«LE MATEMATICHE»
Vol. XLIV (1989) - Fasc. I, pp. 131-148

ALCUNE CONSIDERAZIONI SULLA $\mathbb{R}^n$-COMPLETA CONTROLLABILITÀ DI CERTI SISTEMI LINEARI IPERBOLICI

ALFONSO VILLANI (Messina) (*)

We consider the following distributed parameter linear control system

$$(E) \qquad z_{xy} + A(x,y)z_x + B(x,y)z_y + C(x,y)z = F(x,y)u(x,y).$$

Here (x,y) ranges over a given rectangle $\Delta =]0,a[\times]0,b[$, the state vector function z is n-dimensional and belongs to the Sobolev space $W_p^*(\Delta, \mathbb{R}^n) = \{z \in L^p(\Delta, \mathbb{R}^n) : z_x, z_y, z_{xy} \in L^p(\Delta, \mathbb{R}^n)\}$, the control vector function u is m-dimensional and the matrix-valued functions A, B, C, F satisfy some rather general assumptions, that is: $L = (A, B, C)$ belongs to $L^{p,*}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n})$, the Banach space of all measurable functions $L = (A, B, C) : \Delta \to \mathbb{R}^{n,n} \times \mathbb{R}^{n,n} \times \mathbb{R}^{n,n}$ for which the norm

$$||L||_{L^{p,*}(\Delta,\mathbb{R}^{n,n})} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in]0,a[}\left(\int_0^b |A(x,y)|^p dy\right)^{1/p} + \\ +\operatorname*{ess\,sup}_{y\in]0,b[}\left(\int_0^a |B(x,y)|^p dx\right)^{1/p} + ||C||_{L^p(\Delta,\mathbb{R}^{n,n})}$$

(*) Entrato in Redazione il 14 novembre 1989

is finite, and $F \in M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$, the space of all measurable functions from Δ to $\mathbb{R}^{n,m}$. We also assume that $Fu \in L^p(\Delta, \mathbb{R}^n)$.
Let the trace of z on the two sides of Δ containing $(0,0)$ (which is an element of a Sobolev space) and the value $z(a,b) \in \mathbb{R}^n$ be taken as the initial and the final state, respectively. Then we prove that the set of all $(L, F) \in L^{p,*}(\Delta, \mathbb{R}^n) \times M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$, for which the corresponding system (E) is completely controllable, is an open and dense subset of the complete metric space $L^{p,*}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$, where $M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$ is given the metric of convergence in measure.

1. Introduzione.

Assegnato il rettangolo $\Delta =]0,a[\times]0,b[$, $a,b > 0$, e fissato l'esponente $p \in]1,+\infty[$, consideriamo il *processo di controllo con parametri distribuiti* descritto dal sistema lineare iperbolico

$$(E) \qquad \begin{aligned} &z_{xy} + A(x,y)z_x + B(x,y)z_y + C(x,y)z = \\ &= F(x,y)u(x,y) \quad \text{q.o.} \quad (x,y) \in \Delta, \end{aligned}$$

dove: la *risposta* z è una funzione n-vettore, elemento dello spazio di Sobolev $W_p^*(\Delta, \mathbb{R}^n)$(¹); il *controllo* u è una funzione misurabile da Δ in $\mathbb{R}^m$; i coefficienti A, B, C e F sono funzioni misurabili, definite in Δ ed a valori matrici di dimensioni appropriate, verificanti, le prime tre, opportune ipotesi di sommabilità L^p. Supporremo, precisamente, che A e B appartengano agli spazi con norma mista $L_y^{p,\infty}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n})$ e $L_x^{p,\infty}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n})$(¹), rispettivamente, e che C sia un elemento di $L^p(\Delta, \mathbb{R}^{n,n})$. Per quanto riguarda la matrice F, ne richiederemo soltanto l'appartenenza a $M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$, lo spazio delle funzioni misurabili da Δ in $\mathbb{R}^{n,m}$; in corrispondenza considereremo ammissibili solo quei controlli $u \in M(\Delta, \mathbb{R}^m)$ tali che $Fu \in L^p(\Delta, \mathbb{R}^n)$.

Le ipotesi su A, B, C e Fu sopra dichiarate, ipotesi che sono, in un certo senso, le più generali possibile compatibilmente con la richiesta $z \in W_p^*(\Delta, \mathbb{R}^n)$ (cfr., in proposito, il Theorem 2.2 di [6]), garantiscono che (cfr. il successivo Teorema 1) comunque si assegni, nella classe

(¹) Per le definizioni degli spazi funzionali si veda il successivo n. 2.

$W^{1,p}$, il dato iniziale del problema di Darboux per il sistema (E), tale problema ammette una ed una sola soluzione $z \in W_p^*(\Delta, \mathbb{R}^n)$. Assumeremo pertanto, relativamente al processo di controllo (E), come *stato iniziale* la traccia $(z(\cdot, 0), z(0, \cdot))$ (elemento di un opportuno sottospazio di $W^{1,p}(]0, a[, \mathbb{R}^n) \times W^{1,p}(]0, b[, \mathbb{R}^n))$ della funzione z sui due lati di Δ che contengono il punto $(0, 0)$.

Con la predetta scelta dello stato iniziale sono compatibili varie definizioni di stato finale, e quindi vari tipi di completa controllabilità del proceso (E), già oggetto di studio da parte di diversi Autori (cfr. [5], [7]-[12]).

Scopo di questa nota è mostrare che, analogamente a quanto accade per i processi di controllo lineari con parametri concentrati (cfr. [3], [16]), quando per il processo di controllo (E) si assuma come *stato finale* il valore $z(a, b) \in \mathbb{R}^n$ che la risposta z prende nel punto (a, b), la corrispondente proprietà di completa controllabilità ($\mathbb{R}^n$-*completa controllabilità*) rappresenta, in un certo senso, la regola anziché l'eccezione. Proviamo infatti (Teorema 3 e Corollario 2) che l'insieme delle quaterne (A, B, C, F), per cui il corrispondente processo di controllo (E) risulta $\mathbb{R}^n$-completamente controllabile, è un sottoinsieme aperto è denso(2) (quindi residuale) dello spazio metrico completo

$$L_y^{p,\infty}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times L_x^{p,\infty}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times L^p(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m}),$$

dove $M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$ è munito della metrica della convergenza in misura.

Un precedente risultato in proposito, limitatamente all'osservazione che l'insieme dei processi $\mathbb{R}^n$-completamente controllabili è aperto, è stato ottenuto, in ipotesi più restrittive sui coefficienti A, B, C e F, da R. Di Vincenzo e L. Giusti in [5].

(2) In effetti, per quel che riguarda la densità, otteniamo un risultato (Teorema 4) più forte.

2. Notazioni e richiami.

Le norme degli spazi $\mathbb{R}^h$ e $\mathbb{R}^{h,k}$ sono quelle usuali, cioè: $||v||_{\mathbb{R}^h}$ è la norma euclidea, mentre $||D||_{\mathbb{R}^{h,k}}$ è definita da

$$||D||_{\mathbb{R}^{h,k}} = \sup\{||Dw||_{\mathbb{R}^h} : w \in \mathbb{R}^k, ||w||_{\mathbb{R}^k} \leq 1\}.$$

Per semplificare la notazione scriveremo, come è consuetudine, $|v|$ e $|D|$ in luogo di $||v||_{\mathbb{R}^h}$ e $||D||_{\mathbb{R}^{h,k}}$, rispettivamente.

Riportiamo di seguito le definizioni di alcuni degli spazi funzionali utilizzati nel lavoro. Per quanto riguarda gli spazi (di uso più comune) la cui definizione non è esplicitamente richiamata, il significato è quello abituale.

DEFINIZIONE 1. (cfr. [4], [13]). *$W_p^*(\Delta, \mathbb{R}^n)$ è lo spazio di Banach delle (classi di) funzioni misurabili $w : (x, y) \to w(x, y)$, da Δ in $\mathbb{R}^n$, che appartengono a $L^p(\Delta, \mathbb{R}^n)$ assieme alle derivate nel senso delle distribuzioni w_x, w_y, w_{xy}, con la norma*

$$||w||_{W_p^*(\Delta,\mathbb{R}^n)} = (||w||^p_{L^p(\Delta,\mathbb{R}^n)} + ||w_x||^p_{L^p(\Delta,\mathbb{R}^n)} + \\ + ||w_y||^p_{L^p(\Delta,\mathbb{R}^n)} + ||w_{xy}||^p_{L^p(\Delta,\mathbb{R}^n)})^{1/p} \quad \forall w \in W_p^*(\Delta, \mathbb{R}^n).$$

Rinviando a [4], [6] e [13] per ulteriori proprietà degli spazi W_p^* ci limitiamo qui a ricordare che sussistono le seguenti proposizioni.

PROPOSIZIONE 1. *$W_p^*(\Delta, \mathbb{R}^n) \subset C^0(\bar{\Delta}, \mathbb{R}^n)$ algebricamente e topologicamente.*

PROPOSIZIONE 2. *Se w è un qualsiasi elemento di $W_p^*(\Delta, \mathbb{R}^n)$, allora, per ogni $y \in [0, b]$ (risp. $x \in [0, a]$), la funzione $x \to w(x, y)$ (risp. $y \to w(x, y)$) appartiene a $W^{1,p}(]0, a[, \mathbb{R}^n)$ (risp. $W^{1,p}(]0, b[, \mathbb{R}^n)$). La trasformazione lineare $w \to w(\cdot, y)$ (risp. $w \to w(x, \cdot)$), da $W_p^*(\Delta, \mathbb{R}^n)$ in $W^{1,p}(]0, a[, \mathbb{R}^n)$ (risp. $W^{1,p}(]0, b[, \mathbb{R}^n)$), è continua, uniformemente al variare di $y \in [0, b]$ (risp. $x \in [0, a]$).*

DEFINIZIONE 2. *((3)). $L_y^{p,\infty}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n})$ (risp. $L_x^{p,\infty}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n})$) è lo spazio*

(3) Per ulteriori ragguagli sugli spazi L^p con norma mista, cfr., per es., [2].

di Banach delle (classi di) funzioni misurabili $D : (x, y) \to D(x, y)$, *da* Δ *in* $\mathbb{R}^{n,n}$, *tali che la funzione numerica*

$$x \to \int_0^b |D(x, y)|^p dy$$

(risp.

$$y \to \int_0^a |D(x, y)|^p dx)$$

appartiene a $L^\infty(]0, a[)$ *(risp.* $L^\infty(]0, b[)$, *con la norma*

$$||D||_{L_y^{p,\infty}(\Delta,\mathbb{R}^{n,n})} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in]0,a[} \left(\int_0^b |A(x, y)|^p dy \right)^{1/p} \qquad \forall D \in L_y^{p,\infty}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n})$$

(risp.

$$||D||_{L_y^{p,\infty}(\Delta,\mathbb{R}^{n,n})} = \operatorname*{ess\,sup}_{y\in]0,b[} \left(\int_0^a |A(x, y)|^p dx \right)^{1/p} \qquad \forall D \in L_x^{p,\infty}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}).$$

Poniamo ancora, per comodità di esposizione, le seguenti definizioni.

DEFINIZIONE 3. $L^{p,*}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n})$ *è lo spazio di Banach prodotto*(4)

$$L_y^{p,\infty}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times L_x^{p,\infty}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times L^p(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}).$$

DEFINIZIONE 4. $\Xi^p(\Delta, \mathbb{R}^{n,n})$ *è lo spazio di Banach*

$$\{(\varphi, \psi) \in W^{1,p}(]0, a[, \mathbb{R}^n) \times W^{1,p}(]0, b[, \mathbb{R}^n) : \varphi(0) = \psi(0)\},$$

sottospazio lineare chiuso dello spazio di Banach $W^{1,p}(]0, a[, \mathbb{R}^n) \times W^{1,p}(]0, b[, \mathbb{R}^n)$(4).

(4) Il prodotto di spazi normati si intende sempre munito della norma del grafico.

Introdotte tali notazioni, considerato il problema di Darboux

$$z_{xy} + A(x,y)z_x + B(x,y)z_y + C(x,y)z = f(x,y) \quad \text{q.o. } (x,y) \in \Delta, \tag{1}$$

$$z(x,0) = \varphi(x)\ \forall x \in]0,a[,\ z(0,y) = \psi(y)\ \forall y \in]0,b[, \tag{2}$$

è noto ([6], Theorem 3.1) che vale il seguente teorema di esistenza, unicità e dipendenza continua della soluzione z dal complesso dei dati $((\varphi,\psi),f)$.

TEOREMA 1. *Se* $L = (A,B,C) \in L^{p,*}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n})$, *allora, per ogni* $(\varphi,\psi) \in \Xi^p(\Delta,\mathbb{R}^n)$ *ed ogni* $f \in L^p(\Delta,\mathbb{R}^n)$, *esiste una ed una sola funzione*

$$(x,y) \to z(x,y) = z_L(x,y;(\varphi,\psi),f), \tag{3}$$

elemento di $W_p^*(\Delta,\mathbb{R}^n)$, *soluzione del problema (1), (2); inoltre, la trasformazione*

$$((\varphi,\psi),f) \to z_L(\cdot;(\varphi,\psi),f),$$

da $\Xi^p(\Delta,\mathbb{R}^n) \times L^p(\Delta,\mathbb{R}^n)$ *in* $W_p^*(\Delta,\mathbb{R}^n)$, *è un isomorfismo algebrico e topologico tra* $\Xi^p(\Delta,\mathbb{R}^n) \times L^p(\Delta,\mathbb{R}^n)$ *e* $W_p^*(\Delta,\mathbb{R}^n)$.

Recentemente, in [14], G. Tomaselli ha studiato la dipendenza della funzione (3), soluzione del problema (1), (2), del complesso dei coefficienti $L = (A,B,C)$ e, più in generale, dal complesso dati-coefficienti $((\varphi,\psi),f,L)$, stabilendo in proposito il seguente risultato (che sarà fondamentale per acquisire, nel n. 4, il successivo Teorema 3).

TEOREMA 2. *La trasformazione funzionale*

$$((\varphi,\psi),f,L) \to z_L(\cdot;(\varphi,\psi),f),$$

da $\Xi^p(\Delta,\mathbb{R}^n) \times L^p(\Delta,\mathbb{R}^n) \times L^{p,*}(\Delta,\mathbb{R}^n)$ *in* $W_p^*(\Delta,\mathbb{R}^n)$, *è continua; precisamente, tale trasformazione risulta lipschitziana in ogni insieme limitato di* $\Xi^p(\Delta,\mathbb{R}^n) \times L^p(\Delta,\mathbb{R}^n) \times L^{p,*}(\Delta,\mathbb{R}^{n,n})$.

Poniamo, infine, la

DEFINIZIONE 5. *$M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$ è lo spazio lineare metrico delle (classi di) funzioni misurabili $F : (x,y) \to F(x,y)$, da Δ in $\mathbb{R}^{n,m}$, con la metrica*

$$\rho(F,G) = \int\int_\Delta \frac{|F(x,y) - G(x,y)|}{1 + |F(x,y) - G(x,y)|} dxdy \quad \forall F, G \in M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m}).$$

Come è noto (cfr., ad es., [1], Problem 4, p. 100) la convergenza rispetto alla metrica ρ equivale alla convergenza in misura; inoltre lo spazio metrico $M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$ è completo.

Ovviamente, la definizione dello spazio $M(\Delta, \mathbb{R}^m)$ è perfettamente analoga.

3. $\mathbb{R}^n$-Completa controllabilità.

Come già precisato nell'Introduzione, per ogni matrice $F \in M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$ assumiamo come insieme U_F dei corrispondenti controlli ammissibili il sottospazio vettoriale di $M(\Delta, \mathbb{R}^m)$ costituito dalle (classi di) funzioni $u \in M(\Delta, \mathbb{R}^m)$ tali che $Fu \in L^p(\Delta, \mathbb{R}^n)$.

DEFINIZIONE 6. *Assegnati $L = (A, B, C) \in L^{p,*}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n})$ e $F \in M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$, diciamo che il processo di controllo (E) (o, indifferentemente, la coppia (L, F)) è $\mathbb{R}^n$-completamente controllabile ($\mathbb{R}^n$-c.c.) se per ogni $(\varphi, \psi) \in \Xi^p(\Delta, \mathbb{R}^n)$ ed ogni $w \in \mathbb{R}^n$ esiste $u \in U_F$ tale che*

$$z_L(a, b; (\varphi, \psi), Fu) = w.$$

In altre parole, (L, F) è $\mathbb{R}^n$-c.c. se per ogni $(\varphi, \psi) \in \Xi^p(\Delta, \mathbb{R}^n)$ risulta

$$\{z_L(a, b; (\varphi, \psi), Fu) : u \in U_F\} = \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Per la linearità dell'applicazione $((\varphi,\psi),f) \to z_L(a,b;(\varphi,\psi),f)$, per ogni (φ,ψ), $(\bar\varphi,\bar\psi), \in \Xi^p(\Delta,\mathbb{R}^n)$ risulta

$$\{z_L(a,b;(\varphi,\psi),Fu) : u \in U_F\} =$$

$$\{z_L(a,b;(\bar\varphi,\bar\psi),Fu) : u \in U_F\} + z_L(a,b;(\varphi-\bar\varphi,\psi-\bar\psi),0);$$

ne segue che (L,F) è $\mathbb{R}^n$-c.c. se e solo se la (4) è verificata per qualche $(\varphi,\psi) \in \Xi^p(\Delta,\mathbb{R}^n)$. In particolare, denotata con $\Lambda_{(L,F)}$ la trasformazione lineare

$$u \to \Lambda_{(L,F)}(u) = z_L(a,b;(0,0),Fu),$$

da U_F in $\mathbb{R}^n$, si ha la

PROPOSIZIONE 3. *Siano* $L \in L^{p,*}(\Delta,\mathbb{R}^{n,n})$ *e* $F \in M(\Delta,\mathbb{R}^{n,m})$. *La coppia* (L,F) *è* $\mathbb{R}^n$*-c.c. se e solo se*

$$\Lambda_{(L,F)}(U_F) = \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Si ha inoltre la

PROPOSIZIONE 4. *Per ogni* $L \in L^{p,*}(\Delta,\mathbb{R}^{n,n})$ *ed ogni* $F \in M(\Delta,\mathbb{R}^{n,m})$ *risulta*

$$\Lambda_{(L,F)}(U_F) = \Lambda_{(L,F)}(U_F \cap L^\infty(\Delta,\mathbb{R}^m)).$$

Dimostrazione. Poichè, ovviamente,

$$\Lambda_{(L,F)}(U_F) \supseteq \Lambda_{(L,F)}(U_F \cap L^\infty(\Delta,\mathbb{R}^m))$$

ed entrambi gli insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, è sufficiente dimostrare che $\Lambda_{(L,F)}(U_F \cap L^\infty(\Delta,\mathbb{R}^m))$ è denso in $\Lambda_{(L,F)}(U_F)$. A tale scopo, denotato con u un arbitrario elemento di U_F, consideriamo la successione $\{u_k\}$ di elementi di $L^\infty(\Delta,\mathbb{R}^m)$ definita ponendo, per ogni $k \in N : u_k(x,y) = u(x,y)$ se $|u(x,y)| \leq k$ e $u_k(x,y) = 0$ in caso contrario. Per ogni $(x,y) \in \Delta$ risulta

$$|F(x,y)u_k(x,y)| \leq |F(x,y)u(x,y)|$$

(e quindi $u_k \in U_F$) qualunque sia $k \in N$, nonchè

$$\lim_k F(x,y)u_k(x,y) = F(x,y)u(x,y).$$

Conseguentemente, per il teorema della convergenza dominata, si ha

$$Fu_k \to Fu \quad \text{in} \quad L^p(\Delta, \mathbb{R}^n),$$

e quindi (Teorema 1 e Proposizione 1)

$$\lim_k \Lambda_{(L,F)}(u_k) = \lim_k z_L(a,b;(0,0),Fu_k) = z_L(a,b;(0,0),Fu) = \Lambda_{(L,F)}(u),$$

ciò che completa la dimostrazione.

Dalle precedenti proposizioni discende ovviamente il

COROLLARIO 1. *Siano* $L \in L^{p,*}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n})$ *e* $F \in M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$. *La coppia* (L,F) *è* $\mathbb{R}^n$*-c.c. se e solo se*

$$\Lambda_{(L,F)}(U_F \cap L^\infty(\Delta, \mathbb{R}^m)) = \mathbb{R}^n.$$

Il precedente Corollario, oltre ad essere di utilità per il seguito, mostra anche che, nel caso particolare in cui $F \in L^\infty(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$, allorchè risulta $L^p(\Delta, \mathbb{R}^m) \subseteq U_F$, ma, in generale, $L^p(\Delta, \mathbb{R}^m) \neq U_F$, la definizione di $\mathbb{R}^n$-completa controllabilità di (E) qui adottata è perfettamente equivalente a quella, più usuale in tal caso, secondo cui lo spazio dei controlli ammissibili è $L^p(\Delta, \mathbb{R}^m)$.

4. L'insieme dei processi $\mathbb{R}^n$-completamente controllabili è aperto.

Scopo di questo paragrafo è mostrare che l'insieme delle coppie (L,F) per cui c'è $\mathbb{R}^n$-completa controllabilità è un aperto dello spazio metrico $L^{p,*}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times M(\Delta, R^{n,m})$(5). Il significato intuitivo di ciò è che la $\mathbb{R}^n$-completa controllabilità del processo (E) è una proprietà stabile rispetto a piccole perturbazioni dei coefficienti A, B, C, e F.

LEMMA 1. *Siano* $L \in L^{p,*}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n})$ *e* $F \in M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$. *Sia inoltre, per ogni* $\eta > 0$, $[F]_\eta$ *la matrice funzione, elemento di* $L^\infty(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$, *definita nel modo seguente:* $[F]_\eta(x,y) = F(x,y)$ *se* $|F(x,y)| \leq \eta$ *e* $[F]_\eta(x,y) = 0$ *in caso contrario. Sono fatti equivalenti:*

i) (L, F) *è* $\mathbb{R}^n$*-c.c.;*

ii) $(L, [F]_\eta)$ *è* $\mathbb{R}^n$*-c.c. per* η *sufficientemente grande;*

iii) $(L, [F]_\eta)$ *è* $\mathbb{R}^n$*-c.c. per qualche* $\eta > 0$.

Dimostrazione. i)$\Rightarrow$ii). Ragionando per assurdo, supponiamo che esista una successione $\{\eta_k\}$ di numeri positivi, con $\lim_k \eta_k = +\infty$, tale che nessuna delle coppie $(L, [F]_{\eta_k})$, $k \in N$, risulti $\mathbb{R}^n$-c.c.

Poichè, per ipotesi, (L, F) è $\mathbb{R}^n$-c.c., cioè vale la (5), esistono $u_1, \ldots, u_n \in U_F$ tali che

$$\Lambda_{(L,F)}(u_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

sono n vettori di $\mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti. Osservando che, per ogni $i = 1, \ldots, n$ ed ogni $(x, y) \in \Delta$, risulta

$$|([F]_{\eta_k} u_i)(x,y)| \leq |(F u_i)(x,y)|$$

(e quindi $u_i \in U_{[F]_{\eta_k}}$) qualunque sia $k \in N$, e inoltre

$$\lim_k ([F]_{\eta_k} u_i)(x,y) = (F u_i)(x,y),$$

(5) Munito di una qualsiasi metrica completa d compatibile con la topologia prodotto, per es.

$$d((L,F),(L',F')) = ||L - L'||_{L^{p,*}(\Delta,\mathbb{R}^{n,n})} + \rho(F, F')$$

$$\forall (L,F),(L',F') \in L^{p,*}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m}).$$

si ha, per il teorema della convergenza dominata,

$$[F]_{\eta_k} u_i \to F u_i \quad \text{in} \quad L^p(\Delta, \mathbb{R}^n)$$

per ogni $i = 1, \ldots, n$. Conseguentemente (Teorema 1 e Proposizione 1) risulta, per ogni $i = 1, \ldots, n$,

$$\lim_k \Lambda_{(L,[F]_{\eta_k})}(u_i) = \lim_k z_L(a, b; (0,0), [F]_{\eta_k} u_i) = z_L(a, b; (0,0), F u_i) = \Lambda_{(L,F)}(u_i)$$

quindi, per k sufficientemente grande, anche i vettori

$$\Lambda_{(L,[F]_{\eta_k})}(u_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

sono linearmente indipendenti, cioè (Proposizione 3) la coppia $(L, [F]_{\eta_k})$ è $\mathbb{R}^n$-c.c., ma questo è assurdo.

ii)$\Rightarrow$iii). È banale.

iii)$\Rightarrow$i). Supponiamo che $(L, [F]_\eta)$ sia $\mathbb{R}^n$-c.c. Denotati con (φ, ψ) e w due arbitrari elementi di $\Xi^p(\Delta, \mathbb{R}^n)$ e $\mathbb{R}^n$, rispettivamente, esiste per ipotesi, in corrispondenza, $u \in U_{[F]_\eta}$ tale che

$$z_L(a, b; (\varphi, \psi), [F]_\eta u) = w.$$

Sia $\tilde{u} \in M(\Delta, \mathbb{R}^m)$ definito nel modo seguente: $\tilde{u}(x, y) = u(x, y)$ se $|F(x, y)| \leq \eta$ e $\tilde{u}(x, y) = 0$ in caso contrario. Risulta allora, come è immediato verificare, $F\tilde{u} = [F]_\eta u$, quindi $\tilde{u} \in U_F$ e $z_L(a, b; (\varphi, \psi), F u) = w$, ciò che completa la dimostrazione.

TEOREMA 3. *L'insieme delle coppie $(L, F) \in L^{p,*}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$, che sono $\mathbb{R}^n$-completamente controllabili, è un aperto di $L^{p,*}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$.*

Dimostrazione. Ragionando per assurdo, supponiamo che per qualche $(L, F) \in L^{p,*}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$, (L, F) $\mathbb{R}^n$-c.c., esista una successione $\{(L_k, F_k)\}$ di elementi $L^{p,*}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$, convergente verso (L, F) in $L^{p,*}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$, tale che nessuna delle coppie (L_k, F_k), $k \in N$, sia $\mathbb{R}^n$-c.c. Poichè $F_k \to F$ in $M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$, cioè in misura, possiamo anche supporre, prendendo eventualmente una sottosuccessione, che

$$F_k(x,y) \to F(x,y) \quad \text{q.o.} \quad (x,y) \in \Delta.$$

Per il Lemma 1 si ha che per η sufficientemente grande anche la coppia $(L,[F]_\eta)$ è $\mathbb{R}^n$-c.c.; esistono quindi (Corollario 1) $u_1,\dots,u_n \in L^\infty(\Delta,\mathbb{R}^m)$ tali che

$$\Lambda_{(L,[F]_\eta)}(u_i), \qquad i=1,\dots,n,$$

sono n vettori di $\mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti.

Fissando, come è certo possibile, η in modo che l'insieme $\{(x,y)\in\Delta : |F(x,y)| = \eta\}$ risulti di misura nulla, si ha, q.o. $(x,y)\in\Delta$,

$$[F_k]_\eta(x,y) \to [F]_\eta(x,y)$$

e quindi

$$([F_k]_\eta u_i)(x,y) \to ([F]_\eta u_i)(x,y)$$

per ogni $i=1,\dots,n$. D'altra parte, per ogni $i=1,\dots,n$ ed ogni $k\in N$, vale, q.o. $(x,y)\in\Delta$, la maggiorazione

$$|([F_k]_\eta)(x,y)| \leq \eta \max_{1\leq i\leq n} ||u_i||_{L^\infty(\Delta,\mathbb{R}^m)}$$

Il teorema della convergenza dominata permette allora di concludere che

$$[F_k]_\eta u_i \to [F]_\eta u_i \quad \text{in} \quad L^p(\Delta,\mathbb{R}^n)$$

per ogni $i=1,\dots,n$. Si ha pertanto, per il Teorema 2, per ogni $i=1,\dots,n$,

$$z_{L_k}(\cdot;(0,0),[F_k]_\eta u_i \to z_L(\cdot;(0,0),[F]_\eta u_i) \quad \text{in} \quad W_p^*(\Delta,\mathbb{R}^n)$$

e quindi (Proposizione 1)

$$\Lambda_{(L_k,[F_k]_\eta)}u_i \to \Lambda_{(L,[F]_\eta)}u_i.$$

Conseguentemente, per k sufficientemente grande, anche i vettori

$$\Lambda_{(L_k,[F_k]_\eta)}u_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

sono linearmente indipendenti, vale a dire (Corollario 1) la coppia $(L_k, [F_k]_\eta)$ è $\mathbb{R}^n$-c.c. Il Lemma 1 implica allora che, per k sufficientemente grande, anche la coppia (L_k, F_k) è $\mathbb{R}^n$-c.c., ma ciò è assurdo.

5. L'insieme dei processi $\mathbb{R}^n$-completamente controllabili è denso.

Concludiamo il lavoro con il seguente teorema di approssimazione che fa vedere come un qualsiasi processo di controllo (E) possa essere reso $\mathbb{R}^n$-c.c. tramite un'opportuna, arbitrariamente piccola, perturbazione della matrice F.

TEOREMA 4. *Data una qualsiasi coppia* $(L, F) \in L^{p,*}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$, *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $G \in M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$ *tale che:*

i) (L, G) *è* $\mathbb{R}^n$*-c.c.;*

ii) $||G - F||_{L^\infty(\Delta,\mathbb{R}^{n,m})} < \varepsilon$.

La matrice G *può essere ottenuta dalla* F *modificandone una (qualsiasi) colonna soltanto su un insieme di misura arbitrariamente piccola. È inoltre possibile, qualora* F *sia di classe* $L^r(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$ *o* $C^k(\bar{\Delta}, \mathbb{R}^{n,m})$, *oppure costante a pezzi, fare in modo che anche* G *la sia.*

Il Teorema 4 ammette, ovviamente, il seguente corollario.

COROLLARIO 2. *L'insieme delle coppie* $(L, F) \in L^{p,*}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$, *che sono* $\mathbb{R}^n$*-completamente controllabili, è denso in* $L^{p,*}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$.

Dimostrazione. del Teorema 4. Il Teorema sarà ovviamente dimostrato se faremo vedere che, assegnati comunque la coppia

$(L, F) \in L^{p,*}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times M(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$, i numeri positivi ε, δ, e l'indice j, $1 \leq j \leq m$, è possibile determinare in corrispondenza una funzione $H : \Delta \to \mathbb{R}^{n,m}$, avente tutte le colonne, tranne la j-ma, nulle, con $H \in C_0^\infty(\Delta, \mathbb{R}^{n,m})$, ovvero H costante a pezzi se tale è la F, in modo che, posto $G = F + H$, valgono le i), ii), nonchè:

iii) l'insieme $\{(x, y) \in \Delta : G(x, y) \neq F(x, y)\}$ ha misura minore di δ.

A tale scopo, denotata con $e_1, \dots, e_n$ una qualsiasi base algebrica di $\mathbb{R}^n$ e scelte n funzioni $\eta_1, \dots, \eta_n \in W^{1,p}(]0, b[, \mathbb{R}^n)$ tali che $\eta_i(0) = 0$, $\eta_i(b) = e_i$, $i = 1, \dots, n$, fissiamo n intervalli:

$$[\alpha_1, \beta_1], \dots, [a_n, \beta_n] \subseteq]0, a[,$$

a due a due disgiunti, di lunghezza complessiva minore di δ/b, e, posto $L = (A, B, C)$, per ogni $i = 1, \dots, n$ indichiamo con ζ_i l'unica funzione, elemento di $W_p^*(]\beta_i, a[\times]0, b[, \mathbb{R}^n)$, soluzione del problema di Darboux:

$$\frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial x \partial y} + A(x, y)\frac{\partial \zeta_i}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial \zeta_i}{\partial y} +$$

$$+ C(x, y)\zeta_i = 0 \quad \text{q.o.} \quad (x, y) \in]\beta_i, a[\times]0, b[,$$

$$\zeta_i(x, 0) = 0 \quad \forall x \in]\beta_i, a[,$$

$$\zeta_i(a, y) = \eta_i(y) \quad \forall y \in]0, b[.$$

Dal Lemma 6.1 di [15], tenendo presente la Proposizione 2, segue che, per ogni $i = 1, \dots, n$, esiste una funzione $z_i \in W_p^*(\Delta, \mathbb{R}^n)$, prolungamento della ζ_i all'intero rettangolo Δ, tale che

$$z_i(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in]0, \alpha_i[\times]0, b[,$$

$$z_i(x, y) = 0 \quad \forall x \in]\alpha_i, \beta_i[.$$

Posto $\Delta_i =]\alpha_i, \beta_i[\times]0, b[$, $i = 1, \dots, n$, e considerata la funzione

$$f = \sum_{i=1}^{n} 1_{\Delta_i} \left(\frac{\partial^2 z_i}{\partial x \partial y} + A\frac{\partial z_i}{\partial x} + B\frac{\partial z_i}{\partial y} + Cz_i \right)$$

(dove, se $P \subseteq \Delta$, 1_p denota l'indicatore di P in Δ), si ha (cfr. [6], Theorem 2.2) $f \in L^p(\Delta, \mathbb{R}^n)$; è inoltre evidente che per ogni $i = 1, \ldots, n$ risulta

$$z_L(\cdot; (0,0), 1_{\Delta_i} f) = z_i,$$

e quindi, in particolare,

$$z_L(a, b; (0,0), 1_{\Delta_i} f) = e_i.$$

Detto γ un numero positivo avente la proprietà che se i vettori $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^n$ verificano le disuguaglianze $|w_i - e_i| < \gamma$, $i = 1, \ldots, n$, allora $w_1, \ldots, w_n$ sono linearmente indipendenti, determiniamo in corrispondenza, come è possibile per il Teorema 1 e la Proposizione 1, un altro numero positivo σ tale da risultare

$$|z_L(a, b; (0,0), f_1) - z_L(a, b; (0,0), f_2)| < \gamma$$

per ogni coppia di funzioni $f_1, f_2 \in L^p(\Delta, \mathbb{R}^n)$ tali che $||f_1 - f_2||_{L^p(\Delta, \mathbb{R}^n)} < \sigma$. Fissiamo poi una funzione $\mu : \Delta \to \mathbb{R}^n$, $\mu \in C_0^\infty(\Delta, \mathbb{R}^n)$ ovvero μ costante a pezzi, in modo da aversi $||\mu - f||_{L^p(\Delta, \mathbb{R}^n)} < \sigma$, nonchè

$$\mu(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Delta \backslash (\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n), \tag{6}$$

e denotiamo con $\tilde{H}$ la matrice funzione, da Δ in $\mathbb{R}^{n,m}$, avente come j-ma colonna la μ, mentre le rimanenti sono tutte nulle.

Per come è stata scelta la funzione μ è chiaro che i vettori

$$z_L(a, b; (0,0), 1_{\Delta_i} \mu), \quad i = 1, \ldots, n,$$

sono linearmente indipendenti. Osserviamo inoltre che, denotata con λ la j-ma colonna della matrice F e posto, per ogni $k \in N$,

$$P_k = \{(x, y) \in \Delta : |\lambda(x, y)| \leq k\},$$

per il teorema della convergenza dominata si ha, per ogni $i = 1, \ldots, n$:

$$\lim_k 1_{\Delta_i \cap P_k} \mu = 1_{\Delta_i} \mu \quad \text{in} \quad L^p(\Delta, \mathbb{R}^n);$$

conseguentemente, per il Teorema 1 e la Proposizione 1, anche i vettori

$$(7) \qquad z_L(a,b;(0,0),1_{\Delta_i\cap P_k}\mu), \quad i=1,\dots,n,$$

sono linearmente indipendenti se k è sufficientemente grande, cosa che nel seguito supporremo.

Verifichiamo adesso che, fatta eccezione per al più n valori del parametro $t \in \mathbb{R}$, la coppia $(L, F+t\tilde{H})$ risulta $\mathbb{R}^n$-c.c. Infatti, detto $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ il j-mo elemento della base canonica di $\mathbb{R}^m$, considerate le funzioni $u_1,\dots,u_n \in M(\Delta,\mathbb{R}^m)$ definite da

$$u_i(x,y) = 1_{\Delta_i\cap P_k}(x,y)\bar{u}, \quad (x,y)\in\Delta, \quad i=1,\dots,n,$$

si ha, per ogni $i=1,\dots,n$,

$$Fu_i = 1_{\Delta_i\cap P_k}\lambda \in (L^\infty(\Delta,\mathbb{R}^n)\subseteq)L^p(\Delta,\mathbb{R}^n),$$

$$\tilde{H}u_i = 1_{\Delta_i\cap P_k}\mu \in (L^\infty(\Delta,\mathbb{R}^n)\subseteq)L^p(\Delta,\mathbb{R}^n),$$

quindi $u_i \in U_{F+t\tilde{H}}$ e inoltre

$$z_L(a,b;(0,0),(F+t\tilde{H})u_i) =$$

$$= z_L(a,b;(0,0),Fu_i) + tz_L(a,b;(0,0),1_{\Delta_i\cap P_k}\mu).$$

Poichè i vettori (7) sono linearmente indipendenti, il determinante della matrice le cui colonne sono:

$$z_L(a,b;(0,0),(F+t\tilde{H})u_i), \quad i=1,\dots,n,$$

è, rispetto a t, un polinomio di grado n; pertanto se t non è uno zero di tale polinomio, anche i vettori (8) sono linearmente indipendenti, cioè $(L, F+t\tilde{H})$ è $\mathbb{R}^n$-c.c.

A questo punto, per completare la dimostrazione del teorema è sufficiente scegliere $t\in\mathbb{R}$, con $|t| < \varepsilon/\|\tilde{H}\|_{L^\infty(\Delta,\mathbb{R}^{n,m})}$, in modo che la coppia $(L, F+t\tilde{H})$ sia $\mathbb{R}^n$-c.c., e prendere $H = t\tilde{H}$. Con tale scelta di

H, infatti, è evidente che, posto $G = F + H$, sono verificate la i) e la ii). La validità della iii) è poi assicurata dalla (6).

BIBLIOGRAFIA

[1] Bauer H., *Probability theory and elements of measure theory,* Academic Press, London, (1981).

[2] Benedek A., Panzone R., *The spaces L^p, with mixed norm,* Duke Math. J., **28** (1961), 301-324.

[3] Dauer J.P., *Perturbations of linear control systems,* SIAM J. Control Optim., **9** (1971), 393-400; Errata, ibid., **11** (1973), 395.

[4] Di Vincenzo R., Villani A., *Sopra un problema ai limiti per una equazione lineare del terzo ordine di tipo iperbolico. Esistenza, unicità e rappresentazione della soluzione,* Matematiche (Catania), **32** (1977), 211-238.

[5] Di Vincenzo R., Giusti L., *Perturbazioni per processi di controllo con parametri distribuiti,* Rend. Circ. Mat. Palermo (2), **37**, (1988), 295-306.

[6] Emmanuele G., Villani A., *A Linear Hyperbolic System and an Optimal Control Problem,* J. Optim. Theory Appl., **44** (1984), 213-229.

[7] Minyuk S.A., *Control and Observation Theory of Hyperbolic Systems,* Differential Equations, **15**, n. 9 (1979), 1146-1152.

[8] Mochi G., *Su un problema di controllo ottimo connesso ad una equazione alle derivate parziali di tipo iperbolico,* Boll. Un. Mat. Ital. (3), **21** (1966), 35-47.

[9] Pulvirenti G., Santagati G., *Controlli lineari nel problema di Dirichlet per una equazione di tipo iperbolico,* Matematiche (Catania), **23** (1968), 561-577.

[10] Pulvirenti G., Santagati G., *Alcune osservazioni sulla controllabilità completa di un processo di controllo con parametri distribuiti,* Matematiche (Catania), **28** (1973), 196-207.

[11] Pulvirenti G., Santagati G., *Sulla controllabilità completa in luogo determinato ed in luogo variabile per un processo di controllo con parametri distribuiti,* Boll. Un. Mat. Ital. Suppl. (4), **11** (1975), 316-328.

[12] Pulvirenti G., Santagati G., *Sulla controllabilità in luogo variabile del processo di controllo* $z_{xy} + A(x,y)z_x + B(x,y)z_y + C(x,y)z = f(x,y,U(x,y))$, Matematiche (Catania), **36** (1981), 235-250.

[13] Suryanarayana M.B., *A Sobolev Space and a Darboux Problem,* Pacific J. Math., **69** (1977), 535-550.

[14] Tomaselli G., *Sulla dipendenza continua della soluzione del problema di Darboux dai coefficienti dell'equazione,* Matematiche (Catania), **41** (1986), 143-160.

[15] Villani A., *Processi di controllo con parametri distribuiti in insiemi non limitati. Controllabilità completa esatta,* Ann. Mat. Pura Appl. (4), **33**, 19-33.

[16] Villani A., *The Complete Controllability of Perturbed Linear Control Systems, Revisited,* J. Optum. Theory Appl., **68** (1991), 359-369.

Università di Messina
Dipartimento di Matematica
ctr. Papardo, Salita Sperone, 31
S. Agata (Messina)