«LE MATEMATICHE»
Vol. XLIV (1989) - Fasc. I, pp. 97-112

SUI q-ARCHI COMPLETI DI UN PIANO NON DESARGUESIANO DI ORDINE q PARI

ROSA STANGARONE (Bari) - ANTONIO TERRUSI (Bari) (*)

A classic theorem by B. Segre [4], and G. Tallini, [6], states that in a finite desarguesian plane of order q no complete q-arc exists. This result can not be extended to any non desarguesian plane ([1], [2], [3]).

In this paper we consider a non desarguesian plane π_q of even order $q \geq 16$ and we study complete q-arcs admitting one point of index $q-4$ in π_q. As it is well-known, [5], the admissible values for the index of the remaining points of π_q are 0, 2, 4, 6, 8. We prove that the non existence of any point of index 8 implies $q \leq 34$.

1. Introduzione.

Sia K un q-arco di un piano proiettivo π_q di ordine q pari. È noto che per ogni punto di K passano $q-1$ rette secanti e 2 rette tangenti, per cui K ha esattamente $q(q-1)/2$ secanti e $2q$ tangenti. Si dice indice di un punto $P \in \pi_q$ il numero delle tangenti passanti per P. Essendo q pari, per ogni punto di π_q passa un numero pari di tangenti e si denota con t_{2j} $(j = 0, \dots, q/2)$ il numero dei punti di

(*) Entrato in Redazione il 3 ottobre 1989

indice $2j$ di π_q. Gli interi t_{2j}, detti caratteri dell'arco, soddisfano alle relazioni, [7],

$$\sum_{j=0}^{q/2} t_{2j} = \vartheta_2, \sum_{j=0}^{q/2} j t_{2j} = q\vartheta_1, \sum_{j=0}^{q/2} j(2j-1)t_{2j} = q(2q-1) \tag{1}$$

(dove $\vartheta_r = 1 + q + q^2 + \ldots + q^r$).

Inoltre se v è una retta non tangente K, denotato con v_{2j} il numero dei punti di indice $2j$ appartenenti ad essa, si ha

$$\sum_{j=0}^{q/2} v_{2j} = q + 1, \sum_{j=0}^{q/2} j v_{2j} = q, \tag{2}$$

mentre se u è una retta tangente K e u_{2j} è il numero dei punti di u di indice $2j$, si verifica che

$$\sum_{j=1}^{q/2} u_{2j} = q + 1, \sum_{j=1}^{q/2} (2j-1)u_{2j} = 2q - 1. \tag{3}$$

Poichè K non è mai completo se π_q è desarguesiano, [4], [6], nel seguito si supporrà π_q non desarguesiano e K completo per cui $t_q = 0$.

Recentemente è stata dimostrata la non esistenza di punti di indice $q-2$, [7], [8], e sono stati esaminati i 10-archi di π_{10}, [7], e i 12-archi completi di π_{12}, [8].

In relazione al problema se in piani di ordine q pari, $q \geq 16$ esistono o meno punti di indice $q-4$, è noto che, [7],

I) In π_q, con $q > 12$ e pari, se K è un q-arco completo risulta

$$t_{q-4} \leq 1. \tag{4}$$

II) Se t è una tangente di K passante per un punto P di indice $q-4$ o esiste su t un punto $Q(\neq P)$ di indice 6 e tutti gli altri punti di t hanno indice 2, ovvero esistono 2 punti distinti Q_1, Q_2 di t di indice 4 e tutti gli altri punti di t hanno indice 2.

Sussistono inoltre i seguenti risultati, [5],

III) Se K è un q-arco completo di π_q, q pari, $q \geq 16$ si ha

$$t_{q-4} = 1 \Rightarrow t_{2j} = 0 \quad \text{per} \quad j = 5, \ldots (q-6)/2. \tag{5}$$

IV) Se K è un q-arco completo di π_q, pari, $q \geq 16$ tale che $t_{q-4} = 1$ e $t_6 = 0$, allora

$$t_8 \leq 2 \quad \text{e} \quad q \leq 20. \tag{6}$$

Si prosegue ora lo studio dei q-archi completi con $t_{q-4} = 1$, esaminando in particolare quelli per cui $t_8 = 0$. Allora per la (5) i soli caratteri dell'arco sono t_0, t_2, t_4, t_6 e $t_{q-4} = 1$. Il sistema (1) diviene quindi

$$\begin{aligned} &t_0 + t_2 + t_4 + t_6 + 1 = q^2 + q + 1 \\ &t_2 + 2t_4 + 3t_6 + (q-4)/2 = q(q+1) \\ &t_2 + 6t_4 + 15t_6 + (q-4)(q-5)/2 = q(2q-1) \end{aligned} \tag{7}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{aligned} &t_0 = (q^2 + 10q - 40 - 8t_6)/8 \\ &t_2 = (3q^2 - 4q + 32 + 12t_6)/4 \\ &t_4 = (q^2 + 6q - 24 - 24t_6)/8. \end{aligned} \tag{8}$$

2. Proprietà dei q-archi completi con $t_{q-4} = 1$ e $t_8 = 0$.

Nel seguito si indicherà con P_{q-4} l'unico punto di indice $q-4$ e con v una retta non passante per P_{q-4} esterna o secante K.

PROPOSIZIONE 2.1. *Se v contiene un punto di indice 6 o 4, si ha che*

$$v_6 \leq 2 \tag{9}$$

ed in particolare

(10) $$v_6 = 2 \Rightarrow v_4 = 0,\ v_2 = q - 6 \ e \ v_0 = 5.$$

Dimostrazione. Dalle (2) si ha che

$$v_0 + v_2 + v_4 + v_6 = q + 1$$

$$v_2 + 2v_4 + 3v_6 = q$$

onde

(10′) $$v_0 = 1 + v_4 + 2v_6.$$

Poichè i punti di indice 0 di v sono contenuti nella unione delle 5 rette per P_{q-4} non tangenti K si ha che

(11) $$v_0 = 1 + v_4 + 2v_6 \leq 5$$

da cui seguono facilmente le (9) e (10).

COROLLARIO 2.2. *Una retta v contenente esattamente 2 punti di indice 6 è la retta congiungente 2 punti di indice 6 intersezioni di v con 2 tangenti a K per P_{q-4}.*

Dal corollario precedente segue

COROLLARIO 2.3. *Le rette non passanti per P_{q-4} congiungenti 2 punti di indice 6 di cui uno almeno appartenente ad una retta non tangente per P_{q-4} sono rette tangenti K.*

Dalle equazioni dei caratteri di v nel caso $v_6 = 1$ e dalla (11) si ha la seguente

PROPOSIZIONE 2.4. *Se v contiene un solo punto di indice 6, allora*

(12) $$v_4 \leq 2.$$

Più precisamente si verifica uno dei seguenti casi:

(12a), $v_6 = 1, \quad v_4 = 2, \quad v_2 = q - 7, \quad v_0 = 5$

(12b), $v_6 = 1, \quad v_4 = 1, \quad v_2 = q - 5, \quad v_0 = 4$

(12c). $v_6 = 1, \quad v_4 = 0, \quad v_2 = q - 3, \quad v_0 = 3$

COROLLARIO 2.5. *Se v contiene un punto di indice 6 e 2 punti di indice 4, allora i punti di indice 6 e 4 sono intersezioni con tangenti per P_{q-4}.*

COROLLARIO 2.6. *Se v contiene un punto di indice 6 e uno di indice 4, allora almeno uno di questi 2 punti appartiene alle rette tangenti per P_{q-4}.*

Dal corollario precedente segue anche

COROLLARIO 2.7. *Le rette non passanti per P_{q-4} congiungenti 2 punti uno di indice 6 e uno di indice 4 appartenenti entrambi a rette non tangenti per P_{q-4} sono rette tangenti K.*

Ancora dalle equazioni dei caratteri di v e dalla (11) si deduce la

PROPOSIZIONE 2.8. *Se v passa per un punto di indice 6 o 4, allora*

(13) $$v_4 \leq 4$$

(14) $$v_4 \geq 1 \Rightarrow v_6 \leq 1.$$

In particolare si verifica che

(15) $v_4 = 4, \quad v_6 = 0, \quad v_2 = q - 8, \quad v_0 = 5$

$$v_4 = 3, \quad v_6 = 0, \quad v_2 = q - 6, \quad v_0 = 4 \tag{16}$$

COROLLARIO 2.9. *Se v contiene 4 punti di indice 4, tali punti sono intersezioni con le tangenti per P_{q-4}.*

COROLLARIO 2.10. *Se v contiene esattamente 3 punti di indice 4, allora almeno 2 di tali punti appartengono alle tangenti per P_{q-4}.*

PROPOSIZIONE 2.11. *Se u è una retta che non contiene P_{q-4} si ha che*

$$u_6 \leq (q-2)/4 \tag{17}$$

$$u_4 \leq (q-2)/2. \tag{18}$$

Inoltre se $q \equiv 0$ (mod 4) si verifica che

$$u_4 \geq 1. \tag{19}$$

Dimostrazione. Dalle equazioni (3) si ottiene

$$\begin{aligned} u_2 + u_4 + u_6 &= q + 1 \\ u_2 + 3u_4 + 5u_5 &= 2q - 1 \end{aligned} \tag{20}$$

e sottraendo membro a membro

$$u_4 + 2u_6 = (q-2)/2 \tag{21}$$

da cui si ottengono le (17) e (18).

Si osservi inoltre che se $q \equiv 0$ (mod 4), allora $(q-2)/2$ è dispari per cui dalla (21) segue necessariamente u_4 dispari e quindi $u_4 \geq 1$.

PROPOSIZIONE 2.12. *Se b è una retta per P_{q-4} non tangente K risulta*

$$b_6 \leq (q+4)/6 \tag{22}$$

$$b_4 \leq (q+4)/4. \tag{23}$$

Se esiste un punto di indice 6 non appartenente a b si ha

$$b_0 \leq q-5 \tag{24}$$

e la (22) si migliora con

$$b_6 \leq (q-6)/4 \quad se\ q \leq 26 \tag{25}$$

$$b_6 \leq 6 \quad se\ q \geq 32. \tag{26}$$

In particolare se una retta per P_{q-4} non tangente $\neq b$ contiene un punto di indice 6 si verifica che

$$b_0 \leq q-6, \tag{27}$$

$$b_4 + b_6 \leq 6. \tag{28}$$

Inoltre se esiste un punto di indice 4 appartenente ad una retta per P_{q-4} non tangente $\neq b$ la (22) si migliora con la

$$b_6 \leq 4 \quad per\ q \geq 24. \tag{29}$$

Dimostrazione. Le equazioni dei caratteri sulla retta b sono

$$\begin{aligned} &b_0 + b_2 + b_4 + b_6 = q \\ &b_2 + 2b_4 + 3b_6 + (q-4)/2 = q \end{aligned} \tag{30}$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$b_2 + 2b_4 + 3b_6 = (q+4)/2$$

da cui si hanno le (22) e (23).

Se esiste un punto P_6 di indice 6 non appartenente a b, per esso escono almeno 5 tangenti diverse dalla retta per P_{q-4} e P_6 che intersecano b in almeno 5 punti di indice > 0, per cui sussiste la (24).

D'altra parte nella (30) sottraendo membro a membro si ottiene

$$b_0 = b_4 + 2b_6 + (q-4)/2 \tag{31}$$

che, tenuto conto della (24), dà

$$b_4 + 2b_6 \leq (q-6)/2$$

e quindi la (25).

Si osservi inoltre che per il corollario 2.3. sussiste la (26).

Se in particolare una retta per P_{q-4} non tangente $\neq b$ contiene un punto P_6 di indice 6, per esso escono 6 tangenti diverse dalla retta per P_{q-4} e P_6 che determinano su b 6 punti di indice ≥ 2, per cui vale la (27).

Inoltre, poichè per i corollari 2.3. e 2.7. le rette congiungenti punti di indice 6 o di indice 6 e 4 appartenenti a rette non tangenti per P_{q-4} sono tangenti, segue la (28).

Infine si osservi che se esiste un punto P_4 di indice 4 appartenente ad una retta per P_{q-4} non tangente $\neq b$ per il corollario 2.7. le rette congiungenti P_4 con i punti di indice 6 appartenenti a b sono rette tangenti per cui deve valere la (29).

PROPOSIZIONE 2.13. *Sia K un q-arco completo di π_q, q pari, $q \geq 16$ tale che $t_{q-4} = 1$, $t_8 = 0$ e $t_6 \geq 1$. Si verificano le seguenti*

$$t_6 \geq (q^2 - 20q + 16)/12 \tag{32}$$

$$t_6 \leq (q^2 + 6q - 24)/24. \tag{33}$$

Dimostrazione. Per il risultato (II) richiamato nell'introduzione si ha che sulle tangenti per P_{q-4} ci sono almeno $(q-2)(q-4)$ punti di indice 2; inoltre su ciascuna delle 2 secanti per P_{q-4} ci sono almeno 2 punti di indice 2, per cui

(34) $$t_2 \geq (q-2)(q-4)+4 = q^2-6q+12.$$

D'altra parte, tenuto conto dell'espressione di t_2 fornita dalle (8), si ha la (32).

La (33) segue immediatamente dalla condizione

(35) $$t_4 = (q^2+6q-24-24t_6)/8 \geq 0.$$

PROPOSIZIONE 2.14. *Sia K un q-arco completo di π_q, pari, $q \geq 16$ tale che $t_{q-4}=1$, $t_8=0$ e $t_6 \geq 1$. Se i punti di indice 6 appartengono tutti alle tangenti per P_{q-4}, allora*

(36) $$t_6 \leq q-4$$

(37) $$q \leq 28.$$

Dimostrazione. Se i punti di indice 6 appartengono solo alle tangenti per P_{q-4}; poichè su tali rette c'è al più un punto di indice 6, segue immediatamente la (36). Inoltre dalle (32) e (36) si ottiene

$$q^2-32q+64 \leq 0$$

e quindi $q \leq 28$.

PROPOSIZIONE 2.15. *Sia K un q-arco completo di π_q, pari, tale che $t_{q-4}=1$, $t_8=0$ e $t_6 \geq 1$.*

Se $q \equiv 0$ (mod 4), $q \geq 16$, ed esiste almeno un punto di indice 6 appartenente ad una retta per P_{q-4} non tangente K, allora

(38) $$t_6 \leq (q^2+6q-72)/24.$$

Se $q \geq 32$ e se esistono un punto P_4 di indice 4 e uno P_6 di indice 6 appartenenti a 2 rette distinte per P_{q-4} non tangenti K, allora

$$t_6 \leq q + 17. \tag{39}$$

Dimostrazione. Se $q \equiv 0 \pmod 4$ ed esiste almeno un punto P_6 di indice 6 appartenente ad una retta per P_{q-4} non tangente K si ha che su ciascuna delle 6 rette tangenti per P_6 si verifica la (19), per cui

$$t_4 = (q^2 + 6q - 24 - 24t_6)/8 \geq 6 \tag{40}$$

e quindi sussiste la (38).

Per provare la (39) si indicano con b la retta congiungente P_4 con P_{q-4} e con b' la retta congiungente P_6 con P_{q-4}. Allora, essendo per ipotesi $q \geq 32$, sulle 4 rette per P_{q-4} non tangenti $\neq b$ si verifica la (29), mentre sulla retta b si verifica la (28), ed essendo $b_4 \geq 1$, necessariamente $b_6 \leq 5$. Ne segue che, indicato con n_6 il numero dei punti di indice 6 appartenenti alle 5 rette per P_{q-4} non tangenti K, risulta

$$n_6 \leq 21. \tag{41}$$

D'altra parte è sempre

$$n_6 \geq t_6 - (q - 4) \tag{42}$$

per cui vale la (39).

PROPOSIZIONE 2.16. *Sia K un q-arco completo di π_q, q pari, tale che $t_{q-4} = 1$, $t_8 = 0$ e $t_6 \geq 1$.*

Se $q \geq 34$ allora

$$t_6 \geq (q^2 - 30q + 200)/8. \tag{43}$$

In particolare se $q \geq 34$, *se* t_4 *è pari e se i punti di indice 4 appartengono tutti alle tangenti per* P_{q-4}, *allora*

$$t_6 \geq (q^2 - 10q - 440)/8. \tag{44}$$

Dimostrazione. Per provare la (43) si osservi anzitutto che se $q \geq 34$ per la proposizione 2.14 esistono punti di indice 6 appartenenti a rette per P_{q-4} non tangenti K. Inoltre per il numero n_6 dei punti di indice 6 appartenenti a tali rette, tenuto conto delle (42) e (32), si verifica

$$n_6 \geq (q^2 - 32q + 64)/12. \tag{45}$$

Si osservi ancora che, se $q \geq 34$,

$$n_6 > (q + 4)/6. \tag{46}$$

Infatti se per assurdo fosse

$$n_6 \leq (q + 4)/6$$

allora per la (45) risulterebbe

$$(q^2 - 32q + 64)/12 \leq (q + 4)/6$$

e quindi

$$q^2 - 34q + 56 \leq 0$$

da cui $q \leq 32$ contro l'ipotesi.

Confrontando la (46) con la (22) si ha che per $q \geq 34$ i punti di indice 6 non appartenenti alle tangenti per P_{q-4} appartengono ad almeno 2 rette distinte per P_{q-4} non tangenti K. Allora su ognuna di queste 5 rette vale la (27), per cui

$$t_0 \leq 5q - 30, \tag{47}$$

e tenendo conto dell'espressione di t_0 fornita dalla (8), segue la (43).

In particolare se t_4 è pari ed i punti di indice 4 appartengono tutti alle tangenti per P_{q-4}, su tali rette ci sono

$$(q-4)-t_4/2$$

punti di indice 6. Quindi sulle non tangenti per P_{q-4} ci sono

$$n_6 = t_6 - (q-4-t_4/2) \tag{48}$$

punti di indice 6.

D'altra parte, essendo $q \geq 34$, per la (46) esistono almeno 2 punti di indice 6 appartenenti a 2 rette distinte per P_{q-4} non tangenti K e di conseguenza su ciascuna delle 5 rette per P_{q-4} non tangenti K vale la (26). Ne segue che

$$n_6 \leq 30. \tag{49}$$

Tenuto conto della (48) e dell'espressione di t_4 fornita dalla (8), si ottiene

$$(q^2-10q+40-8t_6)/16 \leq 30$$

da cui si ha l'asserto.

PROPOSIZIONE 2.17. *Se K è un q-arco completo di π_q, q pari, $q \geq 16$, tale che $t_{q-4}=1$, $t_8=0$ e $t_6 \geq 1$, allora*

$$q \leq 34. \tag{50}$$

Dimostrazione. Dalle (32) e (33) segue che

$$(q^2-20q+16)/12 \leq (q^2+6q-24)/24$$

da cui

$$q^2-46q+56 \leq 0$$

e quindi

$$q \leq 44.$$

D'altra parte, se $q \geq 34$, sussistono le (33) e (43) per cui

$$(q^2 - 30q + 200)/8 \leq q^2 + 6q - 24)/24$$

e dunque

$$q^2 - 48q + 312 \leq 0$$

onde

$$q \leq 40.$$

Inoltre per i valori di $q \equiv 0 \pmod 4$, $q \geq 34$, si verificano le (38) e (43) e quindi

$$(q^2 - 30q + 200)/8 \leq (q^2 + 6q - 72)/24$$

da cui

$$q^2 - 48q + 336 \leq 0.$$

Pertanto $q \leq 38$, e non essendo 38 un ordine ammissibile, si ha

$$q \leq 36.$$

Sia ora $q = 36$; dalle (38) e (43) si ottiene

(51) $$52 \leq t_6 \leq 60.$$

Si osservi inoltre che in ciascuno di questi casi esiste sempre un punto P_4 di indice 4 appartenente ad una retta per P_{q-4} non tangente K. Infatti, osservato che sulle tangenti per P_{q-4} c'è sempre un numero pari di punti di indice 4, se t_4 è dispari, l'asserto è verificato. Se t_4 è pari e se per assurdo i punti di indice 4 appartenessero tutti alle tangenti per P_{q-4}, allora per la (44) $t_6 \geq 62$ contro la (51).

Dunque se $q = 36$ esistono almeno un punto di indice 6 e uno di indice 4 appartenenti a 2 rette distinte per P_{q-4} non tangenti K ed allora per la (39)

$$t_6 \leq 53.$$

Si prova infine che non sono possibili neppure i casi $t_6 = 53$ e $t_6 = 52$.

Infatti per la (41) si ha che sulle tangenti per P_{q-4} ci devono essere almeno

$$t_6 - 21$$

punti di indice 6.

Allora, se $t_6 = 53$, ciascuna tangente per P_{32} deve contenere un punto di indice 6 e di conseguenza i punti di indice 2 devono essere

$$t_2 \geq 35 \cdot 32 + 4 = 1124$$

e questo è assurdo, perchè se $q = 36$ e $t_6 = 53$ dalla (8) si ottiene $t_2 = 1120$.

Se invece $t_6 = 52$, almeno 31 tangenti per P_{32} devono contenere un punto di indice 6 e quindi

$$t_2 \geq 35 \cdot 31 + 34 + 4 = 1123$$

mentre, sempre dalle (8), si ha $t_2 = 1100$.

Dunque q non può essere 36 ed allora $q \leq 34$.

PROPOSIZIONE 2.18. *Se K è un q-arco completo di π_q, q pari, $q \geq 16$, tale che $t_{q-4} = 1$, $t_8 = 0$ e $t_6 \geq 1$, allora i casi possibili sono*

(52) $$q = 16 \quad e \quad 1 \leq t_6 \leq 12$$

(53) $$q = 18 \quad e \quad 1 \leq t_6 \leq 17$$

(54) $$q = 20 \quad e \quad 2 \leq t_6 \leq 18$$

(55) $$q = 24 \quad e \quad 10 \leq t_6 \leq 27$$

(56) $$q = 26 \quad e \quad 15 \leq t_6 \leq 33$$

(57) $$q = 28 \quad e \quad 20 \leq t_6 \leq 36$$

(58) $$q = 32 \quad e \quad 34 \leq t_6 \leq 47$$

(59) $$q = 34 \quad e \quad 42 \leq t_6 \leq 55, \; t_6 \neq 52 \quad e \quad 54$$

Dimostrazione. La proposizione segue immediatamente dalle proposizioni 2.13, 2.15, 2.16 e 2.17.

Inoltre, osservato che per $q = 34$ e t_6 pari, t_4 è dispari, per la (39) $t_6 \leq 51$, onde $t_6 \neq 52$ e 54.

Si osservi infine che dalle (36) e (38) si ha che se $q = 16$ e $t_6 = 12$, allora ogni tangente per P_{12} contiene un punto di indice 6.

Dalle (33) e (35) si ha che

$$t_6 = (q^2 + 6q - 24)/24 \Leftrightarrow t_4 = 0 \Leftrightarrow q = 18 \quad \text{e} \quad t_6 = 17,$$

mentre dalle (38) e (40) si evince che

$$t_6 = (q^2 + 6q - 72)/24 \Leftrightarrow q \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 4) \text{ e } t_4 = 6 \Leftrightarrow q = 24 \quad \text{e} \quad t_6 = 27.$$

Ancora dalle (32) e (34) si ottiene che

$$t_6 = (q^2 - 20q + 16)/12 \Leftrightarrow t_2 = (q-2)(q-4) + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q = 28 \quad \text{e} \quad t_6 = 20$$

e quindi in tal caso ogni tangente per P_{24} contiene 2 punti di indice 4, sulle rette per P_{24} secanti ci sono solo i 2 punti di indice 2 intersezioni con l'arco e le rette esterne per P_{24} non contengono punti di indice 2.

Dalle (43) e (47) si ha infine che

$$t_6 = (q^2 - 30q + 200)/8 \Leftrightarrow t_0 = 5q - 30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q = 34 \quad \text{e} \quad t_6 = 42.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Barlotti A., *Un'osservazione intorno a un teorema di B. Segre sui q-archi,* Matematiche **21**, (1966) 23-29.

[2] Denniston R.H.F., *On arcs in projective plane of order 9,* Manuscripta Math. **4**, (1971) 61-89.

[3] Menichetti G., *q-Archi completi nei piani di Hall di ordine* $q = 2^k$, Rend. Acc. Lincei LVI (1974) 4.

[4] Segre B., *Curve razionali normali e k-archi negli spazi finiti,* Ann. Math. pura e appl. **39**, (1955) 357-379.

[5] Stangarone R., Terrusi A., *Alcuni risultati sui q-archi completi di un piano proiettivo* π_q, *q, pari,* $q \geq 16$, in corso di pubblicazione su Ann. of Disc. Math.

[6] Tallini G., *Sui q-archi di un piano lineare finito di caratteristica* $q = 2$, Rend. Acc. Lincei 8, **23**, (1957) 242-245.

[7] Tallini G., *Sui q-archi completi di un piano proiettivo non desarguesiano di ordine q pari,* Quaderni Sem. Geom. Comb. **54**(1985) Univ. La Sapienza Roma.

[8] Zanella C., *On complete 12-arcs in projective planes of order 12,* Ann. of Disc. Math. **37**, (1988) 485-492.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi
Bari