«LE MATEMATICHE»
Vol. XLIV (1989) - Fasc. I, pp. 91-96

NOTE SUR LA CONJECTURE D'ABELSON ET ROSENBERG

DĂNUȚ MARCU (Bucharest) (*)

In this note, we prove the conjecture of Abelson and Rosenberg, on the maximal degree of balance of a graph, with n vertices, and we characterize these maximal graphs.

La terminologie, qui sera utilisée, est celle de [2,4]. Dans l'étude des groupes sociaux interviennent des graphes non-orinetés, dont les arêtes sont positives ou négatives, correspondant aux relations réciproques, de sympathie ou d'antipathie, entre les membres du groupe, représentés par les sommets du graphe. Un tel graphe est *équilibré*, si tous ses cycles ont un nombre pair d'arêtes négatives ou, en utilisant la caractérisation de Cartwright et Harary [3], si et seulement si l'ensemble des sommets peut être divisé en deux sous-ensembles, tels que toutes les arêtes qui relient les sommets d'un même ensemble soient positives et les arêtes qui relient les sommets appartenant aux ensembles différents soient négatives.

Une mesure du déséquilibre d'un *graphe signé* G est son degré de

(*) Entrato in Redazione il 13 luglio 1989

déséquilibre, noté $d(G)$, qui est, par définition, le plus petit nombre d'arêtes dont le changement de signe rendent le graphe G équilibré [1,5].

La conjecture d'Abelson et Rosenberg [1], discutée dans [4], affirme que pour tout graphe complet signé G, à n sommets, on a $d(G) \leq E(n)$, où $E(n) = n(n-2)/4$, pour n pair, et $E(n) = [n(n-2)+1]/4$, pour n impair, le graphe qui a le degré maximal de déséquilibre étant le graphe complet, dont toutes les arêtes sont négatives. Dans ce qui suit, on démontre cette conjecture, on trouve un type plus général de graphes dont le degré de déséquilibre est maximal, à savoir le graphe complet dont les arêtes négatives forment deux cliques disjointes (l'une des deux pouvant être vide, c'est-à-dire, le cas conjecturé par Flament [4]), et on démontre que, pour tout $n \geq 5$, les graphes signés, à n sommets, dont le degré de déséquilibre est maximal, tendent vers l'équilibre caractérisé par la réunion de deux cliques non vides disjointes, si l'on considère le nombre minimal de changements de signe de leurs arêtes. Pour un graphe G, nous définissons les opérations suivantes, sur les arêtes:

A: supprimer une arête entre deux sommets,

B: relier deux sommets par une arête.

Si nous définissons le degré de déséquilibre $d(G)$ d'un graphe simple G comme le nombre minimal d'opérations A ou B, nécessaire pour transformer le graphe G dans deux cliques disjointes (l'une des deux pouvant être, éventuellement, vide), sans arêtes entre les sommets qui appartiennent aux cliques différentes, alors la conjecture énoncée affirme que, pour tout graphe G, on a $d(G) \leq E(n)$. Pour cela, il suffit de considérer les arêtes positives commes les arêtes d'un graphe simple G, et les arêtes négatives comme les arêtes de son complémentaire $\bar{G}$.

THÉORÈME 1. *Pour tout graphe G, à n sommets, on a la relation $d(G) \leq E(n)$ et les seuls graphes pour lesquels $d(G) = E(n)$ sont les graphes bipartis complets $K_{p,q}$, avec $p+q=n$ et le graphe composé de*

n sommets isolés.

Démonstration. La démonstration de cette propriété se fait par induction sur n. Pour $n = 1, 2, 3$, le théorème est évidente, par l'énumération de tous les cas possibles. Supposons que le théorème soit vraie pour n. Soit G un graphe à $n+1$ sommets et soit G_x le sous-graphe obtenu de G, par la suppression d'un sommet x.

Supposons que le sous-graphe G_x puisse être transformé dans la réunion de deux cliques disjointes K_{n_1} et K_{n_2}, avec $n_1 + n_2 = n$, par des opérations A et B, en nombre $d(G_x) \leq E(n)$.

Si le sommet x est relié par des arêtes à p_1 sommets de K_{n_1} et à p_2 sommets de K_{n_2}, alors le graph G peut être transformé dans la réunion de deux cliques K_{n_1} et K_{n_2+1} ou K_{n_1+1} et K_{n_2}, soit par la suppression de p_1 arêtes et la création de $n_2 - p_2$ arêtes, soit par la suppression de p_2 arêtes et la création de $n_1 - p_1$ arêtes.

Si nous notons $z_1 = p_1 + n_2 - p_2$ et $z_2 = p_2 + n_1 - p_1$, alors $z_1 + z_2 = n$. Donc, $\min(z_1, z_2) \leq n/2$, pour n pair, et $\min(z_1, z_2) \leq (n-1)/2$, pour n impair.

En conclusion, pour le nombre minimal d'opérations A et B, nous avons

$$d(G) \leq d(G_x) + \min(z_1, z_2) \leq E(n+1),$$

parce que $E(n) + n/2 = E(n+1)$, pour n pair, et $E(n) + (n-1)/2 = E(n+1)$, pour n impair. ■

Pour obtenir la caractérisation des graphes G, à n sommets, avec $d(G) = E(n)$, on peut remarquer, d'après la démonstration précédente, que si $d(G) = E(n)$, alors, pour tout sommet x, le sous-graphe G_x vérifie $d(G_x) = E(n-1)$. Compte tenu de cette remarque, la caractérisation des graphes G, avec $d(G) = E(n)$, s'obtient par induction sur n.

Si le sous-graphe G_x, à n sommets est composé de sommets isolés, alors le sommet x est isolé ou est relié à tous les sommets de G_x.

Dans le cas contraire, il existe un sommet $y \neq x$, et le sous-graphe G_y n'est pas composé des sommets isolés et n'est pas biparti complet.

Donc, $d(G_y) < E(n)$, c'est-à-dire que $d(G) < E(n+1)$.

En conclusion, le graphe G est composé des sommets isolés ou est le graphe biparti complet $K_{1,n}$.

Le raisonnement est analogue, lorsque G_x est un graphe biparti complet. Il reste à démontrer que le graphe biparti complet $K_{p,q}(p+q=n)$ et le graphe composé de n sommets isolés ont un degré de déséquilibre égal à $E(n)$.

Pour le graphe $K_{p,q}$, nous pouvons obtenir une clique avec t sommets de la partie à p sommets et s sommets de la partie à q sommets, les sommets restants composant la deuxième clique.

Le nombre des opérations du type A et B est donc égal à

$$\binom{t}{2} + \binom{p-t}{2} + \binom{s}{2} + \binom{q-s}{2} + t(q-s) + s(p-t),$$

expression qui a une valeur minimale égale à $E(n)$, si

$$0 \leq t \leq p,\ 0 \leq s \leq q,\ p+q=n,$$

valeur qui est atteinte seulement si $t-s=(p-q)/2$, pour n pair, et $t-s=(p-q-1)/2$ ou $(p-q+1)/2$, pour n impair.

Pour le graphe composé de n sommets isolés, nous obtenons

$$\binom{t}{2} + \binom{s}{2} \geq E(n),$$

si $t+s=n$, l'égalité ayant lieu seulement si $t=s=n/2$, pour n pair, et $t=(n-1)/2$, $s=(n+1)/2$, pour n impair.

THÉORÈME 2. *Le nombre minimal d'opérations du type A et B, noté $D(G)$, nécessaire pour transformer un graphe G, à n sommets, dans la réunion de deux cliques non-vides disjointes est plus petit ou égal à $E(n)$, pour tout $n \geq 5$.*

Démonstration. Les graphes G, pour lesquels $D(G)=E(n)$, sont les graphes bipartis complets $K_{p,q}(p+q=n)$, le graphe composé de n sommets isolés, et, pour $n=5$, il y a encore deux graphes qui ont cette propriété: le graphe complet K_5 est le graphe composé du graphe biparti complet $K_{2,2}$ et un autre sommet qui est relié par des arêtes avec tous les sommets de $K_{2,2}$.

La démonstration du fait que $D(G) \leq E(n)$ et la caractéristaion des graphes maximaux se font, par induction, comme dans la démonstration du théorème 1.

Pour $n = 5$, le théorème se vérifie par l'énumération de tous les 34 graphes non-isomorphes, à 5 sommets. On obtient 5 graphes G, avec $D(G) = 4$, qui ont la forme indiquée.

Si l'on ajoute un nouveau sommet et on passe de $n = 5$ à $n = 6$, on voit que les deux graphes exceptions, dans le cas $n = 5$, ne sont plus des sous-graphes de certains graphes G, avec $D(G) = E(6)$.

Le fait que le graphe $K_{p,q}$ et le graphe composé des sommets isolés sont les seuls graphes G, à n sommets ($n \geq 6$), avec $D(G) = E(n)$, se démontre asiément, par induction, en suivant les mêmes principes, que la démonstration du théorème 1.

Pour $n = 2, 3, 4$, les valeurs maximales de l'indice $D(G)$ sont, respectivement, 1,2,3 et elles sont atteintes seulement pour le graphe complet K_n. ■

Un problème intéressant, qui n'est pas résolu, est celui de trouver un algorithme pour déterminer les indices $d(G)$ et $D(G)$, pour un graphe simple G.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Abelson R., Rosenberg M., *Symbolic psycho-logic: A model of attitudinal cognition,* Behavioral Science **3** (1958) 1-13.

[2] Berge C., *Graphes et hypergraphes,* Dunod, Paris, 1970.

[3] Cartwright D., Harary F., *Structural balance: A generalization of Heider's theory,* Psychol. Rev. **63** (1956) 277-293.

[4] Flament C., *Théorie des graphes et structures sociales,* Gauthier-Villars-Dunod, Paris, 1965.

[5] Harary F., *On the measurement of structural balance,* Behavioral Science **4** (1959) 316-324.

Str. Pasului 3, Sect. 2
70241 Bucharest
Romania