'
2	3	1'	2'	1	3	4'	6'
2	3	3'	4'	5	6	1'	5'
1	2	1'	3'	5	6	4'	6'
1	2	2'	4'	1	5	1'	4'
3	4	1'	3'	1	5	5'	6'
3	4	2'	4'	3	6	1'	4'
2	4	1'	4'	3	6	5'	6'
2	4	2'	3'				

Si verifica che

(1) $$M_1 \subseteq \Gamma(F^0, G^0, \gamma_7) \cap \Gamma(P^0, G^0, \gamma_5)$$

(2) $$P_1 \subseteq \Gamma(F^0, G^0, \gamma_7) \cap \Gamma(P^0, G^0, \gamma_5)$$

$$D_1 \subseteq (\Gamma(F^0, G^0, \gamma_7) - P_1) \cup P_2 \tag{3}$$

$$D_1| \subseteq (\Gamma(F^0, G^0, \gamma_5) - P_1) \cup P_2. \tag{4}$$

Segue:

$$|\Gamma(F^0, G^0, \gamma_7) \cap (\Gamma(F^0, G^0, \gamma_7) - D_1 \cup D_2)| = 93$$

$$|\Gamma(F^0, G^0, \gamma_7) \cap (\Gamma(F^0, G^0, \gamma_7) - (D_1 \cup M_1) \cup (D_2 \cup M_2)| = 85$$

$$|\Gamma(F^0, G^0, \gamma_7) \cap (\Gamma(F^0, G^0, \gamma_5) - D_1 \cup D_2)| = 61$$

$$|\Gamma(F^0, G^0, \gamma_7) \cap (\Gamma(F^0, G^0, \gamma_5) - (D_1 \cup M_1) \cup (D_2 \cup M_2)| = 53$$

ed in ogni caso si può constatare che $C(6,8)$ è tutto contenuto nell'intersezione considerata.

La tesi segue allora dal Teorema 2.1. ■

TEOREMA 3.4. *Se h è pari e $16 \leq h \leq 70$, $h \neq 20, 46, 50, 64$, allora $h \in J^E(16)$.*

Dimostrazione. Consideriamo le seguenti 1-fattorizzazioni di K_8 su $\{1, 2, \ldots, 8\}$ e le corrispondenti 1-fatt. su $\{1', 2', \ldots, 8'\}$:

D:

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8
3 8	2 7	2 8	2 3	2 4	2 5	2 6
4 5	4 8	3 6	4 6	3 7	3 4	3 5
6 7	5 6	5 7	7 8	5 8	6 8	4 7

E:

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8
6 8	2 6	2 5	2 4	2 8	2 3	2 7
3 7	4 7	3 6	3 8	3 4	4 8	3 5
4 5	5 8	7 8	6 7	5 7	5 6	4 6

L=

L_1	L_2	L_3
1 2	1 3	1 4
3 6	3 8	2 7
4 8	4 5	3 8
5 7	6 7	5 6

$L_i = D_i$
$\forall i = 4,5,6,7$

M=

$M_1 = E_1$
$M_2 = D_2$

M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
1 4	1 5	1 6	1 7	1 8
2 5	2 4	2 8	2 6	2 3
3 8	7 8	4 7	3 4	5 7
6 7	3 6	3 5	5 8	4 6

E*=

$E^*_i = E_i$,	$\forall i = 1,2,5,6,7$
$E^*_3 = M_3$	$E^*_4 = M_4$

Definite le seguenti permutazioni:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad \alpha' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix},$$

si verifica che

$$|\Gamma(D, E', \alpha) \cap \Gamma(L, M', \gamma_7)| = 23$$

$$|\Gamma(D,E',\gamma_7)\cap\Gamma(L,M',\gamma_7)| = 35$$

$$|\Gamma(D,E',\alpha')\cap\Gamma(L,M',\gamma_7)| = 31.$$

Se F,G sono, inoltre, le 1-fattorizzazioni definite nel teor. 3.4, si ha ancora:

$$|\Gamma(F,G',\gamma_7)\cap\Gamma(D,E^{*'},\gamma_7)| = 17.$$

Osservato che in ogni caso esiste un $C(a,b)$ contenuto nelle intersezioni considerate, per i teoremi 2.1. e 3.4. segue la tesi. ■

TEOREMA 3.5. $\{80,82,86,88,90,94,102\}\subseteq J^E(16)$.

Dimostrazione. Sia B la 1-fattorizzazione di K_8 definita nel teor. 3.3 e sia B^* è la 1-fattorizzazione così fatta:

B^*=

B^*_1	B^*_2	B^*_3
1 2	1 3	1 4
3 7	2 5	2 8
4 8	4 7	3 5
5 6	6 8	6 7

$B^*_i=B_i$ $\forall i=4,5,6,7$

Siano inoltre U,U^*, le seguenti 1-fattorizzazioni:

U:

U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7
1 7	1 6	1 8	1 3	1 5	1 4	1 2
2 6	2 8	2 3	2 7	2 4	2 5	6 8
3 4	4 7	4 6	4 8	3 6	3 8	3 7
5 8	3 5	5 7	5 6	7 8	6 7	4 5

$U^* =$

U_1^*	U_2^*	U_3^*	$U_i^* = U_i$ $\forall i = 4,5,6,7$
1 7	1 6	1 8	
2 8	2 3	2 6	
3 5	4 7	3 4	
4 6	5 8	5 7	

Se μ', μ'' sono le permutazioni così definite:

$$\mu' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mu'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 7 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

si può constatare che si ha:

$$|\Gamma(B, U', \gamma_7) \cap \Gamma(B^*, U^{*'}, \mu')| = 37,$$

$$|\Gamma(B, U', \gamma_7) \cap \Gamma(B^*, U^{*'}, \mu'')| = 21$$

ed ancora:

$$|\Gamma(B, U', \gamma_7) \cap \Gamma(B^*, U^{*'}, \gamma_i')| = 1 + 16(i-2) \text{ per } i = 4, 5, 7.$$

Per il teor. 2.1., si ha la tesi. ■

TEOREMA 3.6. $\{88, 96, 104, 110, 118\} \subseteq J^E(16)$.

Dimostrazione. Consideriamo la 1-fattorizzazione A su $\{1, 2, \ldots, 8\}$, introdotta nel teorema 3.3, e la famiglia di blocchi $\Gamma(A, A', \gamma_7)$.

Posto

$U_1 =$

5 6 5' 6'	5 7 6' 8'
5 6 7' 8'	6 8 5' 7'
7 8 5' 6'	6 8 6' 8'
5 7 5' 7'	

$V_1=$

4	8	3'	7'	7	8	7'	8'
4	8	4'	8'	7	8	3'	4'
3	7	3'	7'	3	4	7'	8'
3	7	4'	8'	3	4	3'	4'

si verifica che $U_1 \cup V_1 \subseteq \Gamma(A, A', \gamma_7)$.

Inoltre, se

$V_2=$

4	8	7'	8'	7	8	3'	7'
4	8	3'	4'	7	8	4'	8'
3	7	7'	8'	3	4	3'	7'
3	7	3'	4'	3	4	4'	8'

si può constatare che V_1 e V_2 formano una coppia di $DMB\ PQS$ con $m = 8$ blocchi:

Consideriamo la seguente coppia di $DMB\ PQS$ con $m = 15$.

$T_1=$

5	6	5'	6'	3	7	3'	4'
5	6	7'	8'	3	4	3'	7'
7	8	5'	6'	3	4	4'	8'
5	7	5'	7'	4	8	7'	8'
5	7	6'	8'	4	8	3'	4'
6	8	5'	7'	7	8	3'	7'
6	8	6'	8'	7	8	4'	8'
3	7	7'	8'				

$T_2=$

5	6	5'	7'	3	7	3'	7'
5	6	6'	8'	3	7	4'	8'
5	7	5'	6'	4	8	3'	7'
5	7	7'	8'	4	8	4'	8'
6	8	5'	6'	3	4	7'	8'
6	8	7'	8'	3	4	3'	4'
7	8	5'	7'	7	8	3'	4'
7	8	6'	8'				

Se

$$\Sigma_1 = (\Gamma(A, A', \gamma_7) - V_1) \cup V_2$$

segue:

$$T_1 \subseteq \Sigma_1.$$

Inoltre, posto $\Sigma_2 = (\Sigma_1 - T_1) \cup T_2$ si ha

$$|\Sigma_1 \cap \Sigma_2| 112 - 15 = 97.$$

Dunque appartengono a $J^E(16)$: $96, 98, 102, 104, 106, 110, 118$.
Posto

$$W_1 = \boxed{\begin{array}{cccc} 2 & 5 & 2' & 5' \\ 2 & 5 & 4' & 7' \\ 4 & 7 & 2' & 5' \\ 4 & 7 & 4' & 7' \\ 2 & 7 & 2' & 7' \\ 2 & 7 & 4' & 5' \\ 4 & 5 & 2' & 7' \\ 4 & 5 & 4' & 5' \end{array}} \qquad W_1 = \boxed{\begin{array}{cccc} 2 & 5 & 2' & 7' \\ 2 & 5 & 4' & 5' \\ 4 & 7 & 2' & 7' \\ 4 & 7 & 4' & 5' \\ 2 & 7 & 2' & 5' \\ 2 & 7 & 4' & 7' \\ 4 & 5 & 2' & 5' \\ 4 & 5 & 4' & 7' \end{array}}$$

W_1 e W_2 sono due DMB PQS con $m = 8$. Si vede che

$$W_1 \subseteq \Sigma_1 \cap \Sigma_2.$$

Pertanto se $\Sigma_3 = (\Sigma_2 - W_1) \cup W_2$, segue

$$|\Sigma_1 \cap \Sigma_3| = 89,$$

con $88 \in J^E(16)$. ■

TEOREMA 3.7. $\{108, 112\} \subseteq J^E(16)$.

Dimostrazione. In [1] (Teor. 3.1 e 3.2) sono riportati due coppie di $SQS(16)$ (Q_1, q_{1i}), (Q_2, q_{2i}), per $i = 1, 2$, tali che

$$|q_{11} \cap q_{21}| = 115, \ |q_{12} \cap q_{22}| = 119$$

con $C(7',8') \subset q_{1i} \cap q_{2i}$, $\forall i = 1,2$, essendo $Q_1 = \{1,2,\dots,8\}$, $Q_2 = \{1',2',\dots,8'\}$.

Segue, pertanto, facilmente $108, 112 \in J^E(16)$. ■

TEOREMA 3.8. $116 \in J^E(16)$.

Dimostrazione. Consideriamo la seguente coppia di $DMB\ PQS$ con $m = 17$ blocchi:

$\Delta_1=$

1 2 3 8	2 5 2' 5'
1 2 3' 8'	2 3 1' 8'
1 3 5' 8'	2 8 1' 2'
1 5 1' 2'	2 8 3' 5'
1 5 3' 5'	3 5 2' 3'
1 8 1' 5'	3 5 1' 5'
1 8 2' 3'	1' 3' 5' 8'
2 5 1' 3'	3 8 1' 3'
	3 8 2' 5'

$\Delta_2=$

1 5 1' 5'	3 5 2' 5'
1 5 2' 3'	1 2 3 8'
1 8 1' 2'	1 3 8 5'
3 8 2' 3'	2 3 8 1'
2 8 2' 5'	1 2 8 3'
2 5 1' 2'	8 1' 3' 5'
2 5 3' 5'	3 1' 5' 8'
3 5 1' 3'	1 3' 5' 8'
	2 1' 3' 8'

Siano, inoltre, (Q_1, q_1), (Q_2, q_2) due $SQS(8)$, con $Q_1 = \{1,2,\dots,8\}$, $Q_2 = \{1',2',\dots,8'\}$, tali che $\{1,2,3,8\} \in q_1$, $\{1',3',5',8'\} \in q_2$.

Posto $Q = Q_1 \cup Q_2$,

J:

J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7
1 7	1 4	1 2	1 6	1 8	1 3	1 5
2 3	2 5	3 4	2 4	2 7	2 6	2 8
4 8	3 8	5 7	3 7	3 5	4 5	3 6
5 6	6 7	6 8	5 8	4 6	7 8	4 7

K:

K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
1 8	1 3	1 4	1 7	1 5	1 6	1 2
2 7	2 5	2 6	2 8	2 3	2 4	3 5
3 4	4 8	3 8	3 6	4 7	3 7	4 6
5 6	6 7	5 7	4 5	6 8	5 8	7 8

si può constatare che $(Q, \mathcal{B})$, dove $\mathcal{B} = q_1 \cup q_2 \cup \Gamma(J, K'; \gamma_7)$, è un $SQS(16)$ con $\Delta_1 \subseteq \mathcal{B}$ e $C(1,4) \subseteq B - \Delta_1$. Pertanto, se $\mathcal{B}' = (\mathcal{B} - \Delta_1) \cup \delta_2$, segue $C(1,4) \subseteq \mathcal{B}'$ con $|\mathcal{B} \cap \mathcal{B}'| = 123$. Si ha: $116 \in J^*(16)$. ■

Dai teoremi precedenti segue immediatamente:

TEOREMA 3.9. $\{4, 6, 8, 10, 12, 14, 64, 72, 74, 76, 78\} \subseteq J^E(16)$.

Dimostrazione. Consideriamo le seguenti 1-fattorizzazioni

X=

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
1 7	1 6	1 8	1 3	1 5	1 4	1 2
2 6	2 8	2 3	2 7	2 4	2 5	6 8
3 4	4 7	4 6	4 8	3 6	3 8	3 7
5 8	3 5	5 7	5 6	7 8	6 7	4 5

Y=

Y_1	Y_2	Y_3	
1 7	1 6	1 8	$Y_i = X_i$
2 8	2 3	2 6	$i = 4,5,6,7$
3 5	4 7	3 4	
4 6	5 8	5 7	

e le seguenti permutazioni:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad \sigma'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$|\Gamma(X, Y', \alpha) \cap \Gamma(Y, X', 1)| = 73$$

$$|\Gamma(X, Y', \beta) \cap \Gamma(Y, X', \beta)| = 65$$

$$|\Gamma(X, Y', \sigma') \cap \Gamma(Y, X', \sigma'')| = 5$$

con un $C(a, b)$ contenuto nelle intersezioni.

Segue, per il teor. 2.1., $\{4, 6, 10, 12, 14, 64, 72, 74, 76, 78\} \subseteq J^E(16)$. Inoltre se

$$\rho' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 4 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \rho'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

si ha:

$$|\Gamma(X, Y', \rho') \cap \Gamma(Y, X', \rho'')| = 9,$$

con $C(a, b)$ contenuto nell'intersezione. Segue, per il teor. 2.1., $8 \in J^E(16)$. ■

TEOREMA 3.11. $J^E(8) = I^E(8)$, $J^E(16) \supseteq I^E(16) - \{0, 1, 2\}$.

REFERENCES

[1] Gionfriddo M., *On the set $J(v)$ for SQS of order $v = 2^n$, with $n \geq 4$,* Discrete Math. **44** (1983), 155-160.

[2] Gionfriddo M., *Intersections of Steiner systems $S(3, 4, v)$ with $v = 5 \cdot 2^n$,* Journal of Geometry, **24** (1985), 103-111.

[3] Gionfriddo M., Lindner C.C., *Construction of Steiner quadruple systems having a prescribed number of blocks in common,* Discrete Math. **34** (1981), 31-42.

[4] Gionfriddo M., Marino M.C., *On Steiner systems* $S(3,4,20)$ *and* $S(3,4,32)$, Utilitas Math., **25** (1984), 331-338.

[5] Gionfriddo M., Lo Faro G., *On Steiner systems* $S(3,4,14)$, ARS Combinatoria, **21** (1986), 176-187.

[6] Hanani H., *On quadruple systems,* Canad J. Math. **12** (1960), 145-157.

[7] Hoffman D.G., Lindner C.C., *The flower intersection problem for* STS, Annals of Discrete Math., **34** (1987), 243-248.

[8] Lindner C.C., Rosa A., *Steiner quadruple systems, a survey,* Discrete Math., **21** (1978) 147-184.

[9] Lo Faro G., *Steiner quadruple systems having a prescribed number of quadruples in common,* Discrete Math., **58** (1986), 167-174.

[10] Micale B., *Pairwise disjoint intersections among Steiner quadruple systems,* Journal of Inf. & Opt. Sci. **9**, (1988), 427-436.

[11] Milici S., Quattrocchi G., *The flower intersection problem for* $S(3,4,v)$, $v = 4 \cdot 2^n$, $5 \cdot 2^n$, ARS Combinatoria in corso di pubblicazione.

[12] Quattrocchi G., *On the intersection of two* $S(3,4,2v)$ *having a same derived trigle system,* Discrete Math., in corso di pubblicazione..

Dipartimento di Matematica
Università di Messina
S. Agata, 98100 Messina