«LE MATEMATICHE»
Vol. XLIV (1989) - Fasc. II, pp. 237-258

EQUATIONS DIFFERENTIELLES SOUS FORME IMPLICITE

JEAN SAINT RAYMOND (Paris) (*)

We are concerned with ordinary differential equations of the following type

$$\begin{cases} f\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}\right) = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dfrac{dx}{dt} \in Y \end{cases}$$

where x belongs to a Banach space E, Y is a connected and locally connected compact subset of E, and f a bounded Borel function from $[0, T] \times E \times Y$ to $\mathbb{R}$.

Under continuity assumptions on f similar to those of B. Ricceri in [3], we prove that absolutely continuous solutions on $[0, T]$ can be obtained if Y is assumed to be convex and get an example with $E = \mathbb{R}^2$, $f(t, x, y) = g(y) - h(x)$ and g, h continuous, where no solution can exist.

(*) Entrato in Redazione il 14 novembre 1989

Dans ce papier, on considère des équations différentielles du type suivant:

$$\begin{cases} f\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}\right) = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dfrac{dx}{dt} \in Y \end{cases}$$

où x appartient à un espace de Banach E, Y est une partie compacte connexe et localement connexe de E, et f une fonction borélienne bornée définie sur $[0, T] \times E \times Y$ et à valeurs réelles.

On cherche des fonctions absolument continues sur l'intervalle $[0, T]$ vérifiant (1) presque partout.

B. Ricceri a prouvé un théorème d'existence concernant ce type de problème, en supposant de plus:

a) $f(t, x, \cdot)$ est *continue* pour tout t et tout x et prend sur Y des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives (ce qui assure l'existence d'au moins un $y \in Y$ tel que $f(t, x, y) = 0$).

b) une *forme faible de continuité* en (t, x): il existe une partie D dense dans $Y \times Y$ telle que:

$$\forall (\alpha, \beta) \in D \ \{(t, x) : f(t, x, \alpha) < 0 < f(t, x, \beta)\} \text{ est ouvert.}$$

c) $f(t, x, \cdot)$ n'est constante sur aucun ouvert non vide de Y.

On va montrer ici que l'hypothèse c) peut être enlevée si Y est convexe, et construire un exemple où E est l'espace $\mathbb{R}^2$, $f(t, x, y)$ est de la forme $g(y) - h(x)$ avec g et h continues, mais où le problème (1) n'a pas de solution.

On va remplacer la condition b) par la condition b') suivante:

$$\forall (\alpha, \beta) \in D, \ \forall t \in [0, T] \ \{x : f(t, x, \alpha) < 0 < f(t, x, \beta)\} \text{ est ouvert.}$$

mais en supposant de plus, pour des raisons techniques qui apparaîtront plus loin, que l'ensemble dense D du convexe compact Y possède la propriété suivante:

Pour tout (α, β) de D, l'ensemble des (α', β') de D tels que α' et β' appartiennent au segment $J = [\alpha, \beta]$ est dense dans $J \times J$.

THEOREME 1. *Sous les conditions a) et b'), et si Y est convexe, il existe une fonction lipschitzienne x sur $[0, T]$ satisfaisant (1) presque partout.*

Preuve. On suppose que Y est contenu dans la boule de E de rayon μ, et que f est à valeurs dans la boule B de E de rayon R. On peut supposer, sans perte de généralité, que $\mu T < R$.

Soient $Y_0 = \mathrm{conv}(Y \cup \{0\})$ et $B_0 = T \cdot Y_0$. Ce sont deux convexes compacts de E, et toute fonction lipschitzienne sur $[0, T]$ nulle en 0 avec une dérivée presque partout dans Y prendra ses valeurs dans $B_0 \subset B$. Quitte à remplacer E par le sous-espace fermé engendré par Y_0, on peut supposer E séparable.

On peut choisir dans D une partie dénombrable dense D_0 telle que, pour tout (α, β) dans $D_0, D_0 \cap [\alpha, \beta]^2$ soit dense dans $[\alpha, \beta]^2$. On note $S = [0, T] \times B_0$, et $(\omega_n)_{N \in \mathbb{N}}$ une base de la topologie de B_0. Alors, pour tout (α, β) dans D_0, l'ensemble

$$E_{\alpha,\beta} = \{(t, x) \in S : f(t, x, \alpha) < 0 < f(t, x, \beta)\}$$

est un borélien de S à coupes ouvertes (par rapport à x). Il existe donc, (cf. [2] th. 14), une suite $(E_{\alpha,\beta,n})$ de boréliens de $[0, T]$ telle que

$$E_{\alpha,\beta} = \bigcup_n E_{\alpha,\beta,n} \times \omega_n.$$

On peut donc trouver une suite $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de compacts de $[0, T]$ rares et deux-à-deux disjoints telle que

$$\begin{cases} i)\ [0, T] \setminus \bigcup_j K_j \text{ soit négligeable pour la mesure de Lebesgue} \\ ii)\ \forall (\alpha, \beta) \in D_0, \forall n \in \mathbb{N}\ E_{\alpha,\beta,n} \cap K_j \text{ soit ouvert et fermé dans } K_j \end{cases}$$

Alors, pour $(\alpha,\beta)\in D_0$ et $j\in \mathbb{N}$, $U_{j,\alpha,\beta}=E_{\alpha,\beta}\cap(K_j\times B_0)$ est ouvert dans $S_j=K_j\times B_0$.

Pour chaque entier j, la famille $(U_{j,\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in D_0}$ est, par hypothèse, un recouvrement ouvert du compact S_j. il existe donc une partie finie Δ_j dans D_0 telle que

$$\bigcup_{\alpha,\beta\in\Delta_j} U_{j,\alpha,\beta}=S_j,$$

et un $\varepsilon_j>0$ tel que

$$\forall (t,x)\in S_j \quad \exists(\alpha,\beta)\in\Delta_j \qquad \text{tel que}$$

$$U_{j,\alpha,\beta}\supseteq\{(t',x')\in S_j : |t'-t|+||x'-x||\leq(1+\mu)\varepsilon_j\}$$

Quitte à redécouper chaque K_j en un nombre fini d'ouverts fermés relatifs de diamètre inférieur à ε_j, il existe alors un recouvrement fini de B_0 en fermés $(X_{j,\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\Delta_j}$ tel que, en notant $\theta_j=\min(K_j)$,

$$\forall x_0\in X_{j,\alpha,\beta}\ \forall(t,x)\in S_j \quad ||x-x_0|\leq\mu|t-\theta_j|\Rightarrow(t,x)\in U_{j,\alpha,\beta}$$

En particulier, si $u:[0,T]\to E$ est une fonction lipschitzienne nulle en 0 et vérifiant presque partotut $\frac{du}{dt}\in Y$, on a pour tout j et tout (α,β) dans Δ_j

$$u(\theta_j)\in X_{j,\alpha,\beta}\Rightarrow\forall t\in K_j \qquad (t,u(t))\in U_{j,\alpha,\beta} \tag{2}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que (ε_j) tend vers 0, donc que l'ensemble des (θ_j) est dense dans $[0,T]$.

LEMME 2. *Soient P un espace polonais, $\tilde D$ une partie dense de $[0,1]\times[0,1]$ et $\tilde f$ une fonction de $P\times[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ tels que*

$$\begin{cases} i)\ \tilde f(s,\cdot) \text{ est continue pour tout } s\in P\\ ii)\ \tilde f(s,0)<0<\tilde f(s,1) \text{ pour tout } s\in P\\ iii)\ \forall(y_0,y_1)\in\tilde D\ \{s\in P:\tilde f(s,y_0)<0<\tilde f(s,y_1)\} \text{ est ouvert}\end{cases}$$

Alors il existe un espace polonais Q, un $\mathcal{G}_\delta$, G, de $P \times [0,1]$, une surjection propre π de G sur Q et une multifonction s.c.i. Φ, à valeurs fermées non vides, de P dans Q tels que, pour touts s dans P et tout q dans $\Phi(s)$, $\pi^{-1}(q)$ soit une partie connexe compacte de $\{s\} \times [0,1]$ contenue dans $\{(s,y) : \tilde{f}(s,y) = 0\}$.

Preuve. On pose, pour n entier:

$$W_n = \left\{ \begin{array}{c} (s,y) : \exists U \text{ ouvert de } S \text{ de diamètre } < \frac{1}{n}, \exists (y_0, y_1) \in \tilde{D} \text{ avec} \\ s \in U \text{ et } y_0 < y < y_1 \text{ et } \forall s^* \in U \tilde{f}(s^*, y_0) < 0 < \tilde{f}(s^*, y_1) \\ \text{et } \left[\exists s^* \in U \ \forall y^* \ y_0 + \frac{1}{n} \leq y^* \leq y_1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \tilde{f}(s^*, y^*) = 0 \right] \end{array} \right\}$$

qui est clairement un ensemble ouvert, et on définit $G = \bigcap_n W_n$. Cet ensemble est un $\mathcal{G}_\delta$.

On a alors les propriétés suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \forall s \in S \ \exists y \ (s,y) \in G \\ \text{b) } \forall (s,y) \in G \ \tilde{f}(s,y) = 0 \\ \text{c) si } \{s\} \times]y_0, y_1[\subset G, \{s\} \times [y_0, y_1] \subset G \end{array} \right.$$

a) Puisque $\tilde{f}(s,\cdot)$ est continue, l'ensemble des intervalles $[y_0, y_1]$ tels que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists (y_0', y_1') \in]y_0 - \varepsilon, y_0[\times]y_1, y_1 + \varepsilon[\text{ avec } \tilde{f}(s, y_0') < 0 < \tilde{f}(s, y_1')$$

est non vide d'après l'hypothèse ii) et inductif pour $\supset$. Un intervalle minimal vérifie nécessairement $\forall y \in [y_0, y_1] \ \tilde{f}(s,y) = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists y_n' \in \left] y_0 - \frac{1}{n}, y_0 \right[\exists y_n'' \in \left] y_1, y_1 + \frac{1}{n} \right[\ (y_n', y_n'') \in \tilde{D}$$

et

$$\tilde{f}(s, y_n') < 0 < \tilde{f}(s, y_n''),$$

d'où l'existence d'un ouvert U_n contenant s et de diamètre $< \dfrac{1}{n}$ tel que

$$\forall s^* \in U_n \ \tilde{f}(s^*, y'_n) < 0 < \tilde{f}(s^*, y''_n).$$

Donc, pour tout entier n et tout y de $[y_0, y_1]$, $(s, y) \in W_n$, c'est-à-dire $\{s\} \times [y_0, y_1] \subset G$.

b) Supposons, par exemple $(s, y) \in G$ et $\tilde{f}(s, y) > 0$. Alors

$$y'_0 = \sup\{z < y : \tilde{f}(s, z) \leq 0\} < y.$$

Il existe (y_0, y_1) dans $\tilde{D}$ tel que $y_0 < y'_0 < y_1 < y$ et $\tilde{f}(s, y_0) < 0 < \tilde{f}(s, y_1)$, donc un n tel que

$$d(s, s') < \frac{1}{n} \Rightarrow \tilde{f}(s', y_0) < 0 < \tilde{f}(s', y_1)$$

et

$$\frac{1}{n} < \inf(y - y_1, y_1 - y'_0)$$

et enfin, puisque (s, y) est dans G, un ouvert U contenant s et s^* et de diamètre $< \dfrac{1}{n}$, et $(y''_0, y''_1) \in \tilde{D}$ avec

$$\begin{cases} y''_0 < y < y''_1 \\ \tilde{f}(s^*, z) = 0 \quad \text{si } y''_0 + \dfrac{1}{n} < z < y''_1 - \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Alors $d(s, s^*) < \dfrac{1}{n}$, d'où $\tilde{f}(s^*, y_1) > 0$. Mais $y_1 < y - \dfrac{1}{n} < y''_1 - \dfrac{1}{n}$, $\tilde{f}(s, y'_0) < 0$ et $y''_0 < y$, d'où $y''_0 < y_0 < y'_0$, et $y_1 > y'_0 + \dfrac{1}{n} > y''_0 + \dfrac{1}{n}$, donc $\tilde{f}(s^*, y_1) = 0 < \tilde{f}(s^*, y_1)$. Cette contradiction prouve b).

c) Enfin, si $G \supset \{s\} \times]y_0, y_1[$, on a, d'après b), pour y dans $[y_0, y_1]$, $\tilde{f}(s, y) = 0$. Donc, pour tout entier n, il existe U_n et $(y'_n, y''_n) \in \tilde{D}$ tels que

$$U_n \times]y'_n, y''_n[\subset W_n, \ y'_n < \frac{y_0 + y_1}{2} < y''_n, \ \tilde{f}(s, y'_n) < 0 < \tilde{f}(s, y''_n)$$

On a alors $y'_n < y_0 < y_1 < y''_n$, d'où $\{s\} \times [y_0, y_1] \subset W_n$.

On introduit ensuite une relation d'equivalence $\sim$ sur G en posant:

$$(s, y) \sim (s', y') \leftrightarrow (s = s' \text{ et } \{s\} \times [y, y'] \subset G).$$

D'après c) ci-dessus, les classes d'équivalence sont de la forme $\{s\} \times [y_0, y_1]$, donc compactes. De plus, si F est un fermé de G et F^* son saturé, F^* est fermé dans G. En effet, si (s, y) est adhérent à F^*, il existe une suite $((s_k, y_k))$ dans F^* qui converge vers (s, y), donc une suite $((s_k, z_k))$ dans F avec $(s_k, y_k) \sim (s_k, z_k)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que (z_k) tend vers $z \in [0, 1]$. Il suffit de montrer qu'alors (s, z) est dans G et équivalent à (s, y). En effet (s, z) sera dans F et (s, y) dans F^*.

Puisque (s, y) est dans G, il existe pour tout n un ouvert U_n de P et (y'_n, y''_n) dans $\tilde{D}$ avec $s \in U_n$, $y'_n < y < y''_n$, $\tilde{f}(s^*, y'_n) < 0$ et $\tilde{f}(s^*, y''_n) > 0$ si $s^* \in U_n$. Pour k assez grand, $s_k \in U_n$ et $y_k \in]y'_n, y''_n[$. Et puisque $\tilde{f}$ est nulle sur $\{s\} \times [y_k, z_k]$, on a

$$[y_k, z_k] \cap \{y'_n, y''_n\} = \emptyset, \text{ d'où } z_k \in]y'_n, y''_n[.$$

Il en résulte que pour tout n, z appartient à $[y'_n, y''_n]$. Donc, pour tout $\lambda \in]0, 1]$:

$$\lambda y + (1 - \lambda) z = \lim_k (\lambda y_k + 1(1 - \lambda) z_k)$$

vérifie $\lambda y + (1 - \lambda) z \in]y'_n, y''_n[$, d'où $(s, \lambda y + (1 - \lambda) z) \in W_n$. On en conclut que G contient $\{s\} \times [y, z[$, donc $\{s\} \times [y, z]$ d'après c) ci-dessus, et donc que $(s, y) \sim (s, z)$. On notera Q le quotient de G par cette relation d'équivalence, et π la projection canonique.

Si (C_n) est une base de la topologie de G, et si on pose, pour toute partie finie J de $\mathbb{N}$:

$$C_J^* = \{(s, y) \in G : \forall z [(s, y) \in G \text{ et } (s, z) \sim (s, y)] \Rightarrow (s, z) \in \bigcup_{n \in J} C_n\}$$

on voit sans peine que C_J^* est un ouvert saturé, et que la famille des C_J^* est une base dénombrable de la topologie quotient sur Q. On voit de même que Q est régulier. Il en résulte que Q est métrisable séparable et que π est propre de G sur Q.

Utilisant alors des compactifications métrisables $\hat{G}$ et $\hat{Q}$ de G et Q telles que π se prolonge continuement, on voit que $\hat{Q}\backslash Q = \pi(\hat{G}\backslash G)$, car π est propre. Donc, puisque $\hat{G}\backslash G$ est un K_σ, $\hat{Q}\backslash Q$ est un K_σ et Q est un $\mathcal{G}_\delta$ de $\hat{Q}$, donc polonais.

Si C est, dans Q, un voisinage de la classe de (s, y), $\pi^{-1}(C)$ est un voisinage de cette classe, soit $\{s\} \times [y_0, y_1]$, dans G. Il existe donc un $\varepsilon > 0$ et un ouvert U de P contenant s tels que

$$\pi^{-1}(C) \supset U \times]y_0 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon[.$$

Il existe donc y'_1 dans $]y_1, y_1 + \varepsilon[$ tel que $(s, y'_1) \notin G$, donc un voisinage U' de s et (z'_1, z''_1) dans $\tilde{D}$ avec $z'_1 < y_1 < z''_1 < y'_1 < y_1 + \varepsilon$ et $\tilde{f}(s^*, z''_1) < 0$ si $s^* \in U'$. Il existe de même U'' voisinage de s et $(z'_0, z''_0) \in \tilde{D}$ avec $y_0 - \varepsilon < z'_0 < y_0 < z''_0$ et $\tilde{f}(s^*, z'_0) < 0$ si $s^* \in U''$, donc $(y''_0, y''_1) \in \tilde{D}$ avec

$$y_0 - \varepsilon < y''_0 < y_0 \leq y_1 < y''_1 < y_1 + \varepsilon$$

et $\tilde{f}(s, y''_0) < 0 < \tilde{f}(s, y''_1)$. On en déduit l'existence d'un voisinage ouvert U^* de s tel que

$$\forall s^* \in U^* \ \tilde{f}(s^*, y''_0) < 0 < \tilde{f}(s^*, y''_1).$$

Alors $G \cap ((U \cap U^*) \times]y''_0, y''_1[) \subset \pi^{-1}(C)$ et on voit comme dans a) ci-dessus que, pour tout s^* de $U \cap U^*$, il existe $y \in]y''_0, y''_1[$ tel que (s^*, y) est dans G, donc qu'on peut définir une application continue φ de Q dans P par $\varphi \circ \pi(s, y) = s$, puisque l'application $(s, y) \mapsto s$ est continue sur G et constante sur les classes d'equivalence, et que φ est ouverte.

Il en résulte que la multifonction $\Phi = \varphi^{-1}$ est s.c.i., à valeurs fermées et non vides puisque φ est surjective. On conclut de ce qui précède que si $q \in \Phi(s)$, $\pi^{-1}(q)$ est la classe d'un élément (s, y) de G, c'est-à-dire est de la forme $\{s\} \times [y_0, y_1]$, qui est connexe et compacte et sur laquelle $\tilde{f}$ est nulle.

On note maintenant Γ le cône convexe de $\mathbb{R} \times E$ défini par

$$\Gamma = \{(t,x) : \|x\| \leq (\mu + 1)t\}$$

et on définit, comme A. Bressan ([1]), la Γ-topologie sur $\mathbb{R} \times E$ comme la topologie pour laquelle une base de voisinages de (s,a) est la famille des $(W_{s,a,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$, où l'on a posé:

$$W_{s,a,\varepsilon} = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times E : (t,x) - (s,a) \in \Gamma \text{ et } t - s < \varepsilon\}$$

Cette topologie est plus fine que la topologie usuelle sur $\mathbb{R} \times E$ et les ensembles $W_{s,a,\varepsilon}$ sont ouverts et fermés en Γ-topologie. On a d'abord le résultat suivant:

LEMME 3. *Si V est un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, V est la réunion d'une famille dénombrable d'ouverts fermés de la Γ-topologie.*

Preuve. Si S est une partie dénombrable dense de $\mathbb{R} \times E$, on voit aisément que, pour tout (t,x) de V, il existe un entier k et un (s,a) de S tels que $W_{s,a,2^{-k}}$ contienne (t,x) et soit inclus dans V. Ceci montre que V est la réunion d'une sous-famille de la famille dénombrable des $W_{s,a,2^{-k}}$ où (s,a) appartient à S et k à $\mathbb{N}$, donc achève la démonstration.

On peut alors généraliser à ce cadre le théorème 2.1 de A. Bressan ([1]).

THEOREME 4. *Soient X une partie de $\mathbb{R} \times E$ et Φ une multiapplication s.c.i. définie sur X à valeurs fermées non vides dans un espace polonais Q. Alors Φ possède une sélection, g, qui est Γ-continue de X dans Q.*

Preuve. Comme dans la démonstration du théorème de sélection de Michael, on construit par récurrence une suite (g_n) de sélections approchées Γ-localement constantes de Φ, vérifiant, pour une distance d rendant Q complet et de diamètre inférieur à 1:

$$\begin{cases} \forall x \in X \; d(g_n(x), \Phi(x)) < 2^{-n} \\ \forall x \in X \; d(g_n(x), g_{n+1}(x)) < 2^{-n} \end{cases}$$

Pour cela, on prend pour g_0 une fonction constante quelconque sur X. Puis, si g_n est déterminée et si X_1 est une partie de X ouverte et fermée en Γ-topogie sur laquelle g_n est constante, on peut trouver, en vertu de la semi-continuité de Φ, un recouvrement dénombrable $(U_{n,p})_p$ de X_1 en ouverts de $\mathbb{R} \times E$ pour la topologie ordinaire et une suite (y_p) de points de Q tels que:

$$\begin{cases} \forall x \in U_{n,p} \cap X_1 \ d(y_p, \psi(x)) < 2^{-n-1} \\ \forall p \forall x \in X_1 \ d(y_p, g_n(x)) < 2^{-n} \end{cases}$$

D'après le lemme précédent, X_1 est donc recouvert par une famille dénombrable d'ouverts fermés de $\mathbb{R} \times E$ pour la Γ-topologie, qu'on énumère en une suite $(Z_j)_{j \in \mathbb{N}}$, et il existe une suite $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de points de Q tels que:

$$\begin{cases} \forall x \in Z_j \cap X_1 \ d(z_j, \Phi(x)) < 2^{2-n-1} \\ \forall j \in \mathbb{N} \ \forall x \in X_1 \ d(z_j, g_n(x)) < 2^{-n} \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à poser, pour tout entier j:

$$Z'_j = Z_j \setminus \bigcup_{k<j} Z_k$$

et à définir g_{n+1} sur X_1 par:

$$\forall j \in \mathbb{N} \ \forall x \in X_1 \cap Z'_j \ g_{n+1}(x) = z_j$$

pour obtenir sur X_1 la fonction g_{n+1} cherchée. On construit de même la fonction g_{n+1} sur chacun des Γ-ouverts-fermés où g_n est constante. Alors, la suite (g_n) converge uniformément sur X vers une fonction g qui est Γ-continue et qui est une sélection de Φ.

LEMME 5. *Soient $j \in \mathbb{N}$ et $(\alpha, \beta) \in \Delta_j$. Il existe une multifonction $g_{j,\alpha,\beta}$ sur $U_{j,\alpha,\beta}$ à valeurs convexes compactes non vides dans $[0,1]$, qui est s.c.s. pour la Γ-topologie, et qui vérifie:*

$$\forall y \in g_{j,\alpha,\beta}(t,x) \ f(t,x,y\beta + (1-y)\alpha) = 0$$

Preuve. Pour $P = U_{j,\alpha,\beta}$, et $\tilde{f}((t,x),y) = f(t,x,y\beta + (1-y)\alpha)$, les conditions du lemme 2 sont vérifiées. Il existe donc Q, π et Φ vérifiant les conclusions de ce lemme. Alors, par le théorème précédent, il existe une sélection Γ-continue de Φ, $g^* : P \to Q$. Et $g_{j,\alpha,\beta} = \pi^{-1} \circ g^*$ satisfait la condition du lemme 5.

THEOREME 6. *Soit p dans $\mathbb{N}$. Il existe un σ dans $\prod_{j \leq p} \Delta_j$ et une fonction lipschitzienne $u_p : [0,T] \to B_0$ tels que*

$$\begin{cases} u_p(0) = 0 & \\ u_p'(t) \in Y & \textit{pour presque tout } t \in [0,T] \\ u_p(\theta_j) \in X_{j,\sigma(j)} & \textit{si } j \leq p \\ u_p'(t) \in g_{j,\sigma(j)}(t, u_p(t)) & \textit{pour presque tout } t \in K_j,\ j \leq p \end{cases}$$

Preuve. Notons τ la permutation de $\{0,1,2,\ldots,p\}$ telle que, pour tout $j < p$, $\theta_{\tau(j)} < \theta_{\tau(j+1)}$, et posons $T_j = \theta_{\tau(j)}$ pour $j \leq p$, et $T_{p+1} = T$. Si $T_0 > 0$, on choisit y_0 arbitraire dans Y et on pose $u(t) = ty_0$ pour $0 \leq t \leq T_0$. Il existe donc un j maximal dans $[0, p+1]$ pour lequel existent une fonction u sur $[0,T_j]$ et $\sigma \in \Pi\{\Delta_i : i \leq p, T_i < T_j\}$ satisfaisant

$$\begin{cases} u(0) = 0 & \\ u'(t) \in Y & \text{pour presque tout } t \in [0,T_j] \\ u(\theta_i) \in X_{i,\sigma(i)} & \text{si } i \leq p \text{ et } T_i < T_j \\ u'(t) \in g_{i,\sigma(i)}(t, u(t)) & \text{pour presque tout } t \in K_i \cap [0,T_j] \end{cases}$$

Si $j = p+1$, le théorème est démontré. Si $j \leq p$, on peut choisir $\sigma(j)$ tel que $u(T_j) \in X_{j,\sigma(j)}$. Soit ρ une rétraction continue de E sur le convexe fermé B_0. On considère alors sur $[T_j, T_{j+1}] \times E$ l'inclusion différentielle:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} \in \Psi(t, \rho(x)) \\ x(T_j) = u(T_j) \end{cases}$$

où on note, pour $(t, x) \in [T_j, T_{j+1}] \times B_0$,

$$\begin{cases} \Psi(t,x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \psi_{i,\varepsilon}(t,x) \text{ si } t \in K_i, (t,x) \in U_{i,\sigma(i)} \\ \qquad\quad = Y \text{ si } t \notin \bigcup_1^p K_i \text{ ou } t \in K_i \text{ et } (t,x) \notin U_{i,\sigma(i)} \end{cases}$$

en posant

$$\Psi_{i,\varepsilon}(t,x) = \overline{\operatorname{conv}(\cup\{g_{i,\sigma(i)}(t',x') : t' \in K_i, |t'-t| < \varepsilon,\ ||x'-x|| < \varepsilon\})}$$

Puisque Ψ est à valeurs convexes compactes contenues dans le compact Y, et s.c.s. sur chaque $K_j \times B_0$, donc mesurable en t et s.c.s. en x, il existe une solution v sur $[T_j, T_{j+1}]$ On prolonge alors la fonction u sur $[0, T_j]$ en la fonction u^* sur $[0, T_{j+1}]$ égale à v sur $[T_j, T_{j+1}]$. Etant donné la définition de B_0 et puisque u^* a presque partout une dérivée dans Y, les valeurs prises par u^* sur $[0, T_{j+1}]$ restent dans B_0. On a donc, pour presque tout t inférieur à T_{j+1}

$$\frac{du^*}{dt} \in \Psi(t, u^*(t))$$

Alors l'ensemble

$$N = \left\{t : \frac{dv}{dt} \text{ n'existe pas ou } \frac{dv}{dt} \notin \Psi(t, v(t))\right\}$$

est négligeable. Puisque u^* est μ-lipschitzienne à dérivée dans Y, et que, pour $T_i \leq T_j$, $u^*(T_i) \in X_{t,\sigma(i)}$, on a $u^*(t) \in U_{i,\sigma(i)}$ pour $t \in K_i \cap [0, T_{j+1}]$, d'après (2).

Si h est une fonction intégrable sur $[T_j, T_{j+1}]$, on a $\lim_{n\to\infty} ||h_n - h||_1 = 0$; où $h_n(t) = h\left(t + \dfrac{1}{n}\right)$. Il existe donc une suite extraite (n_k) telle que

$$\sum_k ||h_{n_k} - h||_1 < +\infty,$$

c'est-à-dire $h_{n_k}(t) \to h(t)$ pour presque tout t de $[T_j, T_{j+1}]$. Par extractions successives, on voit donc que si $(h^{(m)})$ est une suite de fonctions intégrables, il existe une suite (n_k) telle que, pour presque tout t

$$\forall m \ h^{(m)}(t) = \lim_{k\to 0} h^{(m)}\left(t + \frac{1}{n_k}\right).$$

Appliquant ceci à $\frac{du^*}{dt}$ et aux fonctions caractéristiques 1_{K_i} et 1_N de K_j et N, on obient pour presque tout t_0 de $K_i \cap [T_j, T_{j+1}]$:

$$\begin{cases} t_0 \notin N;\ t_0 + \dfrac{1}{n_k} \notin N \text{ pour } k \text{ grand} \\ t_0 + \dfrac{1}{n_k} \in K_i \text{ pour } k \text{ grand} \\ \dfrac{du^*}{dt}\left(t_0 + \dfrac{1}{n_k}\right) \to \dfrac{du^*}{dt}(t_0) \end{cases}$$

Alors, pour un tel t_0, tout Γ-voisinage de $(t_0, u^*(t_0))$ dans $K_i \times B_0$ est un voisinage pour la topologie usuelle de chacun des $\left(t_0 + \frac{1}{n_k}, u^*\left(t_0 + \frac{1}{n_k}\right)\right)$ pour k assez grand, dans $K_i \times B_0$. Puisque $g_{i,\sigma(i)}$ est Γ-s.c.s. et que $g_{i,\sigma(i)}(t_0, u^*(t_0))$ possède une base de voisinages convexes, tout voisinage de $g_{i,\sigma(i)}(t_0, u^*(t_0))$ contient les $\Psi\left(t_0 + \frac{1}{n_k}, u^*\left(t_0 + \frac{1}{n_k}\right)\right)$ pour tout k assez grand, donc contient $\frac{du^*}{dt}(t_0)$. Il en résulte que j n'était pas maximal.

Preuve du Théorème 1.

On choisit pour tout p un $\sigma^{(p)}$ et un u_p vérifiant les propriétés du théorème 6. On peut extraire des sous-suites, notées encore $(\sigma^{(p)})$ et (u_p), de sorte que pour un $\sigma \in \prod_0^\infty \Delta_j$, on ait:

$$\begin{cases} \forall j \in \mathbb{N}\ \forall p \geq j\, \sigma^{(p)}(j) = \sigma(j) \\ \forall j \in \mathbb{N}\ u_p(\theta_j) \to l_j \in B_0 \end{cases}$$

en vertu de la compacité de $\prod_0^\infty \Delta_j$ et de B_0. Puisque les (u_p) sont μ-lipschitziennes, on a

$$||l_j - l_i|| \leq \mu|\theta_j - \theta_i|$$

pour tout i et tout j, et puisque les (θ_j) sont denses dans $[0, T]$, il existe une unique fonction μ-lipschitzienne $u : [0, T] \to B_0$, telle que $u(\theta_j) = l_j$.

Puisque Y est compact, l'ensemble des (u'_p) est faiblement relativement compact dans $L^2([0, T], E)$. Et si v est une valeur d'adhérence faible de (u'_p), on a:

$$\int_0^{\theta_i} v(t)dt = \lim_{p\to\infty} \int_0^{\theta_i} u'_p(t)dt = \lim_{p\to\infty} u_p(\theta_i) = u(\theta_i)$$

d'où l'unicité de v et le fait que $v = \dfrac{du}{dt}$ presque partout. Donc (u'_p) tend faiblement vers u'. Il existe donc une suite (v_p) telle que

$$u_p \in \operatorname{conv}\{u'_q : q \geq p\}$$

qui converge presque partout vers u'.

Utilisant la même méthode que plus haut, on trouve une suite (n_k) d'entiers telle que, pour presque tout t_0 de K_i, on ait

$$\begin{cases} t_0 + \dfrac{1}{n_k} \in K_i \text{ pour } k \text{ grand} \\ \forall k \;\; v_p\left(t_0 + \dfrac{1}{n_k}\right) \to u'\left(t_0 + \dfrac{1}{n_k}\right) \text{ quand } p \to \infty \\ u'(t_0) = \lim_{k\to\infty} u'\left(t_0 + \dfrac{1}{n_k}\right) \\ \forall k \forall p \;\; u'_p\left(t_0 + \dfrac{1}{n_k}\right) \in g_{i,\sigma(i)}\left(t_0 + \dfrac{1}{n_k}, u\left(t_0 + \dfrac{1}{n_k}\right)\right) \end{cases}$$

Soit alors Z un voisinage convexe fermé de $g_{i,\sigma(i)}(t_0, u(t_0))$. Il existe alors un voisinage C de $\{(t_0, u(t_0))\} \times g_{i,\sigma(i)}(t_0 u(t_0))$ dans G tel que $\pi^{-1}(C) \subset Z$, donc un Γ-voisinage A de $(t_0, u(t_0))$ dans $K_i \times B_0$ tel que

$$(t, x) \in A \Rightarrow g^*(t, x) \in C \Rightarrow g_{i,\sigma(i)} \in Z.$$

Ce Γ-voisinage de $(t_0, u(t_0))$ est, pour la topologie ordinaire un voisinage de chacun des points $\left(t_0 + \frac{1}{n_k}, u\left(t_0 + \frac{1}{n_k}\right)\right)$ pour $k \geq k_0$, donc de chacun des points $\left(t_0 + \frac{1}{n_k}, u_p\left(t_0 + \frac{1}{n_k}\right)\right)$ pour $k \geq k_0$ et $p \geq p(k)$. Il en résulte que

$$\forall k \geq k_0 \forall p \geq p(k)\ u'_p\left(t_0 + \frac{1}{n_k}\right) \in g_{i,\sigma(i)}\left(t_0 + \frac{1}{n_k}, u_p\left(t_0 + \frac{1}{n_k}\right)\right) \subset Z$$

donc

$$\forall k \geq k_0 \forall p \geq p(k)\ v_p\left(t_0 + \frac{1}{n_k}\right) \in \operatorname{conv}\left(\left\{u'_q\left(t_0 + \frac{1}{n_k}\right) : q \geq p\right\}\right) \subset Z$$

donc

$$\forall k \geq k_0\ \frac{du}{dt}\left(t_0 + \frac{1}{n_k}\right) = \lim_{p\to\infty} v_p\left(t_0 + \frac{1}{n_k}\right) \in \bar{Z} = Z$$

et

$$\frac{du}{dt}(t_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{du}{dt}\left(t_0 + \frac{1}{n_k}\right) \in \bar{Z} = Z$$

D'où pour presque tout $t_0 \in K_i$,

$$\frac{du}{dt}(t_0) \in g_{i,\sigma(i)}(t_0, u(t_0)),$$

c'est-à-dire

$$f(t_0, u(t_0), \frac{du}{dt}(t_0)) = 0$$

Ceci achève la démonstration, puisque $[0, T] \setminus \bigcup_i K_i$ est négligeable.

On va maintenant montrer sur un exemple que, sans hypothèse supplémentaire, la condition de convexité de Y ne peut être enlevée.

On va prendre E de dimension 2, et f de la forme

$$f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = g\left(\frac{dx}{dt}\right) - h(x)$$

avec g et h continues, ce qui assurera la validité de la condition b'), ainsi que la continuité de f par rapport à y.

On pose donc $E = \mathbb{C}$, et on prend pour Y la réunion du demi-cercle unité situé dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq 0\}$, et de la partie du segment $[-2i, +2i]$ extérieure au disque unité, c'est-à-dire

$$Y = \left\{e^{i\alpha} : -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq +\frac{\pi}{2}\right\} \cup \{it : 1 \leq |t| \leq 2\}$$

On note K l'ensemble triadique de Cantor

$$K = \left\{\sum_{1}^{\infty} 2c_i 3^{-i} : (c_i) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\right\}$$

puis $\mathcal{J}$ l'ensemble des intervalles contigus à K, c'est-à-dire

$$\mathcal{J} = \{]\alpha, \beta[: \alpha \in K,\ \beta \in K, K \cap]\alpha, \beta[= \emptyset\}.$$

Enfin, pour un intervalle $J =]\alpha, \beta[\in \mathcal{J}$, on note $\nu(J)$ l'entier $k \geq 1$ tel que J soit de longueur 3^{-k}.

On définit

$$g(y) = (\Im y - 1)_+ - (\Im y + 1)_-$$

$$h(x) = \varphi(|x|)$$

avec

$$\begin{cases} \varphi(t) = 0 & \text{si } t \geq 1 \\ \varphi(t) = 0 & \text{si } t \in K \\ \varphi(t) = (-1)^{\nu(J)}(\beta - t)(t - \alpha) & \text{si } t \in J =]\alpha, \beta[\in \mathcal{J} \end{cases}$$

On vérifie sans peine que la fonction φ prend sur $\mathbb{R}^+$ des valeurs majorées en valeur absolue par $\dfrac{1}{36}$. Il en résulte que, pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a

$$g(2i) - h(x) > 0 \text{ et } g(-2i) - h(x) < 0.$$

Donc la condition a) est vérifiée.

LEMME 7. *Si u est une solution de l'équation différentielle*

$$(3) \qquad \begin{cases} g\left(\dfrac{dx}{dt}\right) - h(x) = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$]\alpha, \beta[$ un élément de $\mathcal{J}$, si t_0 vérifie $u(t_0) = \alpha$ et si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists t \in]t_0 - \varepsilon, t_0[\ |u(t)| < \alpha$$

alors $u(t_0)$ est réel.

Preuve. Supposons que $\Im u(t_0)$ n'est pas nul. Puisque u est une solution, on a, pour presque tout t, $u'(t) \in Y$, donc $|u'(t)| \leq 2$. Alors, pour $t < t_0$, on a:

$$|u(t) - u(t_0)| \leq 2|t - t_0|,$$

donc

$$\begin{aligned} \left|\frac{u(t)}{|u(t)|} - \frac{u(t_0)}{|u(t_0)|}\right| &\leq \frac{|u(t) - u(t_0)|}{|u(t_0)|} + |u(t)| \cdot \left|\frac{|u(t_0)| - |u(t)|}{|u(t)| \cdot |u(t_0)|}\right| \\ &\leq 2\left|\frac{u(t) - u(t_0)}{u(t_0)}\right| \leq \frac{4}{\alpha}|t - t_0| \end{aligned}$$

Si J_1 est un élément de $\mathcal{J}$ et si $u(t^*)$ appartient à J_1, l'équation differentielle est localement lipschitzienne au voisinage de t^*. Donc u est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de t^*, et on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|u(t)| &= \frac{\Re(u(t) \cdot \overline{u'(t)})}{|u(t)|} \\ &\leq \Re\left(\frac{u(t_0) \cdot \overline{u'(t)}}{|u(t_0)|}\right) + 2\frac{4}{\alpha} \cdot |t - t_0| \\ &\leq (-1)^{\nu(J_1)}|u'(t)| \cdot \Im\left(\frac{u(t_0)}{|u(t_0)|}\right) + \frac{8}{\alpha} \cdot |t - t_0| \end{aligned}$$

Choissisant un ε tel que

$$\frac{8}{\alpha} \cdot \varepsilon < \frac{|\Im u(t_0)|}{|u(t_0)|}$$

on peut trouver un t_1 dans $]t_0 - \varepsilon, t_0[$ tel que $|u(t_1) < \alpha$, donc un J_1 dans $\mathcal{J}$ tel que $(-1)^{\nu(J_1)} \cdot \Im u(t_0) < 0$ et $\bar{J}_1 \subset]u(t_1), \alpha[$. On choisit alors un s dans J_1 et on pose

$$t_2 = \sup\{t \in]t_1, t_0[: |u(t)| \leq s\}$$

Puisque $u'(t)$ appartient à Y, on a $1 \leq |u'(t)| \leq 2$, donc

$$t_0 - \varepsilon < t_1 < t_2 < t_0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}|u|(t_2) < 0$$

Donc il existe un $\eta > 0$, inférieur à $t_0 - t_2$, tel que

$$|u(t_2 + \eta)| < |u(t_2)| \leq s$$

contrairement à la définition de t_2. Cette contradiction achève la démonstration.

De même, si $|u(t_0)| = \beta$ et si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un t dans $]t_0, t_0 + \varepsilon[$ pour lequel $|u(t)| > \beta$, $u(t_0)$ est réel.

LEMME 8. *Soit $J =]\alpha, \beta[$ un élément de $\mathcal{J}$. Si a, b, x et y sont des éléments de $\mathbb{C}$ vérifiant*

$$a = \pm\alpha, \ b = \pm\beta, \ |x| = \alpha, \ |y| = \beta$$

et tels que $x - y$ soit imaginaire pur, on a

$$|x - a| + |y - x| + |b - y| \geq 2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \tag{4}$$

Preuve. Puisque $|x| = \alpha$ et $\Re x = \Re y$, on a $|\Re y| \leq \alpha$, donc $|\Im y| \geq \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$. Et puisqu'on a $|b - y| \geq |\Im y|$ et $|a - y| \geq |\Im y|$, on a

$$|x - a| + |y - x| + |b - y| \geq |a - y| + |b - y| \geq 2|\Im y| \geq 2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$$

ce qui est le résultat cherché.

LEMME 9. *Si $J =]\alpha, \beta[$ est un élément de $\mathcal{J}$ et u est une solution de (3) telle que*

$$u(t_0) < \alpha < \beta < u(t_1),$$

il existe un sous-intervalle $[t'_0, t'_1]$ *de* $[t_0, t_1]$ *avec*

$$\alpha \leq |u(t)| \leq \beta \text{ sur } [t'_0, t'_1] \text{ et } t'_1 - t'_0 \geq \sqrt{2\alpha(\beta - \alpha)}$$

Preuve. On considère les sous-intervalles $[s_0, s_1]$ de $[t_0, t_1]$ qui possèdent la propriété:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists t_0^*, t_1^* \text{ avec } |t_0^* - s_0| < \varepsilon, \ |t_1^* - s_1| < \varepsilon \text{ et } |u(t_0^*)| < \alpha < \beta < |u(t_1^*)|$$

L'ensemble de ces intervalles est clairement inductif pour la relation $\supset$. Si $[t'_0, t'_1]$ est un tel intervalle minimal, il résulte du lemme 7 que $u(t'_0) = \pm\alpha$ et $u(t'_1) = \pm\beta$.

De même, l'ensemble des sous-intervalles de $[t'_0, t'_1]$ qui possèdent la propriété:

$$|u(t'_0| = \alpha \text{ et } |u(t'_1)| = \beta$$

est inductif pour $\supset$. Et si $[t''_0, t''_1]$ est un intervalle minimal, on a nécessairement

$$\forall t \in]t''_0, t''_1[\alpha < |u(t)| < \beta$$

donc, pour tout t de $]t''_0, t''_1[$, $h(u(t)) \neq 0$ et $\Re(u'(t)) = 0$ Il en résulte que $u(t''_1) - u(t''_0)$ est imaginaire pur. De plus, puisque $u'(t) \in Y$, on a $|u'(t)| \leq 2$, donc u est 2-lipschitzienne et

$$\begin{aligned} t'_1 - t'_0 &\geq (t'_1 - t''_1) + (t''_1 - t''_0) + (t''_0 - t'_0) \\ &\geq \frac{1}{2}|u(t'_1) - u(t''_1)| + \frac{1}{2}|(t''_1) - u(t''_0)| + \frac{1}{2}|u(t''_0) - u(t'_0)| \\ &\geq \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = \sqrt{(\beta + \alpha)(\beta - \alpha)} \geq \sqrt{2\alpha(\beta - \alpha)} \end{aligned}$$

en appliquant le lemme 8 à $a = u(t'_0)$, $b = u(t'_1)$, $x = u(t''_0)$ et $y = u(t''_1)$. Ceci achève la démonstration du lemme.

LEMME 10. *Si* $J_0 =]\alpha, \beta[\in \mathcal{J}$ *et si* u *est une solution de l'équation (3), définie sur* $[0, \theta]$ *et vérifiant* $|u(\theta)| = \alpha$, *on a* $|u(t)| \geq \alpha$ *pour* t *dans* $[0, \theta]$.

Preuve Posons $p = \nu(J_0)$. On a donc $\alpha \geq 3^{-p}$; S'il existait un t dans $[0, \theta]$ tel que $|u(t)| < \alpha$, il existerait un $q > p$ tel que

$$]\alpha - 3^{-q}, \alpha[\cap K \subset \{|u(t)| : 0 < t < \theta\}$$

Alors, pour tout entier $m \geq 1$, l'intervalle $]\alpha - 3^{-q}, \alpha[$ contient 2^{m-1} intervalles $J =]\alpha_J, \beta_J[$ contigus à K avec $\nu(J) = m + q$.

Pour chacun d'entre eux, il existe, en vertu du lemme 9, un intervalle $[t_0, t_1]$, inclus dans $[0, \theta]$, avec $|u(t)| \in \bar{J}$ pour $t \in [t_0, t_1]$, et de longuer $l(J)$ telle que

$$l(J) \geq \sqrt{2(\alpha - 3^{-q})(\beta_J - \alpha_J)}$$

$$\geq \sqrt{2(3^{-q+1} - 3^{-q})3^{-m-q}}$$

$$\geq 2 \cdot 3^{-q} \cdot 3^{-\frac{m}{2}}$$

Et puisque ces intervalles ont leurs adhérences deux-à-deux disjointes, on a, pour tout m:

$$\theta \geq \Sigma l(J) \geq 2^{m-1} \cdot 2 \cdot 3^{-q} \cdot 3^{-\frac{m}{2}} = 3^{-q} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^m$$

THEOREME 11. *L'équation différentielle (3), qui vérifie les conditions a) et b') ci-dessus, n'a de solution absolument continue sur aucun intervalle* $[0, T]$ *de longueur non nulle.*

Preuve. On a déjà vu que l'équation (3) vérifie les conditions a) et b'). Si u était une solution de (3) définie sur un intervalle $[0, T]$ de longueur non nulle, il existerait un θ_0 dans $]0, T[$ tel que $u(\theta_0) \neq 0$. Sinon, en effet, la fonction u serait identiquement nulle et sa dérivée n'appartiendrait nulle part à Y. Alors, il existerait un élément $J =]\alpha, \beta[$ de $\mathcal{J}$ tel que $\alpha < |u(\theta_0)|$, donc un θ dans $]0, \theta_0[$ tel que $|u(\theta)| = \alpha$, et on devrait avoir $|u(t)| \geq \alpha$ pour tout t de $[0, \theta]$ en vertu du lemme 10, contrairement à l'hypothèse $u(0) = 0$.

Cette contradiction achève la démonstration. On peut remarquer que les arguments ci-dessus prouvent même que toute solution u de l'équation

$$g\left(\frac{dx}{dt}\right) - f(x) = 0$$

qui prend en un t une valeur de module inférieur à 1 vérifie soit

$$\exists J \in \mathcal{J}\ \forall t\ |u(t)| \in \bar{J}$$

soit

$$\exists \gamma \in K\backslash\{0\} \quad \forall t \quad |u(t)| = \gamma$$

REFERENCES

[1] Bressan A., *Upper and lower semicontinuous differential inclusions. A unified approach,* A paraître dans: Controllability and optimal control, H. Sussmann editor, M. Dekker.

[2] Dellacherie C., *Ensembles analytiques: Théorèmes de séparation et applications,* Séminaire de Probabilités IX Lecture Notes in Mathematics **456**, p. 336-372. Springer Verlag 1975.

[3] Ricceri B., *Solutions lipschitziennes d'équations différentielles sous forme implicite,* C.R.A.S. Paris t. **295** (1982) p. 245-248.

Equipe d'Analyse
Université Paris VI
4, Place Jussieu
75252 Paris Cedex 05