«LE MATEMATICHE»
Vol. XLIV (1989) - Fasc. II, pp. 311-332

TEOREMA DI ESISTENZA PER UN PROBLEMA UNILATERALE DI CAUCHY DEL SECONDO ORDINE

ANGELA GALLO (Napoli) - ANNA MARIA PICCIRILLO (Napoli) (*) (**)

We consider unilateral second order Cauchy problem. We prove an existence theorem.

Siano Ω_1 e Ω_2 aperti di R^n con Ω_1 limitato connesso di classe C^0 e $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$, $V_l (l = 1, 2)$ un sottospazio chiuso di $H^{m_l}(\Omega_l)$ $(m_l \in N_0, m_1 > m_2)$ contenente $H_0^{m_l}(\Omega_l)$, V_l' il duale di V_l. Gli spazi in questione sono supposti reali.

Rilevato che [6]

(1) $$V_1 \subseteq H^{m_2}(\Omega_1) \text{ con immersione compatta,}$$

ammettiamo che esista un operatore $\omega: V_1 \to V_2$ lineare, continuo rispetto alle norme di $H^{m_2}(\Omega_1)$ e V_2, tale che

$$\forall\, z \in V_1 \;\; \omega(z) = z \text{ su } \Omega.$$

(*) Entrato in Redazione il 18-12-1989.
(**) Ricerca effettuata con fondi erogati dal M.P.I.

Siano ancora $\mu \in L^\infty(\Omega_1)$ con $\mu \geq \mu_0$ q.o. su $\Omega_1(\mu_0 = \text{cost.} > 0)$, $q \in L^2(0,T;L^2(\Omega_1))$ $(0 < T < +\infty)$, $a_l(y,z)$ una forma bilineare reale su V_l.

Indicheremo con:

$$(\cdot,\cdot), (\cdot,\cdot)_l \text{ i prodotti scalari in } L^2(\Omega) \text{ e } L^2(\Omega_l),$$

$$|\cdot|, |\cdot|_l, ||\cdot||_l \text{ le norme in } L^2(\Omega), L^2(\Omega_l) \text{ e } V_l,$$

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_l \text{ la dualità tra } V_l \text{ e } V_l',$$

e supporremo che le forme bilineari

$$a_l(y,z)$$

abbiano le seguenti proprietà:

$$a_l(y,z) = a_l(z,y) \quad \forall\, y,z \in V_l,$$

$$a_1(y,y) \geq 0 \quad \forall\, y \in V_1,$$

$$a_1(y,y) + \lambda|y|_1^2 \geq c_1'||y||_1^2 \ \forall\, y \in V_1 (\lambda = \text{cost.} \geq 0,\ c_1' = \text{cost.} > 0),$$

$$a_2(y,y) \geq c_2'||y||_2^2 \ \forall\, y \in V_2 \ (c_2' = \text{cost.} > 0),$$

$$|a_l(y,z)| \leq c_l''||y||_l\,||z||_l \ \forall\, y,z \in V_l \ (c_l'' = \text{cost.} > 0).$$

Denotata con $\mathbf{K}$ la parte chiusa convessa e non vuota di $V_1 \times V_2$

$$\{(z,y) \in V_1 \times V_2 : z \leq y \text{ su } \Omega\}$$

consideriamo il seguente

Problema (P). Assegnati $u_{10} \in V_1$ e $u_{11} \in L^2(\Omega_1)$, trovare $(u_1,u_2) \in [L^2(0,T;V_1) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega_1))] \times L^2(0,T;V_2)$ tale che

$$(u_1(t), u_2(t)) \in \mathbf{K} \text{ q.o. su }]0,T[, \tag{2}$$

$$\mu u_1' \in H^1(0,T;V_1'), \tag{3}$$

$$\langle(\mu u_1')'(t), z - u_1(t)\rangle_1 + a_1(u_1(t), z - u_1(t)) + \tag{4}$$
$$+a_2(u_2(t), y - u_2(t)) \geq (q(t), z - u_1(t))_1 \text{ q.o. }]0, T[\quad \forall\, (z, y) \in \mathbf{K},$$

$$u_1(0) = u_{10}, \tag{5}$$

$$(\mu u_1')(0) = \mu u_{11} \text{ nel senso di } V_1'. \tag{6}$$

Nella presente nota si stabilisce l'esistenza della soluzione del problema (P) (n.2, teor. 2): la dimostrazione si avvale di una formulazione equivalente del medesimo (precisata all'inizio del n.2) e dei risultati relativi al problema penalizzato (P_ε) (n.1, teor.1). Con riferimento a quest'ultimo la dimostrazione dell'esistenza si ispira al metodo di Faedo-Galerkin, che consiste grosso modo nell'approssimare il problema (P_ε) mediante una successione di problemi di Cauchy per sistemi di equazioni differenziali ordinarie. L'impiego di tale metodo presenta una difficoltà: della seconda componente dell'incognita $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$ non figura la derivata rispetto a t. L'ostacolo viene superato costruendo opportunamente un operatore τ_ε che consente di esprimere $u_{2\varepsilon}$ in funzione di $u_{1\varepsilon}$. Tale operatore è altresí determinante per stabilire l'unicità di $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$.

Nel n.3 vengono esaminati due casi particolari del problema (P). Il primo di questi è equivalente ad un problema già studiato da R. Toscano in [8] e di esso si dà un'interpretazione fisica; per il secondo, che fornisce un altro modello matematico della stessa questione fisica, si ottiene un teorema di regolarità (n.3, teor.3).

1. Come già detto poc'anzi, studiamo preliminarmente, per ogni $\varepsilon > 0$, il

Problema (P_ε). Trovare

$$(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \in [L^2(0,T;V_1) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega_1))] \times L^2(0,T;V_2)$$

tale che

$$\mu u_{1\varepsilon}' \in H^1(0,T;V_1'), \tag{7}$$

$$\begin{aligned}(8)\qquad &\langle(\mu u'_{1\varepsilon})'(t), z\rangle_1 + a_1(u_{1\varepsilon}(t), z) + \frac{1}{\varepsilon}([u_{1\varepsilon}(t) - u_{2\varepsilon}(t)]^+, z) = \\ &= (q(t), z)_1 \text{ q.o. su }]0, T[\quad \forall\, z \in V_1,\end{aligned}$$

$$(9)\qquad a_2(u_{2\varepsilon}(t), y) = \frac{1}{\varepsilon}([u_{1\varepsilon}(t) - u_{2\varepsilon}(t)]^+, y) \text{ q.o. su }]0, T[\quad \forall\, y \in V_2,$$

$$(10)\qquad u_{1\varepsilon}(0) = u_{10},$$

$$(11)\qquad (\mu u'_{1\varepsilon})(0) = \mu u_{11} \text{ nel senso di } V'_1.$$

Al fine di conseguire l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema (P_ε) indicheremo, per ogni $z \in L^2(\Omega)$, con $\tau_\varepsilon(z)$ l'elemento di V_2 soluzione dell'equazione variazionale

$$a_2(\tau_\varepsilon(z), y) = \frac{1}{\varepsilon}([z - \tau_\varepsilon(z)]^+, y) \quad \forall\, y \in V_2.$$

L'esistenza e l'unicità di $\tau_\varepsilon(z)$ si deducono dal fatto che l'operatore $B_\varepsilon: V_2 \to V'_2$ definito dalla relazione

$$\langle B_\varepsilon y, w\rangle_2 = a_2(y, w) - \frac{1}{\varepsilon}([z - y]^+, w) \qquad y, w \in V_2$$

è strettamente monotono, limitato, emicontinuo e coercivo ([3], teor. 2.1, pag. 171).

Dalle uguaglianze

$$a_2(\tau_\varepsilon(z_1), \tau_\varepsilon(z_1) - \tau_\varepsilon(z_2)) = \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega [z_1 - \tau_\varepsilon(z_1)]^+(\tau_\varepsilon(z_1) - \tau_\varepsilon(z_2))dx,$$

$$a_2(\tau_\varepsilon(z_2), \tau_\varepsilon(z_1) - \tau_\varepsilon(z_2)) = \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega [z_2 - \tau_\varepsilon(z_2)]^+(\tau_\varepsilon(z_1) - \tau_\varepsilon(z_2))dx,$$

si ricava

$$
\begin{aligned}
c_2'\|\tau_\varepsilon(z_1)-\tau_\varepsilon(z_2)\|_2^2 &\le \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega([z_1-\tau_\varepsilon(z_1)]^+-[z_2-\tau_\varepsilon(z_2)]^+)(\tau_\varepsilon(z_1)-\tau_\varepsilon(z_2))dx \\
&= -\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega([z_1-\tau_\varepsilon(z_1)]^+-[z_2-\tau_\varepsilon(z_2)]^+) \\
&\quad ([z_1-\tau_\varepsilon(z_1)]-[z_2-\tau_\varepsilon(z_2)])dx+ \\
&\quad +\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega([z_1-\tau_\varepsilon(z_1)]^+-[z_2-\tau_\varepsilon(z_2)]^+)(z_1-z_2)dx \le \\
&\le \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega([z_1-\tau_\varepsilon(z_1)]^+-[z_2-\tau_\varepsilon(z_2)]^+)(z_1-z_2)dx \le \\
&\le \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega|z_1-\tau_\varepsilon(z_1)-z_2+\tau_\varepsilon(z_2)|\,|z_1-z_2|dx \le \\
&\le \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega|z_1-z_2|^2dx+\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega|\tau_\varepsilon(z_1)-\tau_\varepsilon(z_2)|\,|z_1-z_2|dy \le \\
&\le \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega|z_1-z_2|^2dx+\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{2\sigma}\int_\Omega|z_1-z_2|^2dx+ \\
&\quad +\frac{\sigma}{2}\|\tau_\varepsilon(z_1)-\tau_\varepsilon(z_2)\|_2^2 \qquad\qquad \forall\,\sigma>0
\end{aligned}
$$

e pertanto

$$
(12) \qquad \tau_\varepsilon \in C^{0,1}(L^2(\Omega),V_2).
$$

Evidentemente, se $(u_{1\varepsilon},u_{2\varepsilon})$ è soluzione del problema (P_ε), risulta

$$
u_{2\varepsilon}=\tau_\varepsilon\circ u_{1\varepsilon},
$$

sicchè, stante la (12)

$$
u_{2\varepsilon}\in C^0([0,T],V_2)
$$

in quanto $u_{1\varepsilon}\in C^0([0,T],L^2(\Omega))$.

Relativamente al problema (P_ε) sussiste il seguente

TEOREMA 1. *Il problema* (P_ε) *ammette una e una sola soluzione* $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$, *e si ha*

$$
(13) \qquad \begin{aligned} &u_{1\varepsilon} \in C^0([0,T], V_1), u'_{1\varepsilon} \in C^0([0,T], L^2(\Omega_1)), \\ &u_{2\varepsilon} \in C^{0,1}([0,T], V_2), \end{aligned}
$$

$$
(14) \qquad \begin{aligned} &\left|\sqrt{\mu}u'_{1\varepsilon}(t)\right|_1^2 + a_1(u_{1\varepsilon}(t), u_{1\varepsilon}(t)) + a_2(u_{2\varepsilon}(t), u_{2\varepsilon}(t)) + \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon}|[u_{1\varepsilon}(t) - u_{2\varepsilon}(t)]^+|^2 = \\ &\quad = \left|\sqrt{\mu}u_{11}\right|_1^2 + a_1(u_{10}, u_{10}) + a_2(u_{2\varepsilon}(0), u_{2\varepsilon}(0)) + \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon}|[u_{10} - u_{2\varepsilon}(0)]^+|^2 + \\ &\quad + 2\int_0^t (q(s), u'_{1\varepsilon}(s))_1 ds \qquad \forall\, t \in [0,T]. \end{aligned}
$$

Dimostrazione. Circa l'unicità, siano $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$ e $(\bar{u}_{1\varepsilon}, \bar{u}_{2\varepsilon})$ soluzioni del problema (P_ε), $w_{l\varepsilon} = u_{l\varepsilon} - \bar{u}_{l\varepsilon})$. Fissato $s \in]0,T]$ e posto

$$
\theta_{l\varepsilon}(t) = \int_s^t w_{l\varepsilon}(\sigma)d\sigma \qquad \forall\, t \in [0,T],
$$

si ha

$$
\begin{aligned} &\int_0^s \langle(\mu w'_{1\varepsilon})'(t), \theta_{1\varepsilon}(t)\rangle_1 dt + \int_0^s a_1(w_{1\varepsilon}(t), \theta_{1\varepsilon}(t))dt + \\ &+ \int_0^s a_2(w_{2\varepsilon}(t), \theta_{2\varepsilon}(t))dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^s ([u_{1\varepsilon}(t) - u_{2\varepsilon}(t)]^+ + \\ &\quad -[\bar{u}_{1\varepsilon}(t) - \bar{u}_{2\varepsilon}(t)]^+, \theta_{1\varepsilon}(t) - \theta_{2\varepsilon}(t))dt = 0. \end{aligned}
$$

Ma

$$
\int_0^s \langle(\mu w'_{1\varepsilon})'(t), \theta_{1\varepsilon}(t)\rangle_1 dt = -\frac{1}{2}\left|\sqrt{\mu}w_{1\varepsilon}(s)\right|_1^2,
$$

$$\int_0^s a_l(w_{l\varepsilon}(t), \theta_{l\varepsilon}(t))dt = -\frac{1}{2}a_l(\theta_{l\varepsilon}(0), \theta_{l\varepsilon}(0)),$$

quindi

$$\begin{aligned}\frac{\mu_0}{2}|w_{1\varepsilon}(s)|_1^2 &\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^s |[u_{1\varepsilon}(t) - u_{2\varepsilon}(t)]^+ - [\bar{u}_{1\varepsilon}(t)- \\ &- \bar{u}_{2\varepsilon}(t)]^+|\,|\theta_{1\varepsilon}(t) - \theta_{2\varepsilon}(t)|dt \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\int_0^s [(|w_{1\varepsilon}(t)| + |w_{2\varepsilon}(t)|)\int_t^s (|w_{1\varepsilon}(\sigma)| + |w_{2\varepsilon}(\sigma)|)d\sigma]dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\left(\int_0^s (|w_{1\varepsilon}(t)| + |w_{2\varepsilon}(t)|)dt\right)^2.\end{aligned} \tag{15}$$

Poichè per la (12)

$$|w_{2\varepsilon}(t)| \leq c|w_{1\varepsilon}(t)| \quad \forall\, t \in [0,T] \ (c = \text{cost.} > 0 \text{ dipend. da } \varepsilon), \tag{16}$$

dalla (15) si deduce che

$$|w_{1\varepsilon}(s)|_1 \leq \text{cost.} \int_0^s |w_{1\varepsilon}(t)|_1 dt,$$

da cui, sfruttando il lemma di Gronwall,

$$w_{1\varepsilon}(s) = 0$$

nonchè

$$w_{2\varepsilon}(s) = 0$$

a causa della (16).

Dimostriamo l'esistenza di $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$ avvalendoci del metodo di Faedo-Galerkin [2]-[5]. Siano $\{z_j\}$ una base di V_1 e, per ogni $m \in N$, V_{1m} il sottospazio generato da $\{z_1, \ldots, z_m\}$. Ammettiamo, senza ledere la generalità, che u_{11} appartenga a V_{11} e indichiamo con $\bar{u}_{1m}$ la proiezione ortogonale di u_{11} su V_{1m} nello spazio $L^2(\Omega_1)$, sicchè:

$$u_{10} = \sum_{j=1}^m \alpha_j z_j \quad (\alpha_j = 0 \text{ per } j > 1), \qquad \bar{u}_{1m} = \sum_{j=1}^m \beta_{jm} z_j,$$

$$\bar{u}_{1m} \to u_{11} \text{ in } L^2(\Omega_1) \text{ per } m \to +\infty. \tag{17}$$

Tenendo presente la (12), si vede che esiste un'unica funzione vettoriale

$$(g_{\varepsilon 1m}, \dots, g_{\varepsilon mn}) \in H^2(0,T;R^m)$$

tale che, qualunque sia $j \in \{1, \dots, m\}$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}(\mu z_i, z_j)_1 g''_{\varepsilon im}(t) + \sum_{i=1}^{m} a_1(z_i, z_j) g_{\varepsilon im}(t) + \\ + \frac{1}{\varepsilon}\left(\left[\sum_{i=1}^{m} g_{\varepsilon im}(t) z_i - \tau_\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} g_{\varepsilon im}(t) z_i\right)\right]^+, z_j\right) = \\ = (q(t), z_j)_1 \text{ q.o. su }]0,T[,\end{aligned}$$

$$g_{\varepsilon jm}(0) = \alpha_j,$$

$$g'_{\varepsilon jm}(0) = \beta_{jm}.$$

Pertanto, posto

$$u_{1\varepsilon m} = \sum_{i=1}^{m} g_{\varepsilon im} z_i, \qquad u_{2\varepsilon m} = \tau_\varepsilon \circ u_{1\varepsilon m}$$

si ha:

$$u_{1\varepsilon m} \in H^2(0,T;V_1), \qquad u_{2\varepsilon m} \in C^{0,1}([0,T], V_2),$$

$$u_{1\varepsilon m}(0) = u_{10}, \qquad u'_{1\varepsilon m}(0) = \bar{u}_{1m}, \qquad u_{2\varepsilon m}(0) = \tau_\varepsilon(u_{10}), \tag{18}$$

$$\begin{aligned}(\mu u''_{1\varepsilon m}(t), z)_1 + a_1(u_{1\varepsilon m}(t), z) + \frac{1}{\varepsilon}([u_{1\varepsilon m}(t) - u_{2\varepsilon m}(t)]^+, z) = \\ = (q(t), z)_1 \text{ q.o. su }]0,T[\qquad \forall\, z \in V_{1m},\end{aligned} \tag{19}$$

$$a_2(u_{2\varepsilon m}(t), y) = \frac{1}{\varepsilon}([u_{1\varepsilon m}(t) - u_{2\varepsilon m}(t)]^+, y) \qquad \forall\, t \in [0,T] \text{ e } \forall\, y \in V_2. \tag{20}$$

Le (19), (20) implicano che, q.o. su $]0,T[$:

$$(\mu u''_{1\varepsilon m}(t), u'_{1\varepsilon m}(t))_1 + a_1(u_{1\varepsilon m}(t), u'_{1\varepsilon m}(t)) + \\ + \frac{1}{\varepsilon}([u_{1\varepsilon m}(t) - u_{2\varepsilon m}(t)]^+, u'_{1\varepsilon m}(t)) = (q(t), u'_{1\varepsilon m}(t))_1,$$

$$a_2(u_{2\varepsilon m}(t), u'_{2\varepsilon m}(t)) = \frac{1}{\varepsilon}([u_{1\varepsilon m}(t) - u_{2\varepsilon m}(t)]^+, u'_{2\varepsilon m}(t)),$$

da cui, portando in conto le (18):

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{\mu}u'_{1\varepsilon m}(t)\right|_1^2 &+ a_1(u_{1\varepsilon m}(t), u_{1\varepsilon m}(t)) + a_2(u_{2\varepsilon m}(t), u_{2\varepsilon m}(t)) + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}|[u_{1\varepsilon m}(t) - u_{2\varepsilon m}(t)]^+|^2 = \\ &= \left|\sqrt{\mu}\bar{u}_{1m}\right|_1^2 + a_1(u_{10}, u_{10}) + a_2(\tau_\varepsilon(u_{10}), \tau_\varepsilon(u_{10})) + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}|[u_{10} - \tau_\varepsilon(u_{10})]^+|^2 + \\ &+ 2\int_0^t (q(s), u'_{1\varepsilon m}(s))_1 ds \qquad \forall\, t \in [0,T]\end{aligned}$$

e di qui

$$\text{(21)} \qquad ||u'_{1\varepsilon m}||_{C^0([0,T],L^2(\Omega_1))} + ||u_{1\varepsilon m}||_{C^0([0,T],V_1)} + ||u_{2\varepsilon m}||_{C^0([0,T],V_2)} \leq c$$

$$(c = \text{cost.} > 0 \text{ indip. da m})$$

in virtù della (17), del lemma di Gronwall e della uguaglianza

$$u_{1\varepsilon m}(t) = u_{10} + \int_0^t u'_{1\varepsilon m}(s)ds \qquad \forall t \in [0,T].$$

La (21) comporta l'esistenza di un elemento $u_{1\varepsilon} \in L^\infty(0,T;V_1)$ con $u'_{1\varepsilon} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))$, tale che, a meno di estratte, per $m \to +\infty$:

$$\text{(22)} \qquad \begin{aligned}&u_{1\varepsilon m} \to u_{1\varepsilon} \text{ in } L^\infty(0,T;V_1) \text{ debolmente } *, \\ &u'_{1\varepsilon m} \to u'_{1\varepsilon} \text{ in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1)) \text{ debolmente } *, \\ &u_{1\varepsilon m} \to u_{1\varepsilon} \text{ in } C^0([0,T],L^2(\Omega_1)).\end{aligned}$$

L'ultima delle (22) si stabilisce utilizzando anche il teorema di Ascoli-Arzelà, che è applicabile in quanto l'immersione di V_1 in $L^2(\Omega_1)$ è compatta.

Se ne deduce, stante la relazione

$$\begin{gathered} ||u_{2\varepsilon m}(t) - u_{2\varepsilon n}(t)||_2 \leq c|u_{1\varepsilon m}(t) - u_{1\varepsilon n}(t)| \\ \forall\, m, n \in N \text{ e } \forall\, t \in [0,T] \ (c = \text{cost. dip. da } \varepsilon), \end{gathered}$$

che esiste un elemento $u_{2\varepsilon} \in C^0([0,T], V_2)$ tale che per $m \to +\infty$:

$$u_{2\varepsilon m} \to u_{2\varepsilon} \text{ in } C^0([0,T], V_2). \tag{23}$$

Verifichiamo che $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$ è la soluzione del problema (P_ε). La (10) è conseguenza immediata della prima delle (18) e della terza delle (22). Per quanto concerne le (7), (8), (9), (11) siano $\varphi \in C_0^\infty(]0,T[)$ e $\psi \in C^1([0,T])$ con $\psi(0) = 1$ e $\psi(T) = 0$. Sussistendo le (19), (20) e la seconda delle (18), dev'essere per ogni $m > j$ e per ognio $y \in V_2$:

$$\begin{gathered} -\int_0^T (\mu u'_{1\varepsilon m}(t), z_j)_1 \varphi'(t)dt + \int_0^T \{a_1(u_{1\varepsilon m}(t), z_j) + \\ + \frac{1}{\varepsilon}([u_{1\varepsilon m}(t) - u_{2\varepsilon m}(t)]^+, z_j) - (q(t), z_j)_1\}\varphi(t)dt = 0, \end{gathered}$$

$$\int_0^T \left\{ a_2(u_{2\varepsilon m}(t), y) - \frac{1}{\varepsilon}([u_{1\varepsilon m}(t) - u_{2\varepsilon m}(t)]^+, y) \right\} \varphi(t)dt = 0,$$

$$\begin{aligned} (\mu \bar{u}_{1m}, z_j)_1 = (\mu u'_{1\varepsilon m}(0), \psi(0) z_j)_1 = -\int_0^T (\mu u''_{1\varepsilon m}(t), \psi(t) z_j)_1 dt + \\ -\int_0^T (\mu u'_{1\varepsilon m}(t), \psi'(t) z_j)_1 dt = \int_0^T a_1(u_{1\varepsilon m}(t), \psi(t) z_j) dt + \\ + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T ([u_{1\varepsilon m}(t) - u_{2\varepsilon m}(t)]^+, \psi(t) z_j) dt - \int_0^T (q(t), \psi(t) z_j)_1 dt + \\ -\int_0^T (\mu u'_{1\varepsilon m}(t), \psi'(t) z_j)_1 dt, \end{aligned}$$

da cui, sfruttando le (17), (22), (23) e l'uguaglianza

$$\overline{\bigcup_{m\in N} V_{1m}} = V_1,$$

si deduce che per ogni $z \in V_1$ e per ogni $y \in V_2$:

$$\begin{aligned}(24)\qquad & -\int_0^T (\mu u'_{1\varepsilon}(t), z)_1 \varphi'(t)dt + \int_0^T \{a_1(u_{1\varepsilon}(t), z)+ \\ & +\frac{1}{\varepsilon}([u_{1\varepsilon}(t) - u_{2\varepsilon}(t)]^+, z) - (q(t), z)_1\}\varphi(t)dt = 0,\end{aligned}$$

$$(25)\qquad \int_0^T \{a_2(u_{2\varepsilon}(t), y) - \frac{1}{\varepsilon}([u_{1\varepsilon}(t) - u_{2\varepsilon}(t)]^+, y)\}\varphi(t)dt = 0,$$

$$\begin{aligned}(\mu u_{11}, z)_1 = & \int_0^T a_1(u_{1\varepsilon}(t), \psi(t)z)dt+ \\ (26)\qquad & +\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T ([u_{1\varepsilon}(t) - u_{2\varepsilon}(t)]^+, \psi(t)z)dt+ \\ & -\int_0^T (q(t), \psi(t)z)_1 dt - \int_0^T (\mu u'_{1\varepsilon}(t), \psi'(t)z)_1 dt.\end{aligned}$$

La (24) equivale alle (7), (8) ([1], prop. A.6 pag. 154), la (25) alla (9). Dalla (26) e dalla già acquisita (8) si ottiene

$$\begin{aligned}(\mu u_{11}, z)_1 &= -\int_0^T \langle(\mu u'_{1\varepsilon})'(t), \psi(t)z\rangle_1 dt - \int_0^T (\mu u'_{1\varepsilon}(t), \psi'(t)z)_1 dt = \\ &= \langle(\mu u'_{1\varepsilon})(0), z\rangle_1, \qquad \forall\, z \in V_1,\end{aligned}$$

ovvero la (11).

Resta da stabilire le (13), (14). Stante le (7), (8), (10), (11), un noto teorema ([7], teor. 2 pag. 225) assicura la prima e la seconda dell (13) e che

$$\begin{aligned}(27)\, &\left|\sqrt{\mu}u'_{1\varepsilon}(t)\right|_1^2 + a_1(u_{1\varepsilon}(t), u_{1\varepsilon}(t)) + \frac{2}{\varepsilon}\int_0^t ([u_{1\varepsilon}(s) - u_{2\varepsilon}(s)]^+, u'_{1\varepsilon}(s))ds = \\ &= \left|\sqrt{\mu}u_{11}\right|_1^2 + a_1(u_{10}, u_{10}) + 2\int_0^t (q(s), u'_{1\varepsilon}(s))_1 ds \qquad \forall\, t \in [0, T].\end{aligned}$$

Essendo poi

$$u_{2\varepsilon} = \tau_\varepsilon \circ u_{1\varepsilon},$$

si ha anche la terza delle (13) e di conseguenza

$$\begin{aligned} a_2(u_{2\varepsilon}(t), u_{2\varepsilon}(t)) &= a_2(u_{2\varepsilon}(0), u_{2\varepsilon}(0)) + \\ + \frac{2}{\varepsilon}\int_0^t ([u_{1\varepsilon}(s) - u_{2\varepsilon}(s)]^+, u'_{1\varepsilon}(s))ds & \qquad \forall\, t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Da ciò e dalla (27) si ricava la (14).

2. Prima di stabilire l'esistenza della soluzione del problema (P), conviene osservare che questi può porsi in modo equivalente sostituendo la (4) con le relazioni:

$$\begin{aligned} \langle(\mu u_1')'(t), z\rangle_1 + a_1(u_1(t), z) + a_2(u_2(t), \omega(z)) &= \\ = (q(t), z)_1 \text{ q.o. su }]0,T[\quad \forall\, z \in V_1, \end{aligned} \tag{28}$$

$$a_2(u_2(t), y - \omega(z)) \geq 0 \text{ q.o. su }]0,T[\quad \forall\, (z,y) \in \mathbf{K}, \tag{29}$$

$$a_2(u_2(t), u_2(t) - \omega(u_1(t))) = 0 \quad \text{q.o. su }]0,T[. \tag{30}$$

Infatti, se è vera la (4), la (28) [risp. (29)] si ottiene da essa tenendo presente che

$$(u_1(t) + z, u_2(t) + \omega(z)) \in \mathbf{K}, (u_1(t) - z, u_2(t) - \omega(z)) \in \mathbf{K}$$
$$[\text{risp. } (u_1(t), u_2(t) + y - \omega(z)) \in \mathbf{K}].$$

La (30) si ricava dalla già acquisita (28) scritta con $z = u_1(t)$ e dalla eguaglianza

$$\begin{aligned} \langle(\mu u_1')'(t), u_1(t)\rangle_1 + a_1(u_1(t), u_1(t)) + a_2(u_2(t), u_2(t)) &= \\ = (q(t), u_1(t))_1 \text{ q.o. su }]0,T[, \end{aligned}$$

che è conseguenza immediata della (4).

Viceversa la validità delle (28), (29), (30) implica che, per ogni $(z, y) \in \mathbf{K}$:

$$\langle(\mu u_1')'(t), z - u_1(t)\rangle_1 + a_1(u_1(t), z - u_1(t)) + a_2(u_2(t), y - u_2(t)) =$$
$$= (q(t), z - u_1(t))_1 - a_2(u_2(t), \omega(z) - \omega(u_1(t))) + a_2(u_2(t), y - u_2(t)) =$$
$$= (q(t), z - u_1(t))_1 + a_2(u_2(t), y - \omega(z)) + a_2(u_2(t), \omega(u_1(t)) - u_2(t)) \geq$$
$$\geq (q(t), z - u_1(t))_1 \text{ q.o. su }]0, T[.$$

Ciò premesso, dimostriamo il

TEOREMA 2. *Nell'ipotesi* $u_{10} \leq 0$ *su* Ω, *il problema* (P) *ammette almeno una soluzione* (u_1, u_2), *e si ha:*

$$u_1 \in L^\infty(0, T; V_1) \cap C^{0,1}([0, T], L^2(\Omega_1)), \quad u_2 \in L^\infty(0, T; V_2).$$

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ sia $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$ la soluzione del problema (P_ε). Avendo supposto $u_{10} \leq 0$ su Ω, si ha:

$$u_{2\varepsilon}(0) = \tau_\varepsilon(u_{10}) = 0.$$

Pertanto la (14), unitamente al lemma di Gronwall comporta che

$$(31) \qquad ||u_{1\varepsilon}||_{C^0([0,T],V_1)} + ||u_{1\varepsilon}'||_{C^0([0,T],L^2(\Omega_1))} + ||u_{2\varepsilon}||_{C^0([0,T],V_2)} \leq c,$$

$$(32) \qquad \frac{1}{\varepsilon}||[u_{1\varepsilon} - u_{2\varepsilon}]^+||^2_{C^0([0,T],L^2(\Omega))} \leq c \qquad (c = \text{cost.} > 0 \text{ indip. da } \varepsilon).$$

Per la (31) esistono $(u_1, u_2) \in [L^\infty(0, T; V_1) \cap C^{0,1}([0, T], L^2(\Omega_1))] \times$ $\times L^\infty(0, T; V_2)$ ed una successione infinitesima $\{\varepsilon_n\}$ di numeri positivi tali che, per $n \to +\infty$:

$$u_{1\varepsilon_n} \to u_1 \text{ in } L^\infty(0, T; V_1) \text{ debolmente } *,$$
$$(33) \qquad u_{1\varepsilon_n}' \to u_1' \text{ in } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)) \text{ debolmente } *,$$
$$u_{2\varepsilon_n} \to u_2 \text{ in } L^\infty(0, T; V_2) \text{ debolmente } *,$$

ed inoltre

$$(34) \qquad u_{1\varepsilon_n} \to u_1 \text{ in } C^0([0,T], L^2(\Omega_1))$$

in virtù del teorema di Ascoli-Arzelà. Aggiungiamo che, consideriamo lo spazio di Hilbert

$$W = \{v \in L^2(0,T; V_1): v' \in L^2(0,T; L^2(\Omega_1))\}$$

munito della norma

$$||v||_W = \left(\int_0^T (||v(t)||_1^2 + |v'(t)|_1^2) dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

valendo la (1), risulta ([3], teorema 5.1 pag. 58):

$$W \subseteq L^2(0,T; H^{m_2}(\Omega_1))$$

con immersione compatta. Quindi, sussistendo la prima e seconda delle (33), si ha, per $n \to +\infty$:

$$u_{1\varepsilon_n} \to u_1 \text{ in } L^2(0,T; H^{m_2}(\Omega_1))$$

e di conseguenza

$$(35) \qquad \omega \circ u_{1\varepsilon_n} \to \omega \circ u_1 \text{ in } L^2(0,T; V_2).$$

Mostriamo che (u_1, u_2) è soluzione del problema (P). Alla (2) si perviene partendo dalla (32) e usufruendo della prima e terza delle (33). La (5) si ricava dalle (10), (34). Tenendo presente le (8), (9), (11), (33), è ovvio che

$$(36) \qquad \int_0^T \{a_1(u_1(t), v(t)) - (\mu u_1'(t), v'(t))_1 + a_2(u_2(t), \omega(v(t))) +$$
$$-(q(t), v(t))_1\} dt = (\mu u_{11}, v(0))_1$$
$$\forall\, v \in L^\infty(0,T; V_1) \cap H^1(0,T; L^2(\Omega_1)) \text{ con } v(T) = 0.$$

Assumendo nella (36) $v = \varphi z$, con $\varphi \in C_0^\infty(]0,T[)$ e $z \in V_1$ si ottiene

$$\int_0^T (\mu u_1'(t), z)_1 \varphi'(t)dt =$$
$$= \int_0^T \{a_1(u_1(t), z) + a_2(u_2(t), \omega(z)) - (q(t), z)_1\}\varphi(t)dt$$

e di qui le (3), (28). Utilizzando ancora le (36) con $v = \varphi z$, dove $z \in V_1$ e

$$\varphi \in C^1([0,T]), \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi(T) = 0,$$

si vede facilmente che è vera la (6).

Resta da controllare le (29), (30). Per la (9) intanto si ha:

$$\int_0^T a_2(u_{2\varepsilon_n}(t), v(t))dt = \tag{37}$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T ([u_{1\varepsilon_n}(t) - u_{2\varepsilon_n}(t)]^+, v(t))dt \quad \forall\, v \in L^2(0,T;V_2).$$

La (37) implica che, qualunque sia $\varphi \in C_0^\infty(]0,T[)$ con $\varphi \geq 0$:

$$\int_0^T a_2(u_{2\varepsilon_n}, y - \omega(z))\varphi(t)dt \geq 0 \quad \forall\, (z,y) \in \mathbf{K},$$

$$\int_0^T a_2(u_{2\varepsilon_n}(t), u_{2\varepsilon_n}(t))\varphi(t)dt - \int_0^T a_2(u_{2\varepsilon_n}(t), \omega(u_{1\varepsilon_n}(t)))\varphi(t)dt \leq 0,$$

da cui, sfruttando la terza delle (33), la (35) e la debole semicontinuità inferiore del funzionale

$$v \in L^2(0,T;V_2) \to \int_0^T a_2(v(t), v(t))\varphi(t)dt,$$

si ottengono le disuguaglianze:

$$\int_0^T a_2(u_2(t), y - \omega(z))\varphi(t)dt \geq 0 \quad \forall\, (z,y) \in \mathbf{K},$$

$$\int_0^T a_2(u_2(t), u_2(t) - \omega(u_1(t)))\varphi(t)dt \leq 0,$$

cioè la (29) e

$$a_2(u_2(t), u_2(t) - \omega(u_1(t))) \leq 0 \text{ q.o. su }]0, T[.$$

Quest'ultima, unitamente alla (29), dà luogo alla (30).

3. Esaminiamo qualche caso particolare del problema (P).

Supponiamo:

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega \text{ aperto di } R^n \text{ limitato connesso di classe } C^0,$$

$$V_1 = V \text{ con } H_0^m(\Omega) \subseteq V \subseteq H^m(\Omega)(m \in N), V_2 = L^2(\Omega),$$

(38) $$a_1(y, z) = a(y, z) = \sum_{|r|=m,|s|=m} \int_\Omega a_{rs} D^r y D^s z dx \quad \forall\, y, z \in V$$

con $a_{rs} \in L^\infty(\Omega)$, $a_{rs} = a_{sr}$ e

$$\sum_{|r|=m,|s|=m} \int_\Omega a_{rs} D^r y D^s y dx \geq c \sum_{|r|=m} \int_\Omega |D^r y|^2 dx \quad \forall\, y \in V (c = \text{cost.} > 0),$$

$$a_2(y, z) = (ky, z) \quad \forall\, y, z \in L^2(\Omega) \text{ con } k \in L^\infty(\Omega)$$
$$\text{e } k \geq k_0 \text{ q.o. su } \Omega \ (k_0 = \text{cost.} > 0).$$

In tale situazione, denotata con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualità tra V e V' e posto $u_0 = u_{10}$, $u_1 = u_{11}$, è facile constatare che il problema (P) è equivalente al

Problema (P'). Trovare $u \in L^2(0, T; V) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ tale che

$\mu u' \in H^1(0, T; V')$,

$\langle (\mu u')'(t), z \rangle + a(u(t), z) + (ku^+(t), z) = (q(t), z)$ q.o. su $]0, T[\quad \forall\, z \in V$,

$u(0) = u_0$,

$(\mu u')(0) = u_1$.

Il problema (P') è stato trattato in [8] e, nel caso $n = 2$ $V = H_0^2(\Omega)$ [risp. $V = H^2(\Omega)$],

$$
(39)\qquad \begin{aligned} a(y,z) = \int_\Omega \Bigg[& \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 2(1-\nu)\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ & + \nu\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\Bigg] dx_1 dx_2 \ (\nu \in]-1,1[) \end{aligned}
$$

costituisce un modello matematico dell'equilibrio dinamico della piastra incastrata [risp. libera al bordo] poggiata su suolo unilateralmente elastico alla Winkler, sottoposta ad un carico verticale q dipendente dal tempo ed inizialmente soggetta a spostamenti u_0 e velocità u_1 verticali assegnati: $u(t, x_1, x_2)$ sono gli spostamenti verticali, positivi se verso il basso, della piastra all'istante t.

Assumiamo ora:
$\Omega_1 = \Omega$ aperto limitato connesso di R^n di classe $C^{0,1}$, $\Omega_2 = R^n$,

$$H_0^2(\Omega) \subseteq V_1 \subseteq H^2(\Omega), \qquad V_2 = H^1(R^n),$$

$a_1(y, z)$ come in (38) con $m = 2$ e

$$a_2(y,z) = \sum_{ij=1}^{n} \int_{R^n} b_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_j} dx + \int_{R^n} kyzdx$$

dove $b_{ij} \in L^\infty(R^n)$, $b_{ij} = b_{ji}$,

$$\sum_{ij=1}^{n} b_{ij}\lambda_i\lambda_j \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \text{ q.o. su } \Omega\ \forall\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^n (c = \text{cost.} > 0),$$
$$k \in L^\infty(R^n), \quad k \geq k_0 \text{ q.o. su } R^n \quad (k_0 = \text{cost.} > 0).$$

Evidentemente le forme bilineari $a_1(y, z)$ e $a_2(y, z)$ sono continue, debolmente coerciva la prima ([6], teor. 7.4 pag. 113) e coerciva la seconda. L'esistenza dell'operatore ω precisato nell'introduzione è assicurata da un teorema di S.M. Nikolskij ([6], teor. 3.9 pag. 75) in virtù dell'ipotesi fatta su Ω.

Quando $V_1 = H_0^2(\Omega)$, basta porre

$$\forall\, z \in V_1 \qquad \omega(z) = \begin{cases} z & \text{su } \Omega \\ 0 & \text{su } R^n - \Omega \end{cases}$$

ipotizzando Ω di classe C^0.

Pertanto nel caso in esame, se $u_{10} \leq 0$ su Ω, vale il teorema 2. Aggiungiamo il

TEOREMA 3. *Qualunque sia (u_1, u_2) soluzione del problema (P), si ha*

$$u_2(t) \geq 0 \text{ su } R^n \text{ q.o. su }]0,T[, \tag{40}$$

e, nell'ipotesi $b_{ij} \in C^{0,1}_{loc}(R^n - \partial\Omega)$, risulta:

$$u_2 \in L^2(0,T; H^2_{loc}(R^n - \partial\Omega)). \tag{41}$$

Se $V_2 = H_0^2(\Omega)$ e $b_{ij} \in C^{0,1}_{loc}(R^n)$, allora

$$u_2 \in L^2(0,T; H^2_{loc}(R^n)). \tag{42}$$

Dimostrazione. La (40) si deduce dalla ovvia diseguaglianza

$$a_2(u_2(t), \varphi) \geq 0 \text{ q.o. su }]0,T[\ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(R^n) \text{ con } \varphi \geq 0.$$

Per quanto concerne la (41), basta mostrare che

$$u_2 \in L^2(0,T; H^2(S)) \tag{43}$$

per ogni sfera aperta S a chiusura contenuta in $R^n - \partial\Omega$.

Se $\overline{S} \subset R^n - \overline{\Omega}$, la (43) si ottiene dalla uguaglianza:

$$a_2(u_2(t), \varphi) = 0 \text{ q.o. su }]0,T[\quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(R^n - \overline{\Omega}).$$

Supponiamo quindi $\overline{S} \subset \Omega$ e sia $\overline{S'}$ una sfera aperta tale che

$$\overline{S} \subset S' \subset \overline{S'} \subset \Omega.$$

Sia poi $\chi \in C_0^\infty(R^n)$ con $0 \leq \chi \leq 1$, $\operatorname{supp}\chi \subset S'$ e $\chi = 1$ su $\overline{S}$.

Considerato il convesso

$$\mathbf{K}_1 = \{v \in L^2(0,T; H^1(R^n)) : v(t) \geq u_1(t) \text{ su } \Omega \text{ q.o. su }]0,T[\},$$

si ha:

$$u_2 \in \mathbf{K}_1, \quad a_2(u_2(t), v(t) - u_2(t)) \geq 0 \text{ q.o. su }]0,T[\ \forall v \in \mathbf{K}_1,$$

da cui

$$a_2(u_2(t), \chi(v(t) - u_2(t)) \geq 0 \text{ q.o. su }]0,T[\ \forall v \in \mathbf{K}_1$$

giacchè

$$v \in \mathbf{K}_1 \Rightarrow \chi v + (1-\chi)u_2 \in \mathbf{K}_1.$$

Indicato allora con $\mathbf{K}_2$ il convesso

$$\{v \in L^2(0,T; H_0^1(S')) : v(t) \geq \chi u_1(t) \text{ su } S' \text{ q.o. su }]0,T[\},$$

dove $v(t)$ si suppone prolungata a zero su R^n, tenuto conto che

$$v \in \mathbf{K}_2 \Rightarrow v + (1-\chi)u_2 \in \mathbf{K}_1,$$

risulta:

$$a_2(u_2(t), \chi(v(t) - \chi u_2(t))) \geq 0 \text{ q.o. su }]0,T[\ \forall v \in \mathbf{K}_2. \tag{44}$$

Osserviamo ora che, posto

$$b(y,z) = \sum_{ij=1}^n \int_{S'} b_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_j} dx \quad \forall y, z \in H_0^1(S'),$$

si ha:

$$a_2(u_2(t), \chi(v(t) - \chi u_2(t))) = b(\chi u_2(t), v(t) - \chi u_2(t)) +$$
$$+ \int_{S'} \left[\sum_{ij=1}^n b_{ij}(u_2(t))_{x_j} \chi_{x_j} + \sum_{ij=1}^n (b_{ij} u_2(t) \chi_{x_i})_{x_j} \right] (v(t) - \chi u_2(t)) dx +$$
$$+ \int_{S'} k \chi u_2(t)(v(t) - \chi u_2(t)) dx,$$

sicchè, stante la (44), χu_2 è la soluzione della disequazione variazionale

$$\chi u_2 \in \mathbf{K}_2 : b(\chi u_2(t), v(t) - \chi u_2(t)) \geq (f(t), v(t) - \chi u_2(t)) \quad \text{q.o. su }]0,T[\ \forall\, v \in \mathbf{K}_2 \tag{45}$$

avendo indicato con $(\cdot,\cdot)$ il prodotto scalare in $L^2(S')$ e con f l'elemento di $L^2(0,T;L^2(S'))$

$$-\left[\sum_{ij=1}^{n} b_{ij}(u_2(t))_{x_i}\chi_{x_j} + \sum_{ij=1}^{n}(b_{ij}u_2(t)\chi_{x_i})_{x_j} + \chi k\right].$$

Proviamo che

$$\chi u_2 \in L^2(0,T;H^2(S')). \tag{46}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ sia $\bar{u}_\varepsilon \in L^2(0,T;H_0^1(S'))$ la soluzione dell'equazione variazionale

$$b(\bar{u}_\varepsilon(t), v(t)) - \frac{1}{\varepsilon}([\chi u_1(t) - \bar{u}_\varepsilon(t)]^+, v(t)) = = (f(t), v(t)) \ \text{q.o. su }]0,T[\ \forall\, v \in L^2(0,T;H_0^1(S')). \tag{47}$$

Tenendo presente un noto risultato di regolarità ellittica ([6], teor. 2.1 pag. 201), si ha:

$$\bar{u}_\varepsilon \in L^2(0,T;H^2(S')),$$

$$||\bar{u}_\varepsilon||_{L^2(0,T;H^2(S'))} \leq c(||f||_{L^2(0,T;L^2(S'))} + \frac{1}{\varepsilon}||[\chi u_1 - \bar{u}_\varepsilon]^+||_{L^2(0,T;L^2(S'))}) \quad (c = \text{cost.} > 0 \text{ indip. da } \varepsilon).$$

D'altra parte, utilizzando la (47) con $v = [\chi u_1 - \bar{u}_\varepsilon]^+$, si vede che

$$\frac{1}{\varepsilon}||[\chi u_1 - \bar{u}_\varepsilon]^+||_{L^2(0,T;L^2(S'))} \leq c'||B(\chi u_1) - f||_{L^2(0,T;L^2(S'))} \quad (c' = \text{cost.} > 0 \text{ indip. da } \varepsilon), \tag{48}$$

dove

$$B(\chi u_1(t)) = -\sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(b_{ij}\frac{\partial(\chi u_1(t))}{\partial x_i}\right).$$

Dunque

$$||\bar{u}_\varepsilon||_{L^2(0,T;H^2(S'))} \leq c'' \quad (c'' = \text{cost.} > 0 \text{ indip. da } \varepsilon)$$

e di conseguenza esistono $\bar{u} \in L^2(0,T;H_0^1(S') \cap H^2(S'))$ ed una successione infinitesima $\{\varepsilon_n\}$ di numeri positivi tali che, per $n \to +\infty$:

(49) $$\bar{u}_{\varepsilon_n} \to \bar{u} \text{ in } L^2(0,T;H_0^1(S') \cap H^2(S')) \text{ debolmente.}$$

Sfruttando le (47), (48), (49) si vede che $\bar{u} \in \mathbf{K}_2$ e che

$$b(\bar{u}(t), v(t) - \bar{u}(t) \geq (f(t), v(t)) - \bar{u}(t) \text{ q.o. su }]0,T[\ \forall\, v \in \mathbf{K}_2.$$

Da ciò e dalla (45) si deduce che

$$\bar{u} = \chi u_2$$

da cui (46) nonchè, (43).

Alla (42) si perviene con un ragionamento del tutto analogo al precedente tenendo conto che u_2 è ora la soluzione della disequazione variazionale

$$u_2 \in \mathbf{K}_3 : a_2(u_2(t), v(t) - u_2(t)) \geq 0 \text{ q.o. su }]0,T[\ \forall\, v \in \mathbf{K}_3,$$

con

$$\mathbf{K}_3 = \{v \in L^2(0,T;H^1(R^n)) : v(t) \leq \omega(u_1(t)) \text{ su } R^n \text{ q.o. su }]0,T[\},$$

e che $\omega \circ u_1 \in L^2(0,T;H^2(R^n))$.

A completamento di quanto finora detto, rileviamo che, nel caso $n=2$ $V_1 = H_0^2(\Omega)$ [risp. $V_1 = H^2(\Omega)$], $a_1(y,z)$ come in (39) e

$$a_2(y,z) = \int_{R^2}\left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial z}{\partial x_2}\right]dx_1dx_2 + \int_{R^2} kyz\,dx_1dx_2,$$

il problema (P) costituisce un modello matematico dell'equilibrio dinamico della piastra incastrata [risp. libera al bordo] poggiata sul suolo unilateralmente elastico alla Pasternak, sottoposto ad un carico verticale q, dipendente dal tempo, ed inizialmente soggetta a spostamenti u_{10} e velocità u_{11} assegnati: $u_1(t, x_1, x_2)$ e $u_2(t, x_1, x_2)$ sono gli spostamenti verticali, positivi se verso il basso, all'istante t rispettivamente della piastra e del suolo.

BIBLIOGRAFIA

[1] Brézis H., *Opérateurs Maximaux Monotones et Semigroupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert,* Math. Studies 5, North-Holland, 1973.

[2] Duvant G., Lions J.L., *Les Inéquations en Mécanique et en Physique,* Dunod, Paris, 1972.

[3] Lions J.L., *Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites non Linéaires,* Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[4] Lions J.I., Magenes E., *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications,* Vol. 1, Dunod, 1968.

[5] Lions J.I., Strauss W.A., *Some non-linear evolution equations,* Bull. Soc. Math. Fr., t. 93, 1965, p. 43-96.

[6] Nečas J., *Les Méthodes directes en théorie des équations elliptiques,* Masson, 1967.

[7] Torelli G., *Un complemento ad un teorema di J.L. Lions sulle equazioni differenziali astratte del secondo ordine,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, t. 34, 1964, p. 224-241.

[8] Toscano R., *Un problema dinamico per la piastra su suolo elastico unilaterale,* Proceedings of the Second Meeting on Unilateral Problems in Structural Analysis, Ravello, 1983.

Dipartimento di Matematica
ed Applicazioni,
Facoltà di Ingegneria,
Via Claudio, 21
80125 Napoli